数理解析研究所講究録
第 468 巻 1982 年 68-121

不確定特異点をもつ偏微分作用素の超局所解析

東大理　打越敬祐
UCHIKOSHI, Keisuke

片岡[6]，青木[2]による無限階作用素の理論の応用として，ここでは不確定特異点型偏微分作用素の超局所解析について解説する。詳細は打越[9]に発表される予定である。

§0、序

$t \in \mathbb{R}$とし，常微分作用素

$$L = t^{K(m)} \frac{d^m}{dt^m} + \sum_{j=0}^{m-1} t^{K(j)} a_j(t) \frac{d^j}{dt^j}$$

を考えよう。ここで，$K(0), \cdots, K(m)$は非負の整数とし，係数$a_0(t), \cdots, a_{m-1}(t)$は原点で正則で，$a_j(0) \neq 0$，$0 \leq j \leq m-1$，とする。このとき，青木[1]に従って，Lの不確定度$\sigma = \sigma(L)$を，

$$(1) \qquad \sigma(L) = \max\left(\max_{0 \leq j \leq m-1} \left(\frac{K(m) - K(j)}{m - j} \right),\ 1 \right)$$

によって定義する。容易にわかるとおり，$\ell = 1$ (resp. $\ell > 1$) のとき，L は原点に確定特異点 (resp. 不確定特異点) をもつ。さて，常微分作用素の場合には，青木[3]，柏原[4]，によって独立に得られた結果を簡単に紹介しておこう。ここでは青木[3]に従って説明する。$\mathring{x}^* = (0; \sqrt{-1}) \in \sqrt{-1}\,T^*\mathbb{R}$ において，u，$f \in \mathcal{C}_{\mathring{x}^*}$ として，常微分方程式 $Lu = f$ を考える。$L = LD_t^{-m}D_t^{m}$ で，$^\exists \overline{K}(0), \cdots {}^\exists \overline{K}(m-1) \in \mathbb{Z}_+$ が存在し，

$$L D_t^{-m} = t^{K(m)} + \sum_{j=0}^{m-1} L'_{-j}(t, D_t)\, t^{\overline{K}(m-j)}$$

と書ける。但し，L'_{-j} は $-j$ 階の擬微分作用素で，$\overline{K}(j)$ は

$$\max\left(\max_{0 \le j \le m-1}\left(\frac{\overline{K}(m) - \overline{K}(j)}{m-j}\right), 1\right) = \ell(L)$$

を満たす（Newton 図形の最大勾配は変わらない）。さて，$LD_t^{-m}(D_t^{m}u) = f$ を解けばよいが，これは

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} D_t^m u \\ t D_t^m u \\ \vdots \\ t^{K(m)-1} D_t^m u \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}$$

として，

$$t\vec{u} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & -1 \\ \ell_1(t, D_t) & \cdots & & \ell_{K(m)}(t, D_t) \end{pmatrix} \vec{u} = \vec{f}$$

と書き直せる。但し，擬微分作用素 $\ell_j(t, D_t)$ は，

$$\mathrm{ord}\, l_i \leqq \frac{1}{2}(i-1-k(m))$$

を満たす．そこで，

$$\Lambda(D_t) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & D_t^{1/2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_t^{(k(m)-1)/2} \end{pmatrix}$$

として，$\vec{v} = \Lambda \vec{u}$，$\vec{g} = \Lambda \vec{f}$ とすれば，$(t I_{k(m)} + A(t, D_t))\vec{v} = \vec{g}$（$A$ は $-\frac{1}{2}$ 階の~~分数階擬微分~~作用素）を解けばよい。ところが，可逆な無限階作用素 $U(t, D_t)$ が存在して，

$$(t I_{k(m)} + A(t, D_t))U(t, D_t) = U(t, D_t)t$$

となるのである。つまり，$t I_{k(m)} + A$ は標準形 $t I_{k(m)}$ に変換される。このことから，

$$\mathrm{Ker}_t\, L \cong \bigoplus_{k(m)} \mathbb{C}, \quad \mathrm{Cok}_t\, L = 0$$

が従う。

われわれの目標は，このことを偏微分作用素に拡張することである。$M = \mathbb{R}^{n+1}$ の変数を，$x = (x_0, x')$，$x_0 \in \mathbb{R}$，$x' = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ と書く。$k(0), \cdots, k(m) \geqq 0$ を整数，$a_\alpha(x)$，$|\alpha| \leqq m$，を $x = 0$ で正則な函数として，m 階偏微分作用素

$$P = x_0^{k(m)} \partial_{x_0}^m + \sum_{\substack{|\alpha| \leqq m \\ \alpha_0 \neq m}} x_0^{k(|\alpha|)} a_\alpha(x)\, \partial_x^\alpha$$

を考察する．P の不確定度 $\sigma = \sigma(P)$ を，(1) の右辺で定義する。$\sigma = 1$ (resp. $\sigma > 1$) のとき，P は $N = \{x \in M;\ x_0 = 0\}$ に

確定特異点(resp. 不確定特異点)をもつ，ということにする。$l=1$ のとき，柏原－大島[5]によって，次のことが示された：$x^* = (0;\sqrt{-1},0,\cdots,0)\in\sqrt{-1}\,T^*R^{n+1}$ において，$\mathcal{P}$ は(行列に直して)，標準型 $x_0 I_{K(m)}$ に変換され，この点で，

$$\mathrm{Ker}_{\mathcal{C}_M}\ \mathcal{P} \cong \bigoplus_{K(m)} \mathcal{B}_N,\quad \mathrm{Cok}_{\mathcal{C}_M}\ \mathcal{P} = 0$$

が成り立つ。そこで，われわれは，$l>1$ の場合についてこのことを示す。本稿では，以下 $l>1$ と仮定する。

§1. 準備と主要結果

以下の研究で重要な役割を果たす正則超局所作用素(holomorphic microlocal operator)について，簡単に触れておく(佐藤－河合－柏原[7]，片岡[6]，青木[2]を参照)。$X = M^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^{n+1}$ として，T^*X 上の正則超局所作用素の層 $\mathcal{E}^{\mathbb{R}} = \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X$ を

$$\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X = \mathcal{H}^{n+1}_{T^*_X(X\times X)}(\pi_{\mathbb{R}}^{-1}\mathcal{O}_X)^a$$

で定める。但し，埋め込み $X \hookrightarrow X\times X$ を，

$$X \ni x \longmapsto (x,x) \in X\times X$$

とし，

$$\pi_{\mathbb{R}}:\ \widetilde{X}_{X\times X} \longrightarrow X\times X$$

は X を中心とする実コモノイダル変換，

$$a:\ T^*_X(X\times X) \to T^*_X(X\times X)$$

はアンチ・ポーダルをとる写像とする。具体的には，青木[2]

の定義したシンボルを使って考えるのがわかりやすい。

$A(x, D_x) \in \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{\dot{x}^*}$ のシンボル $\sigma(A)(x, \xi)$ は，ある $\varepsilon > 0$ があって，

$$\Gamma_\varepsilon = \{(x, \xi) \in T^*X \ ; \ |x| < \varepsilon \ , \ |\xi'| < \varepsilon|\xi_0|,$$
$$|\mathrm{Re}\,\xi_0| < \varepsilon\, \mathrm{Im}\,\xi_0, \quad \varepsilon|\xi_0| > 1\}$$

で正則で，任意の $\delta > 0$ に対し，$a(x, \xi) = \sigma(A)(x, \xi)$ は

$$(*) \ \sup_{\Gamma_\varepsilon} |e^{-\delta|\xi_0|} a(x, \xi)| < \infty$$

となる。もし，ある $\delta > 0$ があって，

$$\sup_{\Gamma_\varepsilon} |e^{\delta|\xi_0|} \sigma(A)(x, \xi)| < \infty$$

なら，$A(x, D) = 0$ である。また，(*)を満たす函数 $a(x, \xi)$ に対し，$\sigma(A) = a$ となるような $A(x, D) \in \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{\dot{x}^*}$ が存在する。従って，正則超局所作用素とは，通常の擬微分作用素のシンボルより，もっと一般なシンボルに対応する作用素のクラスで，本稿の研究には不可欠なものである。

例として，分数階擬微分作用素に触れておく。$\ell > 0$ を整数とし，$\varepsilon > 0$ を固定しておく。Γ_ε 上の正則函数の列 $\{a_j(x, \xi) \ ; \ j \in \frac{1}{\ell}\mathbb{Z}\}$ が存在して，$\forall \delta > 0$，$\exists C_\delta$；

$$\sup_{\Gamma_\varepsilon} |a_j(x, \xi)| \le C_\delta\, \delta^j |\xi_0|^j / [j]! \qquad j > 0,$$

及び $\exists C$, $\exists \delta > 0$;

$$\sup_{\Gamma_\varepsilon} |a_j(x,\xi)| \leq C_\delta \delta^j |\xi_0|^j [-j]! \qquad j \leq 0$$

とする。このとき，青木[2]の意味で，Γ_ε 上

$$a(x,\xi) \sim \sum_j a_j(x,\xi)$$

となるシンボル $a(x,\xi)$ がとれる。$a(x,\xi)$ に対応する $A(x,D) \in \mathcal{E}^{R}_{x^*}$ を，x^* で定義された分数階擬微分作用素という。より狭い意味では，$a_j(x,\xi)$ は ξ 変数について j 次斉次の場合についてそう呼ぶ。この場合には，直観的には，$A(x,D)$ は

$$A(x,D) = \sum_{\substack{k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n}} a_{k,\alpha}(x) D_{x_0}^{k} D_{x'}^{\alpha} \qquad (\mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\cdots\})$$

で，$a_{k\alpha}(x)$ は適当な収束条件を満たすもの，といってよい。

さて，青木[2]から，基本的なふたつの結果を引用する。

(形式的共役作用素) $A(x,D) \in \mathcal{E}^{R}_{x^*}$ の形式的共役作用素 $A^*(x,D) \in \mathcal{E}^{R}_{a(x^*)}$ は，

$$\sigma(A^*) \sim \sum_\alpha \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha \partial_x^\alpha \sigma(A)(x,-\xi)$$

で定まる。

(合成作用素) $A(x,D)$, $B(x,D) \in \mathcal{E}^{R}_{x^*}$ の合成作用素 $AB(x,D) \in \mathcal{E}^{R}_{x^*}$ は，

$$\sigma(AB) \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!}\partial_{\xi}^{\alpha}\sigma(A)\,\partial_{x}^{\alpha}\sigma(B)$$

で定まる。

次に，本稿の主要結果を述べる。§0．で与えた偏微分作用素Pに対し，（$l>1$の仮定の下に）Pの特性指数$\lambda_1, \cdots, \lambda_{K(m)} \in \mathbb{C}$を，

$$\lambda^{K(m)} + \sum_{j\in\pi(P)} a_{(j,0,\cdots,0)}(0)\,\lambda^{K(j)} = 0$$

の根として定義する。但し，

$$\pi(P) = \left\{0 \le j \le m-1;\ \frac{K(m)-K(j)}{m-j} = l\right\}.$$

<u>定理1.</u> $l>1$とし，$\lambda_i \neq \lambda_j$，$i \neq j$，とする。このとき，正則超局所作用素$Q_1(x,D), \cdots, Q_{K(m)}(x,D) \in \mathcal{E}^{R}_{\mathring{x}^*}$が存在し，$\mathring{x}^*$に於いて，層の意味で，次の図式は完全である：

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{K(m)} \mathcal{B}_N \xrightarrow{(Q_1,\cdots,Q_{K(m)})} \mathcal{C}_M \xrightarrow{P} \mathcal{C}_M \longrightarrow 0.$$

定理1．は次のことから導かれる．

<u>定理2.</u> 整数p，qは$1 \le p < q$を満たすとする。$\mathring{x}^*$で定義された狭い意味の分数階擬微分作用素の$K(m)\times K(m)$行列

$A(x,D)$ が,

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\sigma(A)(x,\xi)=0$$

を満たし, 青木の意味で,

$$\sigma(A)\sim\sum_{\substack{j\in\frac{1}{p}\mathbb{Z},\\ j\leq-\frac{p}{p}}}A_j(x;\xi)\qquad\left(\begin{array}{l}A_j\text{ は }\xi\text{ につい}\\ \text{て }j\text{ 次斉次}\end{array}\right)$$

