

代数的 \mathcal{F} -積分存在のための必要条件

東大理 天文

吉田春夫

Yoshida Haruo

問題：与えられた力学系の方程式が完全積分可能であるか否か，すなわち十分な数の独立な 1 価の \mathcal{F} -積分を有するか否かを出来るだけ統一的な有限の手続きで判定し，積分可能ならば実際に一般解を求める手続きも与え，積分不可能ならばそれが何故であるかを答えること

についての解答は今日、有限自由度（常微分方程式系）、無限自由度（偏微分方程式系）いずれの場合においても得られておらず、解答可能であるという保証もない。有限自由度の Hamilton 系に限れば前世紀末から今世紀を通じて、与えられた積分可能系に「十分近い」系の積分可能性は比較的十分に研究された。（Poincaré, Birkhoff, Whittaker, Siegel, Arnold）しかしこれらの研究においては摂動論的手法、すなわち微小パラメータ μ による展開によっているため、ある与えられた $\mu = \mu_0$ についての情報は何も与えないのが普通である。

本稿では右辺が有理式からなり、ある種の相似不変性をもつ有限自由度の力学系が十分な数の代数的第一積分を持ったための必要条件を与える (§6)。そして 1 つの最も重要な例として古典的な三体問題が一般に代数的に積分可能でないことの証明を Bruns (1887) によるものとは全く独立に与える (§7)

§1. 相似不変系と解の特異点での展開

右辺が x_1, \dots, x_m の有理式からなる自励系

$$\frac{d}{dt} X_i = F_i(x_1, \dots, x_m) \quad i=1, \dots, m \quad (1.1)$$

を考える。今ある有理数の組 $\{g_1, \dots, g_m\}$ が存在して変換

$$t \rightarrow \alpha^{-1} t, \quad x_1 \rightarrow \alpha^{g_1} x_1, \dots, \quad x_m \rightarrow \alpha^{g_m} x_m \quad (1.2)$$

によつて (1.1) が不変、すなわち x_1, \dots, x_m, α についての恒等式系

$$F_i(\alpha^{g_1} x_1, \dots, \alpha^{g_m} x_m) = \alpha^{g_i+1} F_i(x_1, \dots, x_m) \quad (1.3) \\ (i=1, \dots, m)$$

が成り立つ時 (1.1) を 相似不変系 と呼ぶことにする。 (1.3) を α で微分 (2 $\alpha=1$ とおけば)

$$\sum_{j=1}^m g_j x_j \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_m) = (g_i+1) F_i(x_1, \dots, x_m) \quad (1.4)$$

を得るが (1.4) は $F_i(x)$ から $\{g_1, \dots, g_m\}$ を決定する線形方程式

と見なすことが出来る。よって函数行列式

$$\det_{1 \leq i, j \leq m} \left[X_j \frac{\partial F_i}{\partial X_j}(X_1, \dots, X_m) - \delta_{ij} F_i(X_1, \dots, X_m) \right] \quad (1.5)$$

が恒等的に 0 でなければ, 系 (1.1) に対し $\{g_1, \dots, g_m\}$ の選
 択は, もしその存在を仮定すれば一意である。(1.1) が線形
 の時 (1.2) なる相似変換は存在し得ないので, 本稿の意味での
 「相似不変系」は非線形な系に特有の概念であるといえる。

相似不変系は一般に C_1, \dots, C_m を定数とする

$$X_1 = C_1 t^{-g_1}, \quad \dots, \quad X_m = C_m t^{-g_m} \quad (1.6)$$

なる形の特殊解を有する。実際 (1.3) で $X_i = C_i, \alpha = t^{-1}$ とおい
 て得られる

$$F_i(C_1 t^{-g_1}, \dots, C_m t^{-g_m}) = t^{-g_i-1} F_i(C_1, \dots, C_m) \quad (1.7)$$