とする。$A_{-p/p}(x;\xi)$の固有値は全て互いに相異なるとする。このとき, $\dot{x}^*$ で定義された正則超局所作用素の, 作用素として可逆な $k(m)\times k(m)$ 行列 $E(x,D)$ が存在して,

$$\{x_0 I_{k(m)}+A(x,D)\}E(x,D)=E(x,D)x_0 I_{k(m)}$$

を満たす。

<u>§2、行列形方程式への帰着</u>

この節では, u, $f\in(\mathcal{C}_M)_{\dot{x}^*}$ として, 偏微分方程式

$$Pu=f$$

を $k(m)\times k(m)$ 行列に直す。まず, $-m$ 階の擬微分作用素 $Q(x,D)\in(\mathcal{E}_X)_{\dot{x}^*}$ を,

$$\sigma(Q)(x,\xi)=\Big(\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x)\,\xi^\alpha\Big)^{-1}$$

で定義する。$P(x,D)$ の代わりに, $P'(x,D)=Q(x,D)P(x,D)$ を考えればよいが, 次のことは直ちにわかる;

<u>補題 1.</u> $-k$ 階の擬微分作用素 $P'_{-k}(x,D)\in(\mathcal{E}_X)_{\dot{x}^*}$, $1\leq k\leq m$, 及び整数 $\bar{k}(0),\cdots,\bar{k}(m-1)\geq 0$ が存在して,

$$P'(x, D) = x_0^{k(m)} + \sum_{k=1}^{m} P'_{-k}(x, D)\, x_0^{\bar{k}(m-k)}$$

であり，しかも

$$\pi(P) = \{0 \leq j \leq m-1 \,;\, \frac{k(m)-k(j)}{m-j} = Z\}$$
$$= \{0 \leq j \leq m-1 \,;\, \frac{k(m)-\bar{k}(j)}{m-j} = Z\}.$$

が成り立つ。更に，$P'_{-k}(x, D)$の主表象$\sigma_{-k}(P'_{-k})(x, \xi)$ は $m-k \in \pi(P)$ のとき，

B) $$\left[\sigma_{-k}(P'_{-k})\right]_{x_0=0} = \left[\sigma(Q)(x, \xi) \sum_{|\alpha|=m-k} a_\alpha(x)\xi^\alpha\right]_{x_0=0}$$

を満たす。

<u>証明</u> $P'(x, D)$

$$= Q(x, D) \sum_{j=0}^{m} x_0^{k(j)} P_j(x, D)$$

但し，

$$P_j(x, D) = \sum_{|\alpha|=j} a_\alpha(x) D^\alpha.$$

従って，

$$P'(x, D)$$
$$= \sum_{j=0}^{m} Q(x, D) \sum_{l=0}^{\min(k(j), j)} \binom{k(j)}{l} \overbrace{[x_0, \cdots, [x_0, P_j] \cdots]}^{l\text{個}} x_0^{k(j)-l}$$

$$= Q(x, D)\, P_m(x, D)\, x_0^{k(m)}$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \sum_{m+l-j=k} \binom{k(j)}{l} Q(x, D) \overbrace{[x_0, \cdots, [x_0, P_j] \cdots]}^{l\text{個}} x_0^{k(j)-l}$$

と書ける。

そこで，

$$\overline{K}(m-1) = \min\left(\min_{j-l=m-1}(K(j)-l),\quad K(m)\right)$$

$$\overline{K}(m-k) = \min_{j-l=m-k}(K(j)-l) \qquad (k \neq 1)$$

として，

$$P'_{-1} = (QP_m - 1)x_0^{K(m)-\overline{K}(m-1)}$$
$$+\sum_{j-l=m-1}\binom{K(j)}{l} Q \underbrace{[x_0,\cdots,[x_0}_{l\text{個}}, P_j]\cdots]\, x_0^{K(j)-l-\overline{K}(m-1)}$$

$$P'_{-k} = \sum_{j-l=m-k}\binom{K(j)}{l} Q \underbrace{[x_0,\cdots,[x_0}_{l\text{個}}, P_j]\cdots]\, x_0^{K(j)-l-\overline{K}(m-k)}$$
$$(k \neq 1)$$

とする。このとき，$\tau > 1$ なので，

$$j-l = m-k \Rightarrow K(m)-(K(j)-l)$$
$$\leq \tau(m-j)+l$$
$$\leq \tau k$$

等号が成り立つのは，$j = m-k$，$l = 0$，$j \in \pi(P)$ のときだけである。従って，

$$\frac{K(m)-\overline{K}(m-k)}{k} = \tau \Rightarrow m-k \in \pi(P).$$

逆に，$m-k \in \pi(P)$ なら，

$$\frac{K(m)-\overline{K}(m-k)}{k} \geqslant \frac{K(m)-K(m-k)}{k} = \tau.$$

最後に，$m-k\in\pi(P)$ として，$j-l=m-k$，$(j,l)\neq(m-k,0)$ なら

$$
\begin{aligned}
&K(j)-l-\bar{K}(m-k)\\
&=K(j)-l-K(m)+2k\\
&=-l-2(m-j)+2k\\
&<0
\end{aligned}
$$

なので，

$$[\sigma_{-k}(P'_{-k})]_{x_0=0}=[\sigma(Q)\,\sigma_{m-k}(P_{m-k})]_{x_0=0}$$

を得る． Q.E.D.

さて，方程式 $P'u=f$ は，

$$\vec{u}=\begin{pmatrix} u\\ x_0u\\ \vdots\\ x_0^{K(m)-1}u\end{pmatrix},\quad \vec{f}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ f\end{pmatrix}$$

として，

$$\{x_0I_{K(m)}+A'(x,D)\}\vec{u}=\vec{f}$$

と書き直せる。但し，$K(m)\times K(m)$ 行列 $A'(x,D)$ を，

$$A'(x,D)=\begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & -1\\ A'_{(K(m),1)} & \cdots & \cdots & A'_{(K(m),K(m))}\end{pmatrix}$$

//.

$$A'_{(K(m),j)} = \begin{cases} P'_{-k}(x, D) & j = \overline{K}(m-k)+1,\ 1 \le {}^{\exists}k < m \\ 0 & j \neq \overline{K}(m-k)+1,\ 1 \le {}^{\forall}k < m \end{cases}$$

と定める。さて，

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & D_0^{1/2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_0^{(K(m)-1)/2} \end{pmatrix}$$

として，

$$x_0 I_{K(m)} + A'' = \Lambda \{ x_0 I_{K(m)} + A' \} \Lambda^{-1}$$

とすれば，$A''(x, D)$は，狭い意味の分数階擬微分作用素の，$K(m) \times K(m)$行列で，

$$\sigma(A'')(x, \xi) \sim \sum_{j = -\frac{p}{q}, -\frac{p+1}{q}} A''_j(x, \xi).$$

但し，整数p，$q > 0$を次のように定める。定義からℓは有理数なので，互いに素な整数p，$q > 0$があって$\ell = q/p$。$\ell > 1$としているから，$0 < p < q$である。

さて，容易にわかるように，

(4)
$$A''_{-p/q}(x, \xi) = \begin{pmatrix} 0 & -\xi_0^{-p/q} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & -\xi_0^{p/q} \\ A''_{-p/q,(K(m),1)} & \cdots & \cdots & A''_{-p/q,(K(m),K(m))} \end{pmatrix}$$

(5)
$$A''_{-p/q,(K(m),j))} = \begin{cases} \sigma_{-k}(P'_{-k})\, \xi_0^{k-1/2} & j = \overline{K}(m-{}^{\exists}k)+1 \\ 0 & j \neq \overline{K}(m-{}^{\forall}k)+1 \end{cases}$$

さて，分数階擬微分作用素についても，通常の擬微分作用素と同じく，Weierstrassの割算定理が成り立つ:

<u>補題2.</u> 狭い意味の分数階擬微分作用素の可逆な $k(m)\times k(m)$ 行列 $W(x,D)$ が存在して，

$$\{x_0 I_{k(m)} + A''(x,D)\}W(x,D)$$
$$= x_0 I_{k(m)} + A(x,D).$$

但し，Aも狭い意味の分数階擬微分作用素の $k(m)\times k(m)$ 行列で，

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\sigma(A)(x,\xi) = 0$$

$$\sigma(A)(x';\xi) \sim \sum_{j=-\frac{p}{q},-\frac{p+1}{q},\dots} A_j(x';\xi)$$

で，しかも

$$A_{-p/q}(x';\xi) = [A''_{-p/q}]_{x_0=0}.$$

<u>証明省略</u>

<u>注意</u>　$H(x,D)\in\mathcal{E}^{R}$ が，$\frac{\partial}{\partial x_0}\sigma(H)=0$ なら，

$$H = H(x';D)$$

と書く。

さて，われわれは，$x_0 I_{k(m)} + A(x';D)$ を考察すればよ

いのだが，ここで

(6) $P(x, \frac{\partial}{\partial x})$ の特性指数は全て異なる

と仮定することと，

(7) $A_{-p/q}(x'; \xi)$ の固有値は全て異なる

と仮定することは同値である。実際，(3)，(4)，(5) から，$A_{-p/q}(x'; \xi)$ の固有値 $\lambda_1'(x'; \xi)$，…，$\lambda_{k(m)}'(x'; \xi)$ を求めると，

$$\lambda_j = -\left[\lambda_j'(x'; \xi)\xi_0^{p/q}\right]_{x'=\xi'=0}$$

となる。われわれは (6)，(7) を仮定して次節以下の議論を行なう。ここで，以下の方針を簡単に説明しておこう。§3．において，$x_0 I_{k(m)} + A(x'; D)$ は対角行列に変換される。このとき，有限階の作用素しか使わない。更に，§4で，最終的な標準形 $x_0 I_{k(m)}$ へと変換するが，このときは無限階の作用素が使われる。これらの変換は，シンボルの計算に帰着し，ある種の不確定特異点をもつ常微分方程式を解くことになるが，その際 Turrittin [8] の論文の技術を用いる。

§3．行列の対角化

以後，$k(m)$ を単に k と書く。また，$k \times k$ 行列 $H = (H_{(\mu,\nu)})$ に対し，$|H| = k \max_{\mu,\nu} |H_{(\mu,\nu)}|$ とする。この節では，$A(x, D)$ を対角化するのだが，まず $A(x, D)$ の -1 階以上の部

分を対角化しておく．

補題ニ．定理2の条件の下で，x^* に於いて，可逆な $K \times K$ 行列 $T(x';D)$ が存在し，$\exists C > 0$ があって，

$$|\sigma(T)(x';\xi)|,\ |\sigma(T)(x';\xi)| \leq C$$

$$T(x';D)\{x_0 I_K + A(x';D)\}$$
$$= \{x_0 I_K + B(x';D)\} T(x';D).$$

を満たす。ここで，$B(x';D)$ は狭い意味の分数階擬微分作用素で，

$$\sigma(B)(x';\xi) \sim \sum_{j=-\frac{p}{q}, -\frac{p+1}{q}, \cdots} B_j(x';\xi)$$

であって，$j \geq -1$ のとき $B_j(x';\xi)$ は対角行列で，$B_{-p/q} = M$ である。但し，

$$M(x';\xi) = \begin{pmatrix} \lambda'_1(x';\xi) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda'_K(x';\xi) \end{pmatrix}$$

証明．可逆行列 $T'(x';\xi)$ があって，

$$|T'|,\ |(T')^{-1}| \leq {}^{\exists}C$$

$$T'(x';\xi) A_{-p/q}(x';\xi) (T'(x';\xi))^{-1} = M(x';\xi)$$

とできる。そこで，$T'(x';D)$ を，$\sigma(T)(x';\xi) = T'(x';\xi)$ で定義すると，

$$T'(x';D)\{x_0 I_K + A(x';D)\}(T'(x';D))^{-1}$$
$$= x_0 I_K + M(x';D) + M'(x';D)$$

ここで，

$$\sigma(M)(x';\xi) = M(x';\xi)$$

$$\sigma(M')(x';\xi) \sim \sum_{j=-\frac{p}{q},-\frac{p+1}{q},\cdots} M_j(x';\xi)$$