に注意すれば, C_1, \dots, C_m が連立代数方程式

$$F_i(C_1, \dots, C_m) = -g_i C_i \quad i=1, \dots, m \quad (1.8)$$

の 1 組の解であれば, (1.6) は (1.1) の解となる。(1.8) が解を持
 たない例外的な場合は以下の考察の対象とほしなない。また (1.8)
 の解は一般に複素数となるので, (1.6) なる特殊解は t の複素平
 面上で定義された複素解析函数とみることにする。

相似不変系 (1.1) の特殊解 (1.6) を 1 つ fix (2 変数 z_1, \dots, z_m を

$$X_i = (C_i + z_i) t^{-g_i} \quad i=1, \dots, m \quad (1.9)$$

と定義する。この時 (1.6) が (1.1) の解であることに注意すれば

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (z_i t^{-g_i}) &= F_i[(C_1 + z_1) t^{-g_1}, \dots, (C_m + z_m) t^{-g_m}] - F_i[C_1 t^{-g_1}, \dots, C_m t^{-g_m}] \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_i}{\partial x_j} (C_1 t^{-g_1}, \dots, C_m t^{-g_m}) z_j t^{-g_j} \\ &\quad + \sum_{j,k} \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j \partial x_k} (C_1 t^{-g_1}, \dots, C_m t^{-g_m}) z_j z_k t^{-g_j - g_k} \\ &\quad + O(z^3) \end{aligned} \quad (1.10)$$

を得るが (1.3) を x_j 達で偏微分して $x_i = C_i$, $\alpha = t^{-1}$ とおいて得られる

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} (C_1 t^{-g_1}, \dots, C_m t^{-g_m}) = t^{-g_i + g_j - 1} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} (C_1, \dots, C_m) \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j \partial x_k} (C_1 t^{-g_1}, \dots, C_m t^{-g_m}) = t^{-g_i + g_j + g_k - 1} \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j \partial x_k} (C_1, \dots, C_m) \quad (1.12)$$

に注意すれば (1.10) は

$$t \frac{dz_i}{dt} = \sum_{j=1}^m K_{ij} z_j + \sum_{j,k} L_{ijk} z_j z_k + O(z^3) \quad (1.13)$$

但し

$$K_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} (C_1, \dots, C_m) + \delta_{ij} g_i, \quad (1.14)$$

$$L_{ijk} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j \partial x_k} (C_1, \dots, C_m), \quad \text{etc.} \quad (1.15)$$

と書きなおす。 (1.13) の右辺には t が現れない。 $m \times m$

の複素定数行列 $K = (K_{ij})$ の固有値 $\rho_1, \dots, \rho_m \in \underline{\text{Kowalevski}}$ の exponent (あるいは単に exponent) と呼ぶことにし、その中で ρ_1, \dots, ρ_k まではその実部が正、 $\rho_{k+1}, \dots, \rho_m$ はその実部が 0 または負であるとする。この時、一般の (1.13) の形の非線形方程式に対し 2 次の結果が知られている。

定理 (Poincaré, Picard)

(i) $K = (K_{ij})$ は Jordan 標準形が対角行列である

(ii) ρ_1, \dots, ρ_k の間には $\{m_1, \dots, m_k\} \in$ 非負整数でかつ

$\sum_{j=1}^k m_j \geq 2$ を満たすとする時

$$\rho_i = \sum_{j=1}^k m_j \rho_j \quad i=1, \dots, k \quad (1.16)$$

なる有理的な関係は決して存在しない。

と仮定する。この時 (1.13) の $t=0$ の近傍で k 個の任意定数

$I_{\rho_1}, \dots, I_{\rho_k}$ を含む解

$$z_i = P_i(I_{\rho_1} t^{\rho_1}, \dots, I_{\rho_k} t^{\rho_k}) \quad i=1, \dots, m \quad (1.17)$$

が存在する。但し $P_i(u_1, \dots, u_k)$ は $P_i(0, \dots, 0) = 0$ で原点

の十分近傍で収束する Taylor 級数

$$P_i(u_1, \dots, u_k) = \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} a_{\alpha_1 \dots \alpha_k} u_1^{\alpha_1} \dots u_k^{\alpha_k} \quad (1.18)$$

を表現する。

end.

Remark

条件 (ii) は (1.17) の形の解を許すための十分条件であって、

必要条件ではないことに注意する。実際 (1.16) なる有理関係が複数個存在し、かつ (1.17) なる解を許す場合がある。(1.17) の形の解があるかどうかを見るためには、(1.18) の展開係数 a_{l_1, \dots, l_m} が順に矛盾なく、方程式 (1.13) から決定されるかどうかを見ればよい。展開係数が必ず矛盾なく定まるための十分条件が (i) と (ii) で与えた条件である。矛盾を生ずる時には (1.17) の代わりに $\log t$ を含む表式が必要となる (Siegel) がここでは立ち入らないことにする。 end.

我々の問題に戻ると相似不変系 (1.1) に対して、 k 個の任意定数 I_{p_1}, \dots, I_{p_k} を含む解 (特異点での展開)

$$X_i = t^{-g_i} \left\{ C_i + P_i(I_{p_1} t^{p_1}, \dots, I_{p_k} t^{p_k}) \right\} \quad k \leq n \quad (1.19)$$

が得られたことになる。

§ 2. 代数的ホー積分の reduction

相似不変系 (1.1) が t を陽に含まない多項式からなるホー積分

$$\Phi(x_1, \dots, x_m) = \text{const.} \quad (2.1)$$

を有したとする。(1.1) は変換 (1.2) によつて不変であるから、(2.1) の Φ に (1.2) なる変換を施した表式

$$\Phi' = \Phi(\alpha^{g_1} x_1, \dots, \alpha^{g_m} x_m) = \text{const.} \quad (2.2)$$

は再び (1.1) のホー積分となるはずである。今、一般に、

t, x_1, \dots, x_m の函数 (多項式, 有理式) $\phi = \phi(t, x_1, \dots, x_m)$ が
変換 (1.2) で α^M 倍される, すなわち

$$\phi(\alpha^{-1}t, \alpha^{g_1}x_1, \dots, \alpha^{g_m}x_m) = \alpha^M \phi(t, x_1, \dots, x_m) \quad (2.3)$$

なる α, x_1, \dots, x_m についての恒等式が成り立つ時, ϕ は 重みつき同次函数 (多項式, 有理式), $M \in \mathbb{Z}$ の 重みつき次数 と呼ぶことができる。積分 (2.2) は重みつき同次の項式の有限項の和

$$\Phi' = \sum_m \alpha^m \Phi_m(x_1, \dots, x_m) = \text{const} \quad (2.4)$$

に書く。但し Φ_m の重みつき次数は m とする。変換 (1.2) で α は任意であるから, (2.4) は任意の α で成立しなければならぬ。よって (2.4) の各 Φ_m それ自身が α -積分なるべきことが結論される。同じ結論は Φ が整関数, すなわち収束半径が無限大の Taylor 級数

$$\Phi = \sum_{l_1, \dots, l_m} A_{l_1, \dots, l_m} x_1^{l_1} \dots x_m^{l_m} = \text{const}. \quad (2.5)$$

で与えられている場合にもなされる。

一般に $\Phi(x_1, \dots, x_m)$ が x_1, \dots, x_m の代数函数である α -積分 (代数的 α -積分), すなわち

$$\Phi(x_1, \dots, x_m) = \text{const} = a \quad (2.6)$$

が有理化される

$$a^l + \phi_1(x_1, \dots, x_m) a^{l-1} + \dots + \phi_l(x_1, \dots, x_m) = 0 \quad (2.7)$$

但し $\phi_k (k=1, \dots, l)$ は x_1, \dots, x_m の有理式

と書ける時, (1.1) の右辺が x_1, \dots, x_m の有理式という仮定から,

(2.7) の右辺自身がヤ-積分なることが結論される。そして (1.1) の相似変換 (1.2) に対する不変性より、多項式積分 (2.1) の場合と同じ様な論理で、これらの有理式積分は重みつき同次の項式の商からなるヤ-積分

$$\Phi_m(x_1, \dots, x_m) / \Psi_m(x_1, \dots, x_m) = \text{const.} \quad (2.8)$$