(M_j は ξ について j 次斉次)

次に，$T''_j(x';\xi)$，$j=-\frac{1}{q}, -\frac{2}{q}, \cdots, -\frac{q-p}{q}$，を ξ について j 次斉次として，$T''(x';D)$ を

$$\sigma(T'')(x';\xi) = I_k + \sum_{-\frac{1}{q}\geq j\geq -\frac{q-p}{q}} T''_j(x';\xi)$$

によって定義する．また，$C_j(x';\xi)$，$j=-\frac{p+1}{q}, -\frac{p+2}{q}, \cdots, -1$，を ξ について j 次斉次な対角行列とし，$C(x';D)$ を，

$$\sigma(C)(x';\xi) = \sum_{-\frac{p+1}{q}\geq j\geq -1} C_j(x';\xi)$$

によって定義する。このとき，

$$(8)\quad \sigma\Big(T''(x';D)\{x_0 I_k + M(x';D) + M'(x';D)\} - \{x_0 I_k + M(x';D) + C(x';D)\}T''(x';D)\Big)$$

$$= T''(x';\xi)\{M(x';\xi) + M_{-(p+1)/q}(x';\xi) + \cdots + M_{-1}(x';\xi)\}$$

$$-\{M(x';\xi) + C_{-(p+1)/q}(x';\xi) + \cdots + C_{-1}(x';\xi)\}T''(x';\xi)$$

$$+S(x';\xi)$$

但し，

$$S(x';\xi) \sim \sum_{j=-\frac{q+1}{q},-\frac{q+2}{q}} S_j(x';\xi) \quad \left(\begin{array}{l} S_j \text{ は } \xi \text{ について} \\ j \text{ 次斉次} \end{array}\right)$$

$j=1,2,\cdots,q-p$ について帰納的に

$$T''_{-j/q}(x',\xi),\quad C_{-(p+j)/q}(x',\xi)$$

を決めて，(8)の右辺で，ξ について $-(p+j)/q$ 次斉次な項を0にする（$1\leq j\leq q-p$）．まず $j=1$ なら，(8)の右辺の，$-(p+1)/q$ 次斉次項は，

$$x_0 M_{-(p+1)/q}-x_0 C_{-(p+1)/q}+[T_{-1/q},\ M]$$

なので，

$$C_{-(p+1)/q,(\mu,\nu)}=\begin{cases}0 & \mu\neq\nu\\ M_{-(p+1)/q,(\mu,\nu)} & \mu=\nu\end{cases}$$

$$T''_{-1/q,(\mu,\nu)}=\begin{cases}M_{-(p+1)/q,(\mu,\nu)}\big/(\lambda_\mu-\lambda_\nu) & \mu\neq\nu\\ 0 & \mu=\nu\end{cases}$$

とすればよい．（注：行列 H の (μ,ν) 成分を $H_{(\mu,\nu)}$ で表わす）
$j\geq 2$ についても同様に，$T''_{-j/q}$，$C_{-(p+j)/q}$ を順番に決めてやればよい。

結局，$T(x',D)=T''(x',D)T'(x',D)$ として，

$$\begin{aligned}&T\{x_0 I_K+A\}\\ &=T''\{x_0 I_K+M+M'\}T'\\ &=\{x_0 I_K+M+C+(-\tfrac{p+1}{q}\text{階作用素})\}T\end{aligned}$$

となる。 Q.E.D.

従って，$x_0 I_k + B(x';D)$を考えればよい。さて，対角行列$B'(x';D)$を，

$$\sigma(B')(x';\xi) = \sum_{-\frac{p}{q}\geq j\geq -1} B_j(x';\xi)$$

で定義する。この節では，$x_0 I_k + B(x';D)$を，$x_0 I_k +$ $+ B'(x';D)$に変換するのである。そのために，次のような可逆な行列$U(x';D)$を構成する：

$$\{x_0 I_k + B(x';D)\} D_0^{(q-p)/q} U(x';D) = D_0^{(q-p)/q} U(x';D)\{x_0 I_k + B'(x';D)\}$$

シンボルを考えて，

$$(9)\quad \frac{\partial}{\partial\xi_0}\sigma(U) + \frac{q-p}{q}\xi_0^{-1}\sigma(U) - \sigma(BU - UB') \sim 0$$

を解けばよい。最終的な結果を先取りすると，$i \in \mathbb{Z}_+$に対し，(適当な領域で) $\exists C$，$\exists r > 0$に対して

$$|U^{(i)}(x';\xi)| \leq C r^{-i} [i/q]!\, |\xi_0|^{-\frac{q-p}{q}[\frac{i}{q-p}] + \frac{q-p}{q}}$$

を満たす正則函数$U^{(i)}$が存在し，

$$(10)_i \quad \frac{\partial}{\partial\xi_0}U^{(i)} + \frac{q-p}{q}\xi_0^{-1}U^{(i)} - \sigma(B')U^{(i)} + U^{(i)}\sigma(B') = F^{(i)}$$

を満たす。但し，

$$(11)_i \quad \pi_1(i) = \{(k, \delta, i') \in \tfrac{1}{g}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+^n \times \mathbb{Z}_+ ;\ k - |\delta| - i'/g = -i/g - 1,\ |k| + |\delta| > 1\}$$

$$(12)_i \quad \pi_2(i) = \{(k, \delta, i') \in \tfrac{1}{g}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+^n \times \mathbb{Z}_+ ;\ k - |\delta| - i'/g = -i/g - 1,\ k \geq -1,\ \delta \neq 0\}$$

として $F^{(i)}(x;\xi)$ を

$$(13)_i \quad F^{(i)}(x;\xi) = \sum_{(k,\delta,i') \in \pi_1(i)} \frac{1}{\delta!} \partial_\xi^\delta B_k(x;\xi) \partial_x^\delta U^{(i')}(x;\xi) - \sum_{(k,\delta,i') \in \pi_2(i)} \frac{1}{\delta!} \partial_\xi^\delta U^{(i')}(x;\xi) \partial_x^\delta B_k(x;\xi)$$

によって定義する。$\sigma(U) \sim \sum_i U^{(i)}(x;\xi)$ としてやれば，$U(x;D)$は広い意味の~~分数階擬微分~~作用素で，(9)を満たすことが分かる。可逆性も別に確めて，求める$U(x;D)$が構成されるのである。

ここで，$(k, \delta, i') \in \pi_1(i) \cup \pi_2(i)$のとき，

$$0 \leq i' < i$$

となることを注意しておく。実際，このとき $k + |\delta| > 1$ なので，

$$i' = i + g - g(|k| + |\delta|) \leq i - 1$$

となる．従って，$F^{(i)}$ は B_k，$k \in \frac{1}{g}\mathbb{Z}$，及び$U^{(i')}$，$0 \leq i' < i$，から決まるから，~~方程式~~$(10)_i$ は i について帰

納的に解ける。(10)$_i$ は，x' と ξ' を parameter に含む，ξ_0 に関する常微分方程式で，$\xi_0=\infty$ は不確定特異点になっている。この方程式を解くために，Turrittin [8] の Laplace 変換を用いる方法を使う。

以下，$\tau=\xi_0^{1/q}$ とし，ξ_0 の函数 $f(\xi_0)$ に対し，$\xi_0=\tau^q$ を代入した函数も単に $f(\tau)$ と書く。(10)$_i$ 及び (13)$_i$ は，

$$(14)_i\quad \frac{\partial}{\partial\tau}U^{(i)}(x',\tau,\xi')+(q-p)\tau^{-1}U^{(i)}(x',\tau,\xi')$$
$$-q\tau^{q-1}\left[\sigma(B')(x',\tau,\xi'),U^{(i)}(x',\tau,\xi')\right]=F^{(i)}(x',\tau,\xi')$$

$$(15)_i\quad F^{(i)}(x',\tau,\xi')=q\tau^{q-1}\sum_{\pi_1(i)}\frac{1}{\delta!}\partial_{\xi'}^{\delta}B_k(x',\tau,\xi')\partial_{x'}^{\delta}U^{(i')}(x',\tau,\xi')$$
$$-q\tau^{q-1}\sum_{\pi_2(i)}\frac{1}{\delta!}\partial_{\xi'}^{\delta}U^{(i')}(x',\tau,\xi')\partial_{x'}^{\delta}B_k(x',\tau,\xi')$$

と書き直せる。

まず形式解を作る。

命題1. $i=0,1,2,\cdots$ に対して，τ 及び ξ' に関する形式的べき級数としての形式解

$$(16)_i\quad U^{(i)}=\sum_{j/q+|\alpha|\le-(i+q-p)/q}U^{(i)}_{j\alpha}(x')\tau^{j}\xi'^{\alpha}$$
$$(j\in\mathbb{Z}_-,\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^{\,n})$$

が存在する。ここでε, $r>0$ を十分小さいものとして，$v^{(i)}_{j\alpha}(x')$ は $\{x'\in\mathbb{C}^n;\ |x'|<\varepsilon\}$ で正則で，$\exists C>0$があって

$$(17)_i \quad \left|\partial_{x'}^{\Delta} v^{(i)}_{j\alpha,(\mu,\nu)}(x')\right|$$

$$\leq C\, r^{\frac{j-|\Delta|}{2}-|\alpha|-4qi}\left(\frac{\left[\left(q^2+\frac{q-p}{q}\right)i-j+(q-p)|\Delta|\right]!}{\left((q^2+1)i+q|\alpha|\right)!}\right)^{1/q-p}$$

$$\left(\begin{array}{l} 1\leq\mu,\nu\leq K \\ i\in\mathbb{Z}_+,\ j\in\mathbb{Z}_-,\ \alpha,\Delta\in\mathbb{Z}_+^{\,n}\end{array}\right)$$

を満たす。

$(17)_i$ はたいへん煩雑な評価であるが，証明する前に，$(17)_i$を認めれば，C, r, $\varepsilon>0$を適当にとりかえて，次の形に整理できる．

<u>系</u>　ε, $r>0$ を十分小さいものとすれば，$\{|x|<\varepsilon\}$ で，$\exists C>0$ があって，

$$(18)_i \quad \left|\partial_{x'}^{\Delta} v^{(i)}_{j\alpha}(x')\right|\leq C\, r^{j-|\alpha|-i-|\Delta|}\,\frac{\left[\frac{-j}{q-p}\right]!\left[\frac{i}{q}+|\Delta|\right]!}{\left[\frac{i}{q-p}\right]!\left[\frac{q}{q-p}|\alpha|\right]!}$$

$$(i\in\mathbb{Z}_+,\ j\in\mathbb{Z}_-,\ \alpha,\Delta\in\mathbb{Z}_+^{\,n})$$

を満たす。

<u>注</u>　この形式級数は，$j/q+|\alpha|\to-\infty$ としたときに，あま

りに急速に発散するので，収束しないことはもちろん，青木[2]の意味でのシンボルの漸近展開をも与えない。

<u>命題1.の証明</u>　$i=0$ なら，$v^{(0)}=\tau^{-(q-p)}I_K$ とすればよい。$i\geqq 1$ として，$i'=0,1,\cdots,i-1$ に対して命題1.が正しいとする。さて，$B(x;D)$ は狭い意味での分数階擬微分作用素だから，漸近展開

$$\sigma(B)(x;\xi)\sim\sum_{k=-\frac{p}{q},-\frac{p+1}{q},\cdots}B_k(x;\xi)$$

において $B_k(x;\xi)$ は ξ について k 次斉次である。$B_k(x;\xi)$ の $\xi'=0$ における，ξ' に関する Taylor 展開を考えて，

$$(19)\quad B_k(x;\xi)=\sum_{\frac{j}{q}+|\alpha|=k}B_{j\alpha}(x')\tau^{j}\xi'^{\alpha}$$

$$(j\in\mathbb{Z}_-,\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^n)$$

を得る。ここで，$B_{j\alpha}(x')$ は $\{|x'|<\varepsilon\}$ で正則で，$\exists a,\exists R>0$ が存在して，

$$(20)\quad |\partial_{x'}^{\Delta}B_{j\alpha}(x')|\leqq a\,R^{k-|\alpha|-|\Delta|}[|k|+|\Delta|]!$$

$$(j\in\mathbb{Z},\ \alpha,\Delta\in\mathbb{Z}_+^n,\ k=j/q+|\alpha|)$$

を満たす。(18)$_i$ と(19)を(15)$_i$ に代入して，

$$F^{(i)}=\sum_{j\in\mathbb{Z}_-,\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}F^{(i)}_{j\alpha}(x')\tau^{j}\xi'^{\alpha}$$

$$(21)\quad F^{(i)}_{j\alpha}(x') = q \sum{}^{*} \binom{\beta}{\delta} B_{k\beta}(x')\, \partial_{x'}{}^{\delta} U^{(i')}_{\ell\gamma}(x')$$

$$- q \sum{}^{**} \binom{\gamma}{\delta} U^{(i')}_{\ell\gamma}(x')\, \partial_{x'}{}^{\delta} B_{k\beta}(x')$$