から四則算法によつて合成されることが証明できる (Forsyth, Whittaker)。つまり右辺が有理式からなる相似不変系に対する代数的ヤ-積分の存在を議論するには、重みつき同次有理式なるヤ-積分 (2.8) の存在のみを議論すればよい。

§ 3. Kowalewski の exponent に関する予備的な定理

本稿の主目的からはやや離れるが、予備的な定理を証明するために述べておく。§2 で相似不変系の任意の代数的ヤ-積分の存在は、重みつき同次有理式なるヤ-積分の存在に帰着されることを述べた。そのヤ-積分の重みつき次数は次の様に Kowalewski の exponent に反映する。

定理 1 (Yoshida)

相似不変系 (1.1) が $\Phi(x_1, \dots, x_m) = \text{const.}$ なる重みつき次数 M のヤ-積分を有したとす。この時 (1.8) の一組の解 $\{c_1, \dots, c_m\}$ に対し

$$\text{grad } \Phi(c_1, \dots, c_m) \stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(c_1, \dots, c_m), \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_m}(c_1, \dots, c_m) \right] \quad (3.1)$$

が有限確定かつ零ベクトルでなければ, $\rho = M$ は打てる
Kowalewski の exponent として現われる。

特に Hamiltonian が有理式と可る Hamilton 系

$$\frac{d}{dt} q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{d}{dt} p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i=1, \dots, l \quad (2l=n) \quad (3.2)$$

が $t \rightarrow \alpha^{-1}t$, $q_i \rightarrow \alpha^{g_i} q_i$, $p_i \rightarrow \alpha^{g_{i+l}} p_i$ で不変なる相似不変系である時, Hamiltonian 自身, 重みつき同次有理式とあると仮定してよいことが言える。(もしそうであれば系は decouple 可る。) その Hamiltonian の重みつき次数を h と可れば $g_i + g_{i+l} = h - 1 \quad (i=1, \dots, l)$ となっている。

定理 2 (Yoshida)

Hamiltonian の重みつき次数を h と可る相似不変系 (3.2) が $\Phi(q_1, \dots, q_l, p_1, \dots, p_l) = \text{const.}$ なる重みつき次数 M の第一積分を有し得ると可る。この時 (1.8) の一組の解 $\{c_1, \dots, c_m\}$ に対し $\text{grad} \Phi(c_1, \dots, c_m)$ が有限確定, かつ零ベクトルでなければ $\rho = h - 1 - M$ が打てる Kowalewski の exponent として現われる。(定理 1 より, $\rho = M$ 及び $\rho = h - 1 - M$ が pair で現われることはある。)

Remark

特に $\Phi = H$ (Hamiltonian 自身) と可ると, $\rho = h$ 及び

$\rho = -1$ が $\{C_1, \dots, C_{2l}\}$ の選択には無関係に exponent として現われることが結論される。実は $\rho = -1$ は可べりの相似不変系に共通して現われることが証明できる。

§ 4. 例題

$$H = \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2) + q_1^2 q_2 + \frac{\epsilon}{3} q_2^3 \quad \epsilon: 1.0 \times 10^{-9} \quad (4.1)$$

を Hamiltonian とする Hamilton 系 (3.2) は、相似変換

$$t \rightarrow \alpha^{-1} t, \quad q_1 \rightarrow \alpha^2 q_1, \quad p \rightarrow \alpha^3 p \quad (4.2)$$

で不変。特殊解 (1.6) は

$$q_1 = C_1 t^{-2}, \quad q_2 = C_2 t^{-2}, \quad p_1 = C_3 t^{-3}, \quad p_2 = C_4 t^{-3} \quad (4.3)$$

で C_1, C_2 は 2通りの選択

$$(i) C_1 = \pm \sqrt{9(2-\epsilon)}, \quad C_2 = -3 \quad (4.4)$$

$$(ii) C_1 = 0, \quad C_2 = -6/\epsilon \quad (4.5)$$

があり、 C_3, C_4 は $C_3 = -2C_1, C_4 = -2C_2$ で自動的に決められる。

(4.14)なる行列 $K = (K_{ij})$ の特性多項式は

$$\det [P I - K] = \begin{cases} (P+1)(P-6) \{ P^2 - 5P + 6(2-\epsilon) \} & \text{case (i)} \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} (P+1)(P-6) \{ P^2 - 5P + 6(1-2/\epsilon) \} & \text{case (ii)} \end{cases} \quad (4.7)$$