を得る。但し，$\sum^{*}$ は，

$$\left\{ \begin{array}{l|l} h \in \frac{1}{q}\mathbb{Z} & (h, \delta, i') \in \Pi_1(i) \\ \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}_+^n & \beta \geq \delta \\ i' \in \mathbb{Z}_+ & \beta + \gamma - \delta = \alpha \\ k, \ell \in \mathbb{Z} & k + \ell + q - 1 = j \end{array} \right\}$$

について和をとり，$\sum^{**}$ は，

$$\left\{ \begin{array}{l} (h, \delta, i') \in \Pi_2(i),\ \gamma \geq \delta,\ \beta + \gamma - \delta = \alpha, \\ k + \ell + q - 1 = j \end{array} \right\}$$

について和をとる。このとき，$\ell/q + |\alpha| \leq -(i' + q - p)/q$ から，$j/q + |\alpha| \leq -(i + q - p + 1)/q$ が従う。さて $(17)_i$ と (20) を (21) に代入すると，

$$(22)\quad |\partial_{x'}{}^{\Delta} F^{(i)}_{j\alpha}(x')|$$

$$\leq C \cdot r^{\frac{(j+1)-|\Delta|}{2} - |\alpha| - 4qi + 1} \left(\frac{[(q^2 + \frac{q-p}{q})i - (j+1) + (q-p)|\Delta|]!}{((q^2+1) + q|\alpha| - (q-p))!} \right)^{1/(q-p)}$$

を得る。この証明は省くが，打越[9]の中に示されている。

さて，われわれは，以上の準備のもとに，$(14)_i$ を解く。$(16)_i$ の形を仮定して，$(14)_i$ に代入し，$j/q + |\alpha| \leq -(i + q - p + 1)/q$

なる(j,α)に対し，両辺の$t^j\xi'^\alpha$の係数を等しくするには，

$$(13)\quad (j+1+q-p)U^{(i)}_{j+1,\alpha}(x')$$

$$-q\sum\nolimits^{***}\left(B_{k\beta}(x')U^{(i)}_{\ell\gamma}(x')-U^{(i)}_{\ell\gamma}(x')B_{k\beta}(x')\right)$$

$$=F^{(i)}_{j\alpha}(x')$$

を解けばよい。但し，$\sum^{***}$ は，

$$\{k,\ell\in\mathbb{Z},\ \beta,\gamma\in\mathbb{Z}_+^n;$$

$$k/q+|\beta|=-p/q,\ -(p+1)/q,\ \cdots,\ -1$$

$$k+\ell+q-1=j;\ \beta+\gamma=\alpha\}$$

について和をとる。(13)の (μ,μ)成分をとって，

$$(j+1+q-p)U^{(i)}_{j+1,\alpha,(\mu,\mu)}(x')=F^{(i)}_{j,\alpha,(\mu,\mu)}(x')$$

また$\mu\neq\nu$のとき，(μ,ν) 成分をとって，

$$-q\left(B_{-p,0,(\mu,\mu)}(x')-B_{-p,0,(\nu,\nu)}(x')\right)U^{(i)}_{j+1-q+p,\alpha,(\mu,\nu)}(x')$$

$$=-(j+1+q-p)U^{(i)}_{j+1,\alpha,(\mu,\nu)}(x')$$

$$+q\sum_{\ell>j+1-q+p}^{***}\left(B_{k,\beta,(\mu,\mu)}(x')-B_{k,\beta,(\nu,\nu)}(x')\right)U^{(i)}_{\ell,\gamma,(\mu,\nu)}(x')$$

$$+F^{(i)}_{j,\alpha,(\mu,\nu)}(x')$$

となる。だから，$j=-(i+q-p+1),\ -(i+q-p+2),\ \cdots$ の順に，帰納的に

$$U^{(i)}_{j+1,\alpha,(\mu,\mu)}(x')=\frac{1}{j+1+q-p}F^{(i)}_{j,\alpha,(\mu,\mu)}(x')$$

$$U^{(i)}_{j-q+p+1,\alpha,(\mu,\nu)}(x')$$

$$= -\frac{1}{q(B_{-p,0,(\mu,\mu)}(x') - B_{-p,0,(\nu,\nu)}(x'))} \times$$

$$\times \Big\{ q \sum^{***}_{l>j+1-q+p} (B_{k,\beta,(\mu,\mu)}(x') - B_{k,\beta,(\nu,\nu)}(x')) U^{(i)}_{l,\gamma,(\mu,\nu)}(x')$$

$$- (j+1+q-p) U^{(i)}_{j+1,\alpha,(\mu,\nu)}(x') + F^{(i)}_{j\alpha,(\mu,\nu)}(x') \Big\}$$

としてやる。このとき $j/q+|\alpha| \le -(i+q-p+1)/q$ だったから，

$$\begin{cases} (j+1)/q + |\alpha| \le -(i+q-p)/q \\ (j-q+p+1)/q + |\alpha| < -(i+q-p)/q \end{cases}$$

となり，形式解 $U^{(i)} = \sum_{j\alpha} U^{(i)}_{j\alpha}(x')\, t^{j} \xi'^{\alpha}$ において，j と α は $j/q+|\alpha| \le -(i+q-p)/q$ を満たす。評価式 $(17)_i$ は(22)からわかるのだが，ここでは省略する。これも大橋[9]に示されている。 Q.E.D.

* * * * *

こうして $(14)_i$ の形式解 $U^{(i)}$ が構成された。しかしこのままでは意味をなさないので，$U^{(i)}$ に対応する，$(14)_i$ の真の解を構成する。そのために，Turrittin [8] にならって，Laplace 変換による方法を用いる。

まず，$\sigma = \tau^{q-p} (= \xi_0^{(q-p)/q})$とする。$J = 1, 2, \cdots, q-p$に対して，

$$B_{\ell,(J)}(x', \sigma, \xi') = \sum_{\substack{j/q + |\alpha| = \ell \\ p+j-J \in (q-p)\mathbb{Z}}} B_{j\alpha}(x')\sigma^{\frac{p+j-J}{q-p}}\xi'^{\alpha}$$

とする。このとき，

$$B_\ell(x', \tau, \xi') = \sum_{J=1}^{q-p} \tau^J B_{\ell,(J)}(x', \sigma, \xi')$$

となる。更に，

$$B'_{(J)}(x', \sigma, \xi') = \sum_{\ell \geq -1} B_{\ell,(J)}(x', \sigma, \xi')$$

とおく。また，形式的べき級数$U^{(i)}_{(J)}$，$1 \leq J \leq q-p$，を，

$$U^{(i)}_{(J)} = \sum_{j-J \in (q-p)\mathbb{Z}} U^{(i)}_{j\alpha}(x')\sigma^{\frac{j-J}{q-p}}\xi'^{\alpha}$$

とする。このとき，(4)$_i$，(5)$_i$は次のように書き直せる：

$$(24)_{i,J} \quad (q-p)\frac{\partial}{\partial\sigma}U^{(i)}_{(J)} + (J+q-p)\sigma^{-1}U^{(i)}_{(J)}$$
$$- q\sum_{K+L=J}\{B'_{(K)}U^{(i)}_{(L)} - U^{(i)}_{(L)}B'_{(K)}\}$$
$$- q\sigma\sum_{K+L=J+q-p}\{B'_{(K)}U^{(i)}_{(L)} - U^{(i)}_{(L)}B'_{(K)}\} = F^{(i)}_{(J)}$$

$$(3)_{i,J}\quad F^{(i)}_{(J)} = g\sum_{K+L=J}\Big\{\sum_{\pi_1(i)}\frac{1}{\delta!}\partial_{\xi'}^{\delta}B_{k,(K)}\,\partial_{x'}^{\delta}U^{(i')}_{(L)}$$

$$-\sum_{\pi_2(i)}\frac{1}{\delta!}\partial_{\xi'}^{\delta}U^{(i')}_{(L)}\,\partial_{x'}^{\delta}B_{k,(K)}\Big\}$$

$$+\,g\sigma\sum_{K+L=J+g-p}\Big\{\sum_{\pi_1(i)}\frac{1}{\delta!}\partial_{\xi'}^{\delta}B_{k,(K)}\,\partial_{x'}^{\delta}U^{(i')}_{(L)}$$

$$-\sum_{\pi_2(i)}\frac{1}{\delta!}\partial_{\xi'}^{\delta}U^{(i')}_{(L)}\,\partial_{x'}^{\delta}B_{k,(K)}\Big\}$$

ここで更に，

$$C_{k,(J)}(x';\sigma,\xi') = \sigma B_{k,(J)}(x';\sigma,\xi') - B_{J-g,0}(x')$$

$$= \sigma\sum_{\substack{j/g+|\alpha|=k\\ p+j-J\in(g-p)\mathbb{Z}\\ (g+j-J)/(g-p)\le -2}} B_{j,\alpha}(x')\,\sigma^{\frac{p+j-J}{g-p}}\xi'^{\alpha}$$

とする。さて，$B_{k,(J)}(x';\sigma,\xi')$ 及び $C_{k,(J)}(x';\sigma,\xi')$ を σ について Fourier 変換しよう。$|\sigma|\ge\{\frac{1}{2R}(1+|\xi'|)\}^{(g-p)/g}$ なら，

$$|B_{k,(J)}|,\ |C_{k,(J)}| \le \text{const.}\,|\sigma|$$

となる。そこで，$(x';\xi')\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n$ を任意に fix して，

$$\gamma(\xi') = \{\sigma\in\mathbb{C};\ -\infty<\mathrm{Re}\,\sigma<\infty,$$
$$\mathrm{Im}\,\sigma = \Big(\frac{1}{2R}(1+|\xi'|)\Big)^{(g-p)/g}\}$$

とすれば，$s\in\mathbb{R}$ に対して，$\mathcal{S}'_{\mathrm{Re}\,\sigma}\to\mathcal{S}'_{s}$ の意味で，

$$\widehat{B}_{k,(J)}(x';s,\xi')=\int_{\gamma(\xi')}e^{-\sqrt{-1}s\sigma}B_{k,(J)}(x';\sigma,\xi')\,d\sigma$$

$$\widehat{C}_{k,(J)}(x';s,\xi')=\int_{\gamma(\xi')}e^{-\sqrt{-1}s\sigma}C_{k,(J)}(x';\sigma,\xi')\,d\sigma$$

が定まる。そして，容易にわかるように，

$$\widetilde{B}_{k,(J)}(x';s,\xi')=\sum_{\substack{j/q+|\alpha|=k\\ p+j-J\in(q-p)\mathbb{Z}}}B_{j,\alpha}(x')\frac{(-\sqrt{-1}s)^{\frac{|p+j-J|}{q-p}-1}}{\left(\frac{|p+j-J|}{q-p}-1\right)!}\xi'^{\alpha}$$

$$\widetilde{C}_{k,(J)}(x';s,\xi')=\sum_{\substack{j/q+|\alpha|=k\\ p+j-J\in(q-p)\mathbb{Z}\\ (p+j-J)/(q-p)\le-2}}B_{j,\alpha}(x')\frac{(-\sqrt{-1}s)^{\frac{|p+j-J|}{q-p}-2}}{\left(\frac{|p+j-J|}{q-p}-2\right)!}\xi'^{\alpha}$$