と (i), (ii) の場合計算される。

今、(ii) の形の特殊解について考えると $\epsilon < 2$ の時

$$P^2 - 5P + 6(1-2/\epsilon) = 0 \quad (4.8)$$

の 2根 P_1, P_2 の実部は共に正となる。よって P_1, P_2 が共に

無理数, もしくは虚数となる場合には $K=(K_{ij})$ は対角化可能 (= Jordan 標準形が対角行列) であり, P_1, P_2 , および $P_3=6$ の間に (4.16) なる有理関係は存在し得ない。よって (4.19) の展開

$$q_i = t^{-2} \{ C_i + P_i (I_{P_1} t^{P_1}, I_{P_2} t^{P_2}, I_6 t^6) \} \quad (4.9)$$

が可能である。今までの議論で $t \rightarrow (t-t_0)$ [t_0 : 任意定数] と置きかえても全く変更を要しないことから, (4.9) は一般解すなわち 4 つの任意定数を含む解の特異点での展開であると言える。

この系の Hamiltonian は重みつき次数 6 の重みつき同次多項式であるから, §3. 定理 2 の remark より $P=-1$ 及び $P=6$ が常に exponent に現われる。また μ が $x-t-\epsilon$ の特殊な値で次の H と独立な重みつき同次多項式積分が存在する:

$$\epsilon=1: \Phi = P_1 P_2 + \frac{1}{3} q_1^3 + q_1 q_2^2, \quad \text{重みつき次数} = 6$$

$$\epsilon=6: \Phi = 4P_1(P_1 q_2 - P_2 q_1) + 4q_1^2 q_2^2 + q_1^4, \quad \text{重みつき次数} = 8$$

$$\epsilon=16: \Phi = \frac{1}{4} P_1^4 + q_1^2 q_2 P_1^2 - \frac{1}{3} q_1^3 P_1 P_2 - \frac{1}{18} q_1^6 - \frac{1}{3} q_1^4 q_2^2, \quad \text{重みつき次数} = 12$$

これらの積分に対して $\text{grad} \Phi(C)$ を non-zero とする $\{C_1, C_2\}$ の選択 (i) (ii) [(4.4), (4.5)] に対して定理 2 より $P=M$, $P=6-M$ が Kowalewski の exponent に現われる。実際 (4.6), (4.7) から

$$\epsilon=1: \det(PI-K) = (P+1)^2(P-6)^2 \quad \text{case (iii)}$$

$$\epsilon=6: \det(PI-K) = (P+3)(P+1)(P-6)(P-8) \quad \text{case (i)}$$

$$\epsilon=16: \det(PI-K) = (P+7)(P+1)(P-6)(P-12) \quad \text{case (ii)}$$

なることが確かめられる。

§ 5. 完全積分可能な Hamilton 系

一般に必ずしも相似不変系とは限らない自励系 (4.1) が積分可能である、ということと定義するには若干の困難が伴う。 $(n-1)$ 個の独立な \mathcal{I} を含まない一価 (\equiv 無限多価でない) の第一積分が存在すれば積分可能であるといつてさしつかえない。
(十分条件) しかし Jacobi の最終乗式を許すような系や、一般の Hamilton 系の場合、積分可能といえども $(n-1)$ 個の独立な一価の積分が存在するような系は極めて稀である。(そのような系は完全縮退した系と呼ばれる。例: Kepler の二体問題, 等方調和振動子) 一般論はさておき, 自由度 Q の Hamilton 系に話を限るならば, 次の定義は最も多くの状況を cover している。 ($n=2Q$)

定義 自由度 Q の Hamilton 系 (自励) が積分可能

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 互いに包含系をなす Q 個の一価の \mathcal{I} を含まない独立な第一積分が存在する。