として，

$$\widehat{B}_{k,(J)}=-2\pi\sqrt{-1}\,\widetilde{B}_{k,(J)}\,Y(s)$$
$$\widehat{C}_{k,(J)}=-2\pi\sqrt{-1}\,\widetilde{C}_{k,(J)}\,Y(s)$$

となる。但し，$Y(s)$，$s\in\mathbb{R}$，は Heaviside 函数。

さて，$\widetilde{B}_{k,(J)}$，$\widetilde{C}_{k,(J)}$ に対して，次のことが言える：

<u>補題4.</u> $\varepsilon>0$ が十分小さいとき，$\widetilde{B}_{k,(J)}$，$\widetilde{C}_{k,(J)}$ は

$$\{(x',s,\xi')\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n;\ |x'|<\varepsilon\}$$

で正則で，$\exists a_1$，$\exists R_1>0$ が存在して，

$$(26)\quad \left|\partial_{x'}^{\Delta}\partial_{\xi'}^{\delta}\tilde{B}_{k,(J)}(x',s,\xi')\right|$$

$$\leq a_1 \exp\left(a_1(1+|\xi'|)^{(q-p)/q}|s|\right) R_1^{\,k-|\Delta|-|\delta|}\times$$

$$\times\,[|k|+|\Delta|+|\delta|]!\ \frac{|s|^{(q|k|-p+q|\delta|+J)/(q-p)\ -1}}{\Gamma\left((q|k|-p+q|\delta|+J)/(q-p)\right)}$$

$$(27)\quad \left|\partial_{x'}^{\Delta}\partial_{\xi'}^{\delta}\tilde{C}_{k,(J)}(x',s,\xi')\right|$$

$$\leq a_1 \exp\left(a_1(1+|\xi'|)^{(q-p)/q}|s|\right) R_1^{\,k-|\Delta|-|\delta|}\times$$

$$\times\,[|k|+|\Delta|+|\delta|]!\ \frac{|s|^{(q|k|-p+q|\delta|+J)/(q-p)\ -2}}{\Gamma\left((q|k|-p+q|\delta|+J)/(q-p)\ -1\right)}$$

$$\left(\Delta,\delta\in\mathbb{Z}_+^{\,n},\ k\in\tfrac{1}{q}\mathbb{Z},\ 1\leq J\leq q-p\right)$$

が成り立つ。更に，$k\geq -1$ に対しては，

$$(28)\quad \left|\partial_{x'}^{\Delta}\tilde{C}_{k,(J)}(x',s,\xi')\right|$$

$$\leq a_1 \exp\left(a_1(1+|\xi'|)^{(q-p)/q}|s|\right) R_1^{-|\Delta|}\,(1+|\xi'|)^{(2q-2p-J)/q}|\Delta|!$$

$$\left(\Delta\in\mathbb{Z}_+^{\,n},\ 1\leq J\leq q-p\right)$$

が成り立つ。

<u>証明</u>　$\tilde{B}_{k,(J)}$，$\tilde{C}_{k,(J)}$ の定義の式を見て，$B_{j\alpha}(x')$ に対する評価(20)を直接代入すればよい。(26)についてだけ，このこ

とを見ておくと，簡単のため $|k|+|\delta|>1$ として。

$$\left|\partial_{x'}^{\Delta}\partial_{\xi'}^{\delta}\tilde{B}_{k,(J)}(x';s,\xi')\right|$$

$$\leq \sum_{\substack{\partial/q+|\alpha|=k\\ \alpha\geq\delta}} \partial_{x'}^{\Delta}B_{j\alpha}(x')\frac{|s|^{|p+j-J|/(q-p)-1}}{(|p+j-J|/(q-p)-1)!}\frac{\alpha!}{(\alpha-\delta)!}|\xi'|^{\alpha-\delta}$$

$$\leq \sum_{\substack{\partial/q+|\alpha|=k\\ \alpha\geq\delta}} aR^{k-|\alpha|-|\Delta|}[|k|+|\Delta|]!\frac{|s|^{(q|k|+q|\alpha|-p+J)/(q-p)-1}}{((q|k|+q|\alpha|-p+J)/(q-p)-1)!}\times$$

$$\times 2^{|\alpha|}\delta!|\xi'|^{\alpha-\delta}$$

$$\leq aR^{k-|\Delta|}\left(\frac{R}{2}\right)^{-|\delta|}[|k|+|\Delta|+|\delta|]!\frac{|s|^{(q|k|-p+q|\delta|+J)/(q-p)-1}}{[(q|k|-p+q|\delta|+J)/(q-p)-1]!}\times$$

$$\times\sum_{\alpha\geq\delta}\left(\frac{2}{R}|\xi'||s|^{\frac{q}{q-p}}\right)^{|\alpha-\delta|}\frac{1}{[\frac{q}{q-p}|\alpha-\delta|]!}$$

Q.E.D.

次に，

$$\sigma^{j}\longmapsto -2\pi\sqrt{-1}\,Y(s)\cdot\frac{(-\sqrt{-1}s)^{-j-1}}{(-j-1)!}$$

$$(j=-1,-2,\cdots)$$

という約束で，$v^{(z')}_{(J)}(x';\sigma,\xi')$ を σ 変数について形式的に Fourier 変換したものを $\hat{v}^{(z')}_{(J)}(x';s,\xi')$ とすると，

$$\hat{v}^{(z')}_{(J)}(x';s,\xi')=-2\pi\sqrt{-1}\,\hat{v}^{(z)}_{(J)}(x';s,\xi')Y(s)$$

$$\hat{v}_{(J)}^{(i)}(x',s,\xi') = \sum_{j-J\in(q-p)\mathbb{Z}} v_{j\alpha}^{(i)}(x') \frac{(-\sqrt{-1}s)^{|j-J|/(q-p)-1}}{((j-J)/(q-p)-1)!}\xi'^{\alpha}$$

となる。ここで,

$$\begin{aligned} &|j-J|/(q-p)-1 \\ &= (-j+J)/(q-p)-1 \\ &\geq (i+q-p+J)/(q-p)-1 \\ &= (i+J)/(q-p) \end{aligned}$$

に注意すると, $(8)_i$ の評価式から, 形式的べき級数 $\hat{v}_{(J)}^{(i)}$ は, 実は

$$\{(x',s,\xi')\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n;\ |x'|<\varepsilon,\ |s|\leq r/2\}$$

で収束し, この領域上 $\exists C$, $\exists r>0$ があって,

$$\begin{aligned} (29)\qquad &|\partial_{x'}^{\Delta}\partial_{\xi'}^{\delta}\hat{v}_{(J)}^{(i)}(x',s,\xi')| \\ &\leq C\, r^{-i-|\Delta+\delta|}\left[\frac{i}{q}+|\Delta+\delta|\right]!\,\frac{|s|^{(i+J+q|\delta|)/(q-p)}}{[(i+J+q|\delta|)/(q-p)]!}\times \\ &\times\exp\left(r^{-1}(1+|\xi'|)^{(q-p)/q}|s|\right) \end{aligned}$$

$$(\Delta,\delta\in\mathbb{Z}_+^n,\quad i\in\mathbb{Z}_+,\ 1\leq J\leq q-p)$$

を満たす。このように, 発散する形式解に対し, 形式的な Fourier 変換を施すと, ある種の収束級数が得られるというのが, Turrittin[8] の論文のトリックで, このことを手掛りにして, $(14)_i$, $(15)_i$ の真の解を構成するのである。

さて，われわれは，$(24)_{i,J}$ の形式解に対して

$$\sigma^{j} \longmapsto -2\pi\sqrt{-1}\,Y(s)\frac{(-\sqrt{-1}s)^{-j-1}}{(-j-1)!} \qquad (j \leq -1)$$

という約束で，形式的な Fourier 変換を施した。従って，

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}f(\sigma) \longmapsto \sqrt{-1}s\,\hat{f}(s)$$

$$\sigma^{j}f(\sigma) \longmapsto \left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\right)^{-j}\underbrace{\int_0^s\cdots\int_0^s}_{-j\text{回}}\hat{f}(s)\,ds$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^s(-2\pi\sqrt{-1})\frac{(-\sqrt{-1}(s-t))^{-j-1}}{(-j-1)!}\hat{f}(t)\,dt$$

$$= -\frac{1}{2\pi}(\sigma^{j})^{\wedge} * \hat{f}(s) \qquad j \leq -1$$

という約束で，$(24)_{i,J}$ を書き直すと，$\hat{U}^{(i)}_{(J)}$ はその形式解である。しかも $|s| \leq r/2$ で $\hat{U}^{(i)}_{(J)}$ は収束するから，$\hat{U}^{(i)}_{(J)}$ は，$|s| \leq r/2$ で次の式の真の解である：

$$(30)_{i,J} \quad (q-p)\sqrt{-1}s\,\hat{U}^{(i)}_{(J)}(x';s,\xi') + \frac{J+q-p}{\sqrt{-1}}\int_0^s \hat{U}^{(i)}_{(J)}(x';t,\xi')\,dt$$

$$+\frac{q}{2\pi}\sum_{K+L=J}\int_0^s\{\hat{B}'_{(K)}(x';t,\xi')\hat{U}^{(i)}_{L}(x';s-t,\xi')$$

$$-\hat{U}^{(i)}_{(L)}(x';s-t,\xi')\hat{B}'_{(K)}(x';t,\xi')\}\,dt$$

$$-q\sum_{K+L=J+q-p}\{B_{K-q,0}(x')\hat{U}^{(i)}_{(L)}(x';s,\xi') - \hat{U}^{(i)}_{(L)}(x';s,\xi')B_{K-q,0}(x')\}$$

（つづく）

$$+\frac{g}{2\pi}\sum_{K+L=J+g-p}\int_0^s\{\hat{C}'_{(K)}(x',t,\xi')\hat{U}^{(i)}_{(L)}(x',s-t,\xi')$$

$$-\hat{U}^{(i)}_{(L)}(x',s-t,\xi')\hat{C}'_{(K)}(x',t,\xi')\}dt$$

$$=\hat{F}^{(i)}_{(J)}(x',s,\xi').$$

ここで，

$$\hat{C}'_{(J)}=\sum_{h\geq -1}\hat{C}_{h,(J)}$$

とした。また，$\hat{F}^{(i)}_{(J)}$ は，

$(3.1)_{i,J}$ $\quad \hat{F}^{(i)}_{(J)}(x',s,\xi')$

$$=-\frac{g}{2\pi}\sum_{K+L=J}\Big\{\sum_{\pi_1(i)}\frac{1}{\delta!}\int_0^s\partial_{\xi'}^{\delta}\hat{B}_{h,(K)}(x',t,\xi')\partial_{x'}^{\delta}\hat{U}^{(i')}_{(L)}(x',s-t,\xi')dt$$

$$-\sum_{\pi_2(i)}\frac{1}{\delta!}\int_0^s\partial_{\xi'}^{\delta}\hat{U}^{(i')}_{(L)}(x',s-t,\xi')\partial_{x'}^{\delta}\hat{B}_{h,(K)}(x',t,\xi')dt\Big\}$$

$$-g\sum_{K+L=J+g-p}\ \sum_{\pi_3(i,K)}\frac{1}{\delta!}\partial_{\xi'}^{\delta}\hat{U}^{(i')}_{(L)}(x',s,\xi')\partial_{x'}^{\delta}B_{K-g,0}(x')$$

$$-\frac{g}{2\pi}\sum_{K+L=J+g-p}\Big\{\sum_{\pi_1(i)}\frac{1}{\delta!}\int_0^s\partial_{\xi'}^{\delta}\hat{C}_{h,(K)}(x',t,\xi')\partial_{x'}^{\delta}\hat{U}^{(i')}_{(L)}(x',s-t,\xi')dt$$

$$-\sum_{\pi_2(i)}\frac{1}{\delta!}\int_0^s\partial_{\xi'}^{\delta}\hat{U}^{(i')}_{(L)}(x',s-t,\xi')\partial_{x'}^{\delta}\hat{C}_{h,(K)}(x',t,\xi')dt\Big\}$$

で定義する。但し，

$$\pi_3(i,K)=\{(i',\delta)\in\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+^n;\ i'+g|\delta|=i+K\}.$$

とする。

さて，$\{v_{(j)}^{(i)}\,;\ 1\leq j\leq g-p\}$ は，第3種Volterra型方程式系 $\{(B0)_{i,j}\,;\ 1\leq j\leq g-p\}$ の，$|s|\leq r/2$ における真の解だったが，この連立方程式系の解は，i について帰納的に，

$$s\neq B_{-p,0,(\mu,\mu)}(x')-B_{-p,0,(\nu,\nu)}(x')$$
$$\begin{pmatrix}1\leq\mu,\nu\leq K\,,\ \mu\neq\nu\\ |{}^{\forall}x'|<\varepsilon\end{pmatrix}$$

での解として一意的に延びる。ところで，

$$B_{-p,0}(x')=\left[B_{-p/q}(x',\xi)\right]_{\xi_0=1,\,\xi'=0}$$
$$=\left[\begin{pmatrix}+\lambda_1'(x',\xi) & & \\ & \ddots & \\ & & +\lambda_K'(x',\xi)\end{pmatrix}\right]_{\xi_0=1,\,\xi'=0}$$

で，$\lambda_i'\neq\lambda_j'$ $(i\neq j)$ としているから，$\exists\theta\in\mathbb{R}$ があって，

$$\theta\neq\arg\left(B_{-p,0,(\mu,\mu)}(x')-B_{-p,0,(\nu,\nu)}(x')\right)+\frac{\pi}{2}$$
$$\begin{pmatrix}1\leq\mu,\nu\leq K\,,\ \mu\neq\nu\\ |{}^{\forall}x'|<\varepsilon\end{pmatrix}$$

である。ここでは簡単のため，$\theta=0$ でよいとする（そうでないときは，$s\in e^{-\sqrt{-1}\theta}\mathbb{R}$ で同様の議論を行なう）。すると，$v_{(j)}^{(i)}$ は，$(B0)_{i,j}$ の解として，$\{(x',s,\xi')\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{C}^n\,;\ |x'|<\varepsilon\}$

に延びる。更に，(29)のような評価が，$\forall s \in \mathbb{R}$ に対しても成立することを示そう。

<u>命題2.</u> $\mu \neq \nu$，$|x'| < \varepsilon$ で

$$\arg\left(B_{-p,0,(\mu,\mu)}(x') - B_{-p,0,(\nu,\nu)}(x')\right) \neq 0$$

とする．$\varepsilon > 0$ は十分小さくとっておく。このとき，$\exists C, \exists \rho > 0$ があって，

$$(32)_i \quad \left|\partial_{x'}^{\Delta}\partial_{\xi'}^{\delta}\hat{v}^{(i)}_{(J)}(x';s,\xi')\right|$$

$$\leq C\rho^{-(6i+|\Delta+\delta|+\frac{J}{q-p})}\exp\left(\rho^{-1}(1+|\xi'|)^{(q-p)/q}|s|\right)\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{qi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left[\frac{i+k}{q}+|\Delta+\delta|\right]!}{(k!)^{1/q}}\frac{|s|^{(i+J+l+q|\delta|)/(q-p)}(1+|\xi'|)^{l/q}}{\Gamma\left((i+J+l+q|S|)/(q-p)+1\right)}$$

$$\begin{pmatrix}\Delta,\delta\in\mathbb{Z}_+^n, & i\in\mathbb{Z}_+, & \\ x',\xi'\in\mathbb{C}^n, & |x'|<\varepsilon, & s\in\mathbb{R}\end{pmatrix}$$

が成り立つ．

<u>証明</u> i について帰納的に示す。$i=0$ なら，$v^{(0)} = \tau^{-(q-p)}I_k$ なので，

$$\hat{v}^{(0)}_{(J)} = \begin{cases} -2\pi s\, Y(s)\, I_k & J = q-p \\ 0 & J \neq q-p \end{cases}$$

なので自明。$i \geq 1$ として，$i' \leq i-1$ で (32)$_{i'}$ は正しいとする。このとき，

$$
\left|\partial_{x'}^{\Delta}\partial_{\xi'}^{\delta}\hat{F}_{(J)}^{(i)}(x',s,\xi')\right|
$$

$$
\leq (1+|s|)\, C\, \rho^{-(6i+|\Delta+\delta|+\frac{J}{q-p})+1} \exp\left(\rho^{-1}(1+|\xi'|)^{\frac{q-p}{q}}|s|\right) \times
$$

$$
\times \sum_{k=0}^{qi}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\left[\frac{i+k}{q}\right]+|\Delta+\delta|\right)!}{(k!)^{1/q}} \frac{|s|^{(i+J+l+q|s|)/(q-p)}(1+|\xi'|)^{l/q}}{\Gamma\left((i+J+l+q|s|)/(q-p)+1\right)}
$$

$$
\left(\begin{array}{l}\Delta,\delta\in\mathbb{Z}_+^n,\ i\in\mathbb{Z}_+ \\ x',\xi'\in\mathbb{C}^n,\ |x'|<\varepsilon,\ s\in\mathbb{R}\end{array}\right)
$$

を得る．この評価の証明は省略する（打越[9]参照）。さて，この評価から，例えば $\Delta=\delta=0$ のとき，(32)$_i$ は次のようにして示される。もし $\Delta=\delta=0$ に対して (32)$_i$ が正しくないとすると，$\exists(x',s,\xi')\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{C}^n$, $|x'|<\varepsilon$ において，(32)$_i$ の不等式が成立しない。そこで，このような (x',s,ξ') を任意に選び，x' と ξ' を fix する。この (x',ξ') に対し，

$$
\mathring{s} = \inf\{ s\in\mathbb{R}_+ ;\ (x',s,\xi') \text{ で (32)}_i \text{ は正しくない} \}
$$

とする。$s\leq r/2$ では (32)$_i$ が成立している（(29) から (32)$_i$ が導ける）ので，$\mathring{s}>r/2$。一方，背理法の仮定から，$\mathring{s}\lneqq\infty$。この $\mathring{s}$ において，(30)$_{i,J}$ の両辺を比べる。(30)$_{i,J}$ の左辺から，

$$(q-p)\sqrt{-1}\,s\,\hat{U}^{(i)}_{(J)} - q\left(B_{-p,0}(x')\hat{U}^{(i)}_{(J)} - \hat{U}^{(i)}_{(J)}B_{-p,0}(x')\right)$$

だけを抜き出す。この行列の(μ,ν)成分は，

$$(33)\quad \left\{(q-p)\sqrt{-1}\,s - q\left(B_{-p,0,(\mu,\mu)}(x') - B_{-p,0,(\nu,\nu)}(x')\right)\right\}\hat{U}^{(i)}_{(J),(\mu,\nu)}$$

となる。ここで，仮定から，$s\in\mathbb{R}$，$s\geq\frac{r}{2}$，では

$$\left|(q-p)\sqrt{-1}\,s - q\left(B_{-p,0,(\mu,\mu)}(x') - B_{-p,0,(\nu,\nu)}(x')\right)\right| \geq {}^{\exists}R|s|.$$

従って，(33)の式の絶対値は，$s=\mathring{s}$で

$$(34)\quad {}^{\exists}R|\mathring{s}|\cdot\left|\hat{U}^{(i)}_{(J),(\mu,\nu)}(x';\mathring{s},\xi')\right|$$

より小さくはない。そして，$s=\mathring{s}$で$(32)_i$は正しくない。

ところが，$(30)_{i,J}$の残りの項の$s=\mathring{s}$の値は全て，$\hat{U}^{(i)}_{(I)}(x';s,\xi')$の$0<s<\mathring{s}$での積分の形で与えられているので，被積分項の中に現われる，$\hat{U}^{(i)}_{(I)}$は全て$(32)_i$の評価を満たしている。よって，それら全ての和を評価できて，それは(34)より小さくなることが示せる。これは矛盾だから，$(32)_i$が正しいことがわかる。詳しくは Turrittin [8] を参照　　Q.E.D.

系　命題2の仮定の下に，${}^{\exists}C$，${}^{\exists}r>0$が存在して，

$$(35)\quad \left|\hat{U}^{(i)}_{(J)}(x';s,\xi')\right| \leq C\,r^{-i}\left[\frac{i}{q}\right]!\,\frac{|s|^{[i/(q-p)]}}{[i/(q-p)]!}\times$$
$$\times\exp\left(r^{-1}(1+|\xi'|)^{(q-p)/q}|s|\right).$$

$$\left(\begin{array}{l} i\in\mathbb{Z}_+,\ 1\le J\le q-p,\\ (x';s,\xi')\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{C}^n,\ |x'|<\varepsilon\end{array}\right)$$

さて，こうして求めた$\hat{v}^{(i)}_{(J)}(x';s,\xi')$を$v^{(i)}_{(J)}(x';\sigma,\xi')$に戻そう。容易にわかるように，$\mathrm{Im}\,\sigma > 2r^{-1}(1+|\xi'|)^{(q-p)/q}$で

$$v^{(i)}_{(J)}(x';\sigma,\xi') = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{\sqrt{-1}s\sigma}\,\hat{v}^{(i)}_{(J)}(x';s,\xi')\,ds$$

は正則で，$(4.4)_{i,J}$ の真の解である。ところで，

$$v'^{(i)}_{(J)}(x';\sigma,\xi') = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{\sqrt{-1}s\sigma}(\sqrt{-1}s)^{-[i/(q-p)]}\,\hat{v}^{(i)}_{(J)}(x';s,\xi')\,ds$$

とすると，(6.5)から，

$$\left|v'^{(i)}_{(J)}(x';\sigma,\xi')\right| \le (q-1)C\,r^{-i}\left[\frac{i}{q}\right]!\Big/\left[\frac{i}{q-p}\right]!$$

$$\left(\begin{array}{l} i\in\mathbb{Z}_+,\ 1\le J\le q-p,\\ |x'|<\varepsilon,\ \mathrm{Im}\,\sigma>2r^{-1}(1+|\xi'|)^{(q-p)/q}\end{array}\right)$$

を得る。従って，$v^{(i)}_{J} = \left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)^{[i/(q-p)]} v'^{(i)}_{(J)}$ は，

$$|x'|>\varepsilon,\quad \mathrm{Im}\,\sigma+\varepsilon|\sigma|>2r^{-1}(1+|\xi'|)^{(q-p)/q}$$

において，

$$\left|v^{(i)}_{(J)}(x';\sigma,\xi')\right| \le C\,r^{-i}\,\varepsilon^{-[i/(q-p)]}\,|\sigma|^{-[i/(q-p)]}\left[\frac{i}{q}\right]!$$

を満たす。そこで，最後に，

$$v^{(i)}(x;\xi)=\sum_{j=1}^{q-p}\xi_0^{j/q}\left[v_{(j)}^{(i)}(x;\sigma,\xi')\right]_{\sigma=\xi_0^{(q-p)/q}}$$

とすると，

$$\Omega=\{(x;\xi)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^{n+1};$$
$$|x|<\varepsilon,\ \frac{q\pi}{3(q-p)}<\arg\xi_0<\frac{2q\pi}{3(q-p)},$$
$$|\xi_0|>\left(\frac{2r^{-1}}{2^{-1}+\varepsilon}\right)^{q/(q-p)}(1+|\xi'|)\}.$$

において，

$$(36)\quad |v^{(i)}(x;\xi)|\leqq Cr^{-i}|\xi_0|^{-\frac{q-p}{q}\left[\frac{i}{q-p}\right]+\frac{q-p}{q}}\left[\frac{i}{q}\right]!$$

となり，$v^{(i)}$は$(14)_i$の真の解である。そして，$(16)_i$は$v^{(i)}$の非常にラフな漸近展開を与え，

$$(37)\quad |v^{(i)}(x;\xi)|\leqq \text{const.}\,|\xi_0|^{-(i+q-p)/q}\quad \text{on } \Omega$$