Liouville は Q 個の一価, 包含系積分 $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_Q (=H)$ の存在のもとに, さらに $(Q-1)$ 個の一般には多価 (無限多価) の第一積分が導かれることを次の様に示した。

今, 母函数 $S = S(q_1, \dots, q_Q, p_1^*, \dots, p_Q^*)$ によって正準変換

$(q, p) \rightarrow (q^*, p^*) \in$

$$P_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad q_i^* = \frac{\partial S}{\partial p_i^*} \quad i=1, \dots, l \quad (5.1)$$

によって定義し、新しい運動量 p_i^* 達が $P_i(q, p)$ 達に等しくなる様にする。その様な母函数 S は実際に存在し、次の様に求めらる。今

$$\Phi_i(q, p) = P_i^* \quad (5.2)$$

$\in P_i$ についての解 Π 表式 \in

$$P_i = P_i(q, p^*) \quad (5.3)$$

とすると、 Φ_i 達が包含系 \in なることから微分形式

$$\sum_{i=1}^l P_i(q, p^*) dq_i \quad (5.4)$$

は q の函数としての全微分 (closed 1-form) なることを示すことができる。そこで S として (5.4) の積分

$$S = \int \sum_{i=1}^l P_i(q, p^*) dq_i \quad (5.5)$$

\in とおけばよい。(山内: 一般力学) 正準変数 (q^*, p^*) で書いた Hamilton 方程式

$$\frac{d}{dt} q_i^* = \frac{\partial H^*}{\partial p_i^*}, \quad \frac{d}{dt} p_i^* = -\frac{\partial H^*}{\partial q_i^*} \quad (5.6)$$

の解は、変換 \in の T -Hamiltonian H^* が

$$H^*(q^*, p^*) = H(p(q^*, p^*), q(q^*, p^*)) = P_l^* \quad (5.7)$$

なることから

$$p_i^* = \text{const.} = \alpha_i \quad (i=1, \dots, l)$$

$$q_i^* = \text{const.} = \beta_i \quad (i=1, \dots, l-1) \quad q_l^* = t + \text{const.} = t + \beta_l \quad (5.8)$$

と書ける。つまり旧変数 (q, p) で書けば, l 個の積分

$$\Phi_i(q, p) = \text{const.} = \alpha_i \quad (i=1, \dots, l) \quad (5.9)$$

に加え $2(l-1)$ 個の \mathbb{R} に独立な Ψ -積分

$$q_i^* = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \int \sum_{k=1}^l \frac{\partial P_k(q, d)}{\partial \alpha_i} dq_k = \text{const.} = \beta_i \quad (i=1, \dots, l-1) \quad (5.10)$$

が導かれたこととなる。この $\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \text{const.}$ なる Ψ -積分は一般には (q, p) の函数として無限多価となる。

今、特に相似不変な Hamilton 系が $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_l (=H)$ なる重みつき同次有理式からなる Ψ -積分を有したとある。(5.9) の分母を払った

$$\Psi_i(q, p) = 0 \quad i=1, \dots, l$$

は、 $2l$ 次元の複素 phase space 内の l 次元の代数的様体を定める。そして (5.10) は (5.9) の各 d_k で微分して得られる

$$\frac{\partial P_k(q, d)}{\partial \alpha_i} = (-1)^{k+i} \frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_{i-1}, \Phi_{i+1}, \dots, \Phi_l)}{\partial(P_1, \dots, P_{k-1}, P_{k+1}, \dots, P_l)} \bigg/ \frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_l)}{\partial(P_1, \dots, P_l)}$$

に注意すれば, integrand が (q, p) の有理式からなる closed 1-form の積分となる。この様な積分は今日、特に Picard 積分と呼ばれ、代数曲線上で定義される Abel 積分の自然な一般化となっている。そして特に (5.10) の積分の始点を各 q_k について 0 または ∞ とすれば, $\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \text{const.}$ は再び q, p の重みつき同次函数となり, Φ_i の重みつき次数を m_i とすれば ($m_l = h$ とする),