である．(36)によって，$V(x;D)\in(\mathcal{E}^R)_{x^*}$が，

$$\sigma(V)\sim\sum_i v^{(i)}$$

として定義され，$\sigma(V)$は(9)を満たす．更に，(37)から，

$$|\sigma(V)-v^{(0)}|\leqq \text{const.}\,|\xi_0|^{-(q-p+1)/q}$$

であり，$v^{(0)}=\xi_0^{-(q-p)/q}I_K$だから，$V(x;D)$の逆作用素は

簡単に作れる。

もう1度くり返すが，この節の議論は，広い意味での，0階の，~~分数階擬微分~~作用素しか使わなかった。

§4. 擬微分作用素の対角形行列

前節の議論によって，問題は対角行列 $x_0 I_K + B'(x';D)$ の研究に帰着した。この節で，この行列を，最終的な標準形 $x_0 I_K$ に帰着する。その際，無限階の正則超局所作用素を用いる。一般に，無限階作用素の扱いは複雑で，特に無限階作用素の行列を扱うことは多くの困難を含む。それにもかかわらず，われわれは対角行列を扱えばよいので，いろんな議論がうまく行なえるのである。この節の議論はふたつの段階にわかれる。

*　*　*　*　*

まず $B'(x';D)$ のシンボルは，$B_j(x';\xi)$ を ξ について j 次斉次な函数として，

$$\sigma(B') = \sum_{-p/q \geq j \geq -1} B_j(x';\xi) \qquad \text{(対角行列)}$$

という形に書かれていたことを注意しておく。さて，対角行列 $X(x';D_0)$ を，

$$\sigma(X) = \exp(\chi(x';\xi_0))$$

によって定義する。但し，$\mathcal{X}(x';\xi_0)$は次の形とする：

$$\mathcal{X}(x';\xi_0)=\sum_{j=1/q,2/q,\cdots,(q-p)/q}\mathcal{X}_j(x')\xi_0^{\,j}+\mathcal{X}_0(x')\log\xi_0$$

$\mathcal{X}_j(x')$ ： $|x'|<\varepsilon$で正則な対角行列

このとき，

$$(38)\qquad \sigma(X^{-1})=\exp\left(-\mathcal{X}(x';\xi_0)\right)$$

となる。$H\in\mathcal{E}^R$に対し，$\sigma(H)$はHの主シンボルではなく，完全シンボルを表わしている。(38)が正しいのは，

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\sigma(X)=0,\quad \frac{\partial}{\partial\xi_j}\sigma(X)=0,\quad 1\leq j\leq n$$

であってしかも$\sigma(X)$は対角行列だからである。

ここで，

$$(39)\qquad \sigma(X^{-1}B'X)(x';\xi)$$

$$\sim\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{|\delta|=i}\frac{1}{\delta!}\partial_{\xi'}^{\delta}\sigma(X^{-1}B')(x';\xi)\partial_{x'}^{\delta}\sigma(X)(x';\xi_0)$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{|\delta|=i}\frac{1}{\delta!}\Big\{\partial_{\xi'}^{\delta}\sigma(B')(x';\xi)\times$$

$$\times\,\partial_{x'}^{\delta}\exp\left(\mathcal{X}(x';\xi_0)\right)\exp\left(-\mathcal{X}(x';\xi_0)\right)\Big\}$$

となるが，無限階作用素を扱うとき，漸近展開を示す無限和に対して，しばしば和の順序を適当に交換してやる必要がある。ここでもそういう必要があり，そのために補題をひとつ用意しておく。

補題5. $\delta \in \mathbb{Z}_+^n$ と $j \in \mathbb{Z}_+$ が $0 \leq j \leq |\delta|$ を満たすとき，$\varepsilon > 0$ を十分小さくとれば，

$$\{ |x'| < \varepsilon , \ |\xi_0| > 1/\varepsilon \}$$

で正則な函数 $C_{\delta j}(x'; \xi_0)$ が存在して，

$$\partial_{x'}^{\delta} \exp(\mathscr{X}(x; \xi_0)) = \sum_{j=0}^{|\delta|} C_{\delta j}(x'; \xi_0) \exp(\mathscr{X}(x; \xi_0)) \tag{40}$$

を満たす。更に，$\exists C$, $\exists r > 0$ が存在して，

$$\left| \partial_{x'}^{\Delta} C_{\delta j}(x'; \xi_0) \right| \leq C\, r^{-|\Delta| - 2|\delta|} |\xi_0|^{\frac{g-p}{g}(|\delta| - j)} (|\Delta| + j)! \tag{41}$$

$$\left(\begin{array}{l} \delta, \Delta \in \mathbb{Z}_+^n , \quad j \in \mathbb{Z}_+, \quad 0 \leq j \leq |\delta| \\ |x'| < \varepsilon , \ |\xi_0| > 1/\varepsilon \end{array} \right)$$

が成立する。また，$j = 0$ のときは，

$$C_{\delta 0}(x', \xi_0) = (\partial_{x_1} \mathscr{X})^{\delta_1} (\partial_{x_2} \mathscr{X})^{\delta_2} \cdots (\partial_{x_n} \mathscr{X})^{\delta_n} \tag{42}$$

とできる。

証明　$\delta = 0$ なら自明（$C_{00} = 1$）。$\delta > 0$ とし，$\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ が $\alpha < \delta$ なら，上のような $C_{\alpha j}$, $0 \leq j \leq |\alpha|$ が構成できたとする。$\delta_n \neq 0$ としてよいので，特に α を

$$\alpha_j = \delta_j , \quad 1 \leq j \leq n-1$$
$$\alpha_n = \delta_n - 1$$

のように選ぶ。このとき，

$$\partial_{x'}^{\delta} e^{\mathfrak{X}(x';\xi_0)}$$
$$= \partial_{x_n} \partial_{x'}^{\alpha} e^{\mathfrak{X}(x';\xi_0)}$$
$$= \partial_{x_n} \left\{ \sum_{j=0}^{|\delta|-1} C_{\alpha j}(x';\xi_0) e^{\mathfrak{X}(x';\xi_0)} \right\}$$
$$= \sum_{j=0}^{|\delta|-1} \left\{ \partial_{x_n} C_{\alpha j}(x';\xi_0) + C_{\alpha j}(x';\xi_0) \partial_{x_n} \mathfrak{X}(x';\xi_0) \right\} \times$$
$$\times e^{\mathfrak{X}(x';\xi_0)}$$

そこで，$C_{\delta j}(x';\xi_0)$を，

$$\begin{cases} C_{\delta,0} = C_{\alpha,0}\, \partial_{x_n} \mathfrak{X} \\ C_{\delta,j} = \partial_{x_n} C_{\alpha,j-1} + C_{\alpha,j}\, \partial_{x_n} \mathfrak{X} & 1 \leq j \leq |\delta|-1 \\ C_{\delta,|\delta|} = \partial_{x_n} C_{\alpha,|\delta|-1} \end{cases}$$

によって定義する。(41)はたやすく導かれる。 Q.E.D.

従って，$0 \leq j \leq |\delta|$に対し，

$$X_{\delta j}(x';\xi) = \frac{1}{\delta!} \partial_{\xi'}^{\delta} \sigma(B')(x';\xi)\, C_{\delta j}(x';\xi_0)$$

とすれば，(39)と(40)から

(42) $$\sigma(X^{-1}B'X)(x';\xi) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{|\delta|=i} \sum_{j=0}^{|\delta|} X_{\delta j}(x';\xi) \right)$$

となる。ところで，(41)から，

(43) $$|X_{\delta j}(x';\xi)| \leq C\, r^{-2|\delta|} |\xi_0|^{-\frac{p}{q}-|\delta|+\frac{q-p}{q}(|\delta|-j)}\, j!$$

である。さて，$i \in \mathbb{Z}_+$に対して，$\Phi_i(x';\xi)$と$\Psi_i(x';\xi)$を，次のように定義する：

$$\Phi_i(x';\xi) = \sum_{|\delta|=i} \sum_{j=0}^{|\delta|} X_{\delta j}(x',\xi)$$

$$\Psi_i(x';\xi) = \sum_{|\delta|\geqq i} X_{\delta i}(x';\xi)$$

このとき，(42)から，

$$\sigma^{-1}(X^{-1}B'X) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i$$

であり，(43)から，$^\exists C_1$，$^\exists r_1 > 0$ があって，

$$|\Phi_i(x';\xi)| \leqq C_1 r_1^{-i} |\xi_0|^{-\frac{p}{q}-i} i! \exp(|\xi_0|^{\frac{q-p}{q}})$$

$$(44) \qquad |\Psi_i(x';\xi)| \leqq C_1 r_1^{-i} |\xi_0|^{-\frac{p}{q}-i} i!$$

となる。ところが，再び(43)から，$^\exists C_1$，$^\exists r_1 > 0$ があって，

$$\left|\sum_{i=0}^{I} \Phi_i - \sum_{i=0}^{I} \Psi_i\right|$$

$$= \sum_{|\delta|\geqq I\geqq j} |X_{\delta j}|$$

$$\leqq C_1 r_1^{-I} |\xi_0|^{-\frac{p}{q}-I} I! \exp(|\xi_0|^{\frac{q-p}{q}}).$$

すなわち，

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i \sim \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i$$

である。ところで，(44)から，$\sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i(x';\xi)$ は，広い意味の，$-p/q$ 階の，~~分数階擬微分~~作用素のシンボルを与えていることになる（X，X^{-1} は無限階作用素であるにもかかわらず）。

以上のことから，

(45) $\sigma\left(X^{-1}\{x_0 I_k + B'\}X\right)(x;\xi)$

$$\equiv x_0 I_k - \frac{\partial}{\partial \xi_0}\mathscr{X}(x;\xi_0) + \Phi_0(x;\xi) \quad \left(\bmod\, O(|\xi_0|^{-\frac{p}{q}-1})\right)$$

ここで，

$$\tilde{\mathscr{X}}(x';\xi_0) = \mathscr{X}(x';\xi_0) - \mathscr{X}_0(x')\log\xi_0$$

とすると，(44)から，

$$X_{\delta 0} \equiv \frac{1}{\delta!}(\partial_{x_1}\tilde{\mathscr{X}})^{\delta_1}\cdots(\partial_{x_n}\tilde{\mathscr{X}})^{\delta_n}\partial_{\xi'}^{\delta}\sigma(B') \quad \left(\bmod\, O(|\xi_0|^{-\frac{1}{2q}-1})\right)$$

となる。従って，$\Phi_0(x';\xi)$は，

$$\Phi_0(x';\xi) \equiv \sum_{j=-p/q,\,-(p+1)/q,\,\cdots,\,-1} \Phi_0^{(j)}(x',\xi) \left(\bmod\, O(|\xi_0|^{-\frac{1}{2q}-1})\right)$$

となる。但し，$\Phi_0^{(j)}(x';\xi)$はξについてj次斉次な函数で，

$$\mathscr{X}_{(q-p)/q}(x'),\ \cdots,\ \mathscr{X}_{j+1/q}(x')$$

から合成して得られる。そこで，$\mathscr{X}_j(x')$，$j=(q-p)/q,\cdots,0$ を，

$$\mathscr{X}_j(x') = \frac{1}{j}\left[\Phi_0^{(j-1)}(x',\xi)\right]_{\xi_0=1,\,\xi'=0} \quad (q-p)/q \geq j \geq 1/q$$

$$\mathscr{X}_0(x') = \left[\Phi_0^{(-1)}(x';\xi)\right]_{\xi_0=1,\,\xi'=0}$$

と定義すれば，(45)式の右辺は，

$$\sum_{j=-p/q,\,-(p+1)/q,\,\cdots,\,-1} B''_j(x;\xi)$$

と書ける。但し，$B''_j(x';\xi)$ は，ξ について j 次斉次で，

$$\left[B''_j(x',\xi)\right]_{\xi_0=1,\ \xi'=0} = 0 \qquad -p/q \geq j \geq -1$$

を満たす．従って，

$$\left|B''_j(x';\xi)\right| \leq \text{const.}\ |\xi_0|^{j-1}|\xi'| \qquad -p/q \geq j \geq -1$$

となる。結局，$^\exists C>0$ が存在して，

$$\left|\sigma\left(X^{-1}\{x_0 I_k + B'\}X\right)(x';\xi)\right| \leq C|\xi_0|^{-1-\frac{1}{2q}}(1+|\xi'|)$$

となる。以上のことをまとめておこう。

命題3.

$$X^{-1}(x',D_0)\{x_0 I_k + B'(x';D)\}X(x';D_0)$$

$$= x_0 I_K + B''(x';D)$$

ここで，$B''(x',D)$ は正則超局所作用素の $K\times K$ 行列で，$\varepsilon>$ >0 は十分小さいとして，$^\exists a, {}^\exists R>0$ が存在して，

$$(46)\quad \left|\partial_{\xi'}^{\Delta}\sigma(B'')(x';\xi)\right| \leq aR^{-|\Delta|}|\xi_0|^{-1-\frac{1}{2q}-|\Delta|}(1+|\xi'|)\cdot\Delta!$$

$$\left(\Delta\in\mathbb{Z}_+^n,\ (x';\xi)\in\Gamma_\varepsilon\right)$$

が成立する。

注　以下の議論では，$B''(x';D)$は(46)を満たせば，対角行列でなくてもよい。

＊　＊　＊　＊　＊

いよいよ，

$$\{x_0 I_k + B''(x';D)\} Z(x';D) = Z(x';D) x_0 I_k$$

を満たす$Z(x',D)$を構成する。$i \in \mathbb{Z}_+$に対して，$Z^{(i)}(x';\xi)$を，

$$Z^{(0)}(x';\xi) = I_k$$

$$Z^{(i)}(x';\xi) = \sum_{\substack{i'+|\delta|+1=i \\ (i' \in \mathbb{Z}_+,\ \mathbb{Z}_+^n)}} \frac{1}{\delta!}\int_{\infty}^{\xi_0} \partial_{\xi'}^{\delta}\sigma(B'')(x';\xi)\partial_{x'}^{\delta} Z^{(i')}(x';\xi)d\xi_0$$

$$i \geqq 1$$

によって定義する。

命題4.　$\varepsilon > 0$は十分小さいとする。$\exists C, \exists r > 0$が存在して，

$$(47)_i \quad |\partial_{x'}^{\Delta} Z^{(i)}(x';\xi)|$$

$$\leqq C \sum_{j=0}^{i} \frac{|\xi_0|^{-j/2q}(1+|\xi'|)^{j}}{j!} |\xi_0|^{-i+j}(i-j+|\Delta|)!\, r^{-2i-|\Delta|}$$

$$(i \in \mathbb{Z}_+,\ \Delta \in \mathbb{Z}_+^n,\ (x',\xi) \in \Gamma_\varepsilon)$$

証明　$i=0$で自明．$i \geqq 1$として，$i'=0,\cdots,i-1$に対して$(47)_{i'}$が正しいとする．$(x',\xi) \in \Gamma_\varepsilon$に対し，$\tilde{\xi}_0 \in$大$\xi_0$,

$1 \leq t \leq \infty$，とすれば，$(x', \tilde{\xi}_0, \xi') \in \Gamma_\varepsilon$である。従って，(46)と(47)$_{i'}$，$0 \leq i' \leq i-1$，から，

$$
\begin{aligned}
&\left| Z^{(i')}(x', \xi) \right| \\
&\leq \sum_{i'+|\delta|+1=i} \frac{1}{\delta!} \left| \int_\infty^{\xi_0} \partial_{\xi'}^{\delta} \sigma(B'')(x', \tilde{\xi}_0, \xi') \partial_{x'}^{\delta} Z^{(i')}(x', \tilde{\xi}_0, \xi') \, d\tilde{\xi}_0 \right| \\
&\leq \sum_{i'+|\delta|+1=i} \left| \int_{|\xi_0|}^{\infty} a R^{-|\delta|} |\tilde{\xi}_0|^{-\frac{1}{2q}-1-|\delta|} (1+|\xi'|) \times \right. \\
&\qquad \times C \sum_{j=0}^{i'} \frac{|\tilde{\xi}_0|^{-\frac{j}{2q}} (1+|\xi'|)^j}{j!} |\tilde{\xi}_0|^{-i'+j} (i'-j+|\delta|)! \, r^{-2i'-|\delta|} d|\tilde{\xi}_0| \\
&\leq aC \sum_{i'+|\delta|+1=i} \sum_{j=0}^{i'} R^{-|\delta|} r^{-2i'-|\delta|} (i'-j+|\delta|)! \, |\xi_0|^{-|\delta|-i'+j} (1+|\xi'|)^{j+1} \times \\
&\qquad \times \frac{1}{j!} \int_{|\xi_0|}^{\infty} |\tilde{\xi}_0|^{-\frac{1}{2q}(j+1)-1} d|\tilde{\xi}_0| \\
&\leq 2qaC \sum_{i'+|\delta|+1=i} \left(\frac{r}{R}\right)^{|\delta|} r^{-2i+2} \times \\
&\qquad \times \sum_{j=0}^{i-1} \frac{|\xi_0|^{-\frac{1}{2q}(j+1)} (1+|\xi'|)^{j+1}}{(j+1)!} |\xi_0|^{-i+j+1} (i-j-1)! \\
&\leq C \sum_{j=0}^{i} \frac{|\xi_0|^{-j/2q} (1+|\xi'|)^j}{j!} |\xi_0|^{-i+j} (i-j)! \, r^{-2i}
\end{aligned}
$$

従って，$\Delta = 0$ のとき(47)$_i$が示された。$\Delta > 0$でも同様である。 Q.E.D.

従って，$^\exists C_1$, $^\exists r_1 > 0$が存在して，

(48) $$\left|Z^{(i)}(x';\xi)\right| \le C_1 r_1^{-i} |\xi_0|^{-i}\, i!\, \exp\left(r_1^{-1}|\xi_0|^{1-\frac{1}{m}}\right)$$

となる。$\sigma(Z)(x';\xi) \sim \sum_{i=0}^{\infty} Z^{(i)}(x';\xi)$ によって $Z(x';D)$ を定義すれば,

$$\{x_0 I_K + B''(x';D)\}Z(x';D) = Z(x';D)x_0 I_K$$

となる。

$Z(x';D)$の可逆性を示そう。$\hat{Z}^{(i)}(x';\xi)$, $i \in \mathbb{Z}_+$ を,

$$\hat{Z}^{(0)}(x';\xi) = I_K$$

$$\hat{Z}^{(i)}(x';\xi) = -\sum_{i'+|\delta|+1=i} \frac{1}{\delta!}\int_{\infty}^{\xi_0} \partial_{\xi'}^{\delta}\hat{Z}^{(i')}(x';\xi)\,\partial_{x'}^{\delta}\sigma(B'')(x';\xi)\,d\xi_0$$

$$i \geq 1$$

によって定義する。先と同様に, $\exists C_1$, $\exists r_1 > 0$ が存在して,

(49) $$\left|\hat{Z}^{(i)}(x';\xi')\right| \le C_1 r_1^{-i} |\xi_0|^{-i}\, i!\, \exp\left(r_1^{-1}|\xi_0|^{1-\frac{1}{m}}\right)$$

となる。$\sigma(\hat{Z})(x';\xi) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \hat{Z}^{(i)}(x';\xi)$ によって $\hat{Z}(x';D)$ を定義すれば,

$$\hat{Z}(x';D)\{x_0 I_K + B''(x';D)\} = x_0 \hat{Z}(x';D).$$

となる。

ここで, $W(x';D) = Z(x';D)\hat{Z}(x';D)$ とすると,

$$\sigma(W) \sim \sum_{i=0}^{\infty} W^{(i)}(x';\xi)$$

となる。但し，

$$W^{(i)}(x',\xi)=\sum_{j+k+|\delta|=i}\frac{1}{\delta!}\partial_{\xi'}^{\delta}Z^{(j)}(x';\xi)\partial_{x'}^{\delta}\tilde{Z}^{(k)}(x';\xi)$$

とする。このとき，

$$(50)\quad \begin{cases} W^{(0)}=I_K \\ \dfrac{\partial}{\partial\xi_0}W^{(i)}=\displaystyle\sum_{i'+|\delta|+1=i}\frac{1}{\delta!}\left\{\partial_{\xi'}^{\delta}\sigma(B'')\partial_{x'}^{\delta}W^{(i')}-\partial_{\xi'}^{\delta}W^{(i')}\partial_{x'}^{\delta}\sigma(B'')\right\} \end{cases}$$

となることが証明できる。さて，$W^{(i)}=0$; $i\geqq 1$ を示そう。$i\geqq 1$ とし，$W^{(1)}=\cdots=W^{(i-1)}=0$ だとすると，(50) から，

$$(51)\quad \frac{\partial}{\partial\xi_0}W^{(i)}=0.$$

ところが，(48), (49) から，

$$(52)\quad |W^{(i)}|\leqq \text{const.}\,|\xi_0|^{-\frac{i}{2q}}(1+|\xi|)^{i}.$$

従って，(51), (52) から $W^{(i)}=0$ となる。つまり，$W(x',D)=I_K$ となる。同様に，$\tilde{Z}(x';D)Z(x';D)=I_K$ となるので，$Z(x';D)$ は可逆である。

以上で，定理2の証明は完結した。

§5、定理1の証明

定理1は定理2からたやすく導かれる。u，$f\in\mathcal{E}_{x}^{*}$ に

対して，

$$\vec{u} = W^{-1}(x, D)\begin{pmatrix} u \\ D_0^{1/2} x_0 u \\ \vdots \\ D_0^{(k-1)/2} x_0^{k-1} u \end{pmatrix}$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ D_0^{(k-1)/2} f \end{pmatrix}$$

として，方程式 $Pu = f$ は $(x_0 I_k + A(x; D))\vec{u} = \vec{f}$ と書き直せる。定理2によって，これは $x_0 E(x; D)\vec{u} = E(x;D)\vec{f}$ を解けばよいが，

$$\mathrm{Ker}_{\oplus \mathcal{C}_{\xi^*}}(x_0 I_k) = \bigoplus_k (\mathcal{B}_N)_0$$

ところが，

$$E^{-1}(x; D) : \mathrm{Ker}_{\oplus \mathcal{C}_{\xi^*}}(x_0 I_k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}_{\oplus \mathcal{C}_{\xi^*}}(x_0 I_k + A(x; D))$$

さて，$\vec{v} = W(x; D)\vec{u}$ として，

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ker}_{\oplus \mathcal{C}_{\xi^*}}(x_0 I_k + A(x; D)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Ker}_{\mathcal{C}_{\xi^*}} P(x; D) \\ \Psi & & \Psi \\ \vec{u} & \longmapsto & v_1 \end{array}$$

但し，v_1 は $\vec{v}$ の第1成分である。

従って,

$$\mathrm{Ker}_{\mathcal{E}_{\xi^*}} P(x', D) \simeq \bigoplus_{K} (\mathcal{B}_N)。$$

一方, $\mathrm{Cok}_{\oplus \mathcal{E}_{\xi^*}}(x_{\circ} I_K) = 0$ なので, $\mathrm{Cok}_{\mathcal{E}_{\xi^*}} P = 0$.

あと書き

以上で本稿を終わります。途中の計算は煩雑に見えますが Turrittin の古典理論を用いた自然な方法です。

短期共同研究に呼んでくださった河合隆裕先生にはいろいろお世話になりました。また小松彦三郎先生は, 1981年9月～10月に, 筆者のためにプライベートセミナーを企画してくださいましたが, 同じ内容のことをそのとき発表しました。これらふたつの講演を聞いてくださった方々に心からお礼を申しあげます。

参考文献

[1] 青木貴史: Growth order of microdifferential operators of infinite order (J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 29, 143-159, 1982).

[2] 青木貴史: Invertibility for microdifferential

operators of infinite order (to appear in Publ. RIMS).

[3] 青木貴史：An invariant measuring the irregularity of a differential operator and a microdifferential operator (to appear in J. Math. Pures Appl.).

[4] 柏原正樹：Systèmes d'équations microdifférentielles (Univ. Paris-Nord における 1976－1977 の講義)、

[5] 柏原正樹－大島利雄：Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems (Ann. of Math. 106, 145-200, 1977)、

[6] 片岡清臣：On the theory of Radon transformations of hyperfunctions (J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA, 28, 331-413, 1981).

[7] 佐藤幹夫－河合隆裕－柏原正樹：Microfunctions and pseudo-differential equations (Lect. Notes in Math. 287, 265-529, Springer, 1973).

[8] H. L. Turrittin: Convergent solutions of ordinary linear differential equations in a neighborhood of an irregular singular point (Acta Math. 93, 28-66, 1955).

[9] 打越敬祐: Microlocal analysis of partial differential equations with irregular singularities (to appear).

目次