$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$ は $h-1-m_i$ とその重みつき次数として持つことがわかる。

§6 代数的ホーミ積分存在のための必要条件

一般性を失うことなく、§4の例題の系について主張を述べる。主張することは Hamiltonian (4.1) と独立なホーミ積分の存在と、無理数 or 虚数の Kowalewski の exponent の存在は矛盾する、すなわち

主定理

$H = \text{const.}$ と独立な $\Phi = \text{const.}$ なる代数的ホーミ積分が存在するためには、可能な Kowalewski の exponent はすべて有理数でなければならない。

(証明の outline)

§5で述べたことから $\Phi(q, p) = \text{const.}$ なる重みつき同次有理式のホーミ積分が存在したとすると

$$\Phi(q, p) = \alpha_1, \quad H(q, p) = \alpha_2 \quad (6.1)$$

で決められる 2次元代数的様体 (代数曲面) 上の Picard 積分で与えられるホーミ積分

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \int_{(q_1, q_2)} \frac{p_2 dq_1 - p_1 dq_2}{\frac{\partial(\Phi, H)}{\partial(p_1, p_2)}} = \text{const.} = \beta_1 \quad (6.2)$$

を得る。ここで $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ は独立に与えることの出来る3つの

任意定数である。重の重みつき次数（必然的に整数となる）を m とすれば、 H の重みつき次数が 6 なることから、 $\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}$ は $5-m$ （整数）を重みつき次数としてもつ。一方、この Hamilton 系は、 p_1, p_2 がともに無理数 or 虚数とした時、(4.9) なる解の展開表式 $H \in$ 持つ。この p_i の展開式は q_i を t で微分する。）(4.9) を $I_{p_i} t^{p_i}$ ($i=1, 2, 3$) について逆にとけば（Taylor 級数の反転） $I_{p_i} t^{p_i}$ は q, p, t の函数として重みつき次数が 0 の同次式となる。よって $I_{p_i} \in q, p, t$ の函数として見たとき、 I_{p_i} は p_i をその重みつき次数として持つ。

Hamilton 系 (4.1) に打する 3 つの任意定数の組 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ と I_{p_1}, I_{p_2}, I_6 の間には函数関係があるはずである。実際、 H, Φ , 及び $\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}$ に解の展開表式 (4.9) を代入した時、サ一積分なることから t を含み得ず、 I_{p_1}, I_{p_2}, I_6 のみの函数となるべきである。特に H, Φ は q, p の有理式であるから、簡単な考察から、(4.9) を代入した時、 I_{p_1}, I_{p_2}, I_6 の有理式なるべきことが言える。

今、 p_1, p_2 は共に無理数 or 虚数とすると、重みつき次数を比較することによって、 I_{p_1}, I_{p_2} は H, Φ の表式に寄与できるとしても、 $(I_{p_1} \cdot I_{p_2})$ なる積の形でのみしか寄与できないことが容易に言える。実は $\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}$ においても I_{p_1}, I_{p_2} はその積 $(I_{p_1} \cdot I_{p_2})$ でのみ寄与できないことが言える^(*)。よって $H, \Phi, \frac{\partial S}{\partial \alpha_1}$ は

2つの任意定数 I_6 及び (I_{P_1}, I_{P_2}) のみの函数となり、 H 、 Φ $\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}$ の独立性がくずれる。つまり $\Phi = \text{const.}$ の存在の仮定は誤りであることが結論される。

(*)の理由

P_1, P_2 は $\Phi(P, q) = \alpha_1$, $H(P, q) = \alpha_2$ の終結式を考へることによつて q_1, q_2 の代数函数となる。よつて $\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}$ の integrand を q_1, q_2 の函数として見た時その 0 or ∞ 近傍の展開において q の無理数 or 虚数べきを含みえない (特異点又は代数的特異点に限られる)。よつて $\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}$ の表式に I_{P_1}, I_{P_2} がその積以外で寄与できるとすれば、 q の無理数 or 虚数べきが $\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}$ の展開に現われるべきであることがわかるが、上に述べたことからその様なことはない。($\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}$ がオノ種の Picard 積分となり \log を必要とする場合も同じ。 \log の引数は重みつき次数が 0 とならなければならぬ。) よつて $\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}$ は I_6 、及び (I_{P_1}, I_{P_2}) の函数なることが言えた。

(*)の理由 end

以上の考察は $\text{Re}(P_1), \text{Re}(P_2)$ とともに正という仮定のもとになされた。今 $\text{Re}(P_2) \leq 0$ であり P_1 が正の無理数となる時を考へる。この時は(4.9)の代わりに

$$q_i = t^{-2} \{ C_i + P_i^* (I_{P_i} t^{P_i}, I_6 t^6) \} \quad (6.3)$$

となる。この様に I_6, I_{P_i} (及び t_0) と解の展開に含まれる任意定数の数が、一般解のそれに於いて一つ減少してゐるという

事は、一般解、すなわち $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ が全く任意独立となる解は (6.3) の様な解の展開を有しない事を意味している。つまり、 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ のうち1つに特殊な値を与えるか(例えば $\beta_1=0$) あるいは $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ の間に1つの函数関係があることになる。そこで展開 (6.3) を $H, \Phi, \frac{\partial \Sigma}{\partial \alpha_1}$ に代入すれば、先程と同じ議論で I_6 のみの函数となってしまう。つまり $H, \Phi, \frac{\partial \Sigma}{\partial \alpha_1}$ で1つのみが独立であることを意味する。よって $\rho_1 = \text{無理数}$ は H と独立な重の存在を否定する。

(証明の outline END)

Remark

ρ_1, ρ_2 が共に有理数となる場合でも、解の展開に $\log t$ が必要となる場合には H と独立な重 $= \text{const.}$ の存在が否定される事が予想される。現に、現存する(≡筆者が知っている)すべての積分可能系について、解の特異点での展開は、高々7の puiseux 級数 となっている。しかし $\log t$ が現れる場合、同様に導入される I_{ρ_1}, I_{ρ_2} の一方は重みつき次数が定義できなくなるので、別のより一般的な考察が必要であろうと思われる。

§7 古典的な三体問題

古典的な3質量(質量を m_1, m_2, m_3 とする)のニュートンの万

有引力による運動は Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{m_i} - \frac{m_1 m_2}{|q_1 - q_2|} - \frac{m_2 m_3}{|q_2 - q_3|} - \frac{m_3 m_1}{|q_3 - q_1|} \quad (7.1)$$

と与えられる。簡単のため運動は - 平面内で起るとし、補助変数 S_{12}, S_{23}, S_{31} と

$$S_{ij} = 1/|q_i - q_j| \quad (7.2)$$

で定義すれば、運動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} q_i &= \frac{p_i}{m_i}, & \frac{d}{dt} p_i &= - \sum_{j \neq i} m_i m_j S_{ij}^3 (q_i - q_j) \\ \frac{d}{dt} S_{ij} &= - S_{ij}^3 \cdot (q_i - q_j) \cdot \left(\frac{p_i}{m_i} - \frac{p_j}{m_j} \right) \end{aligned} \quad (7.3)$$

と書ける。

(7.3) は右辺がすべて同形式で、かつ

$$t \rightarrow \alpha^{-1} t, \quad q_i \rightarrow \alpha^{-\frac{2}{3}} q_i, \quad p_i \rightarrow \alpha^{\frac{1}{3}} p_i, \quad S_{ij} \rightarrow \alpha^{-\frac{2}{3}} S_{ij} \quad (7.4)$$

によって不変な相似系である。

特殊解(7.5)は

$$q_i = t^{\frac{2}{3}} C_i, \quad p_i = t^{-\frac{2}{3}} C_i' \quad (7.5)$$

で定数バクトル C_1, C_2, C_3 の選択は2通りあり、

(i) $|C_1 - C_2| = |C_2 - C_3| = |C_3 - C_1|$ (Lagrangeの正三角形解)

(ii) C_1, C_2, C_3 が一直線上にある (Eulerの直線解)

である。特殊解(7.5)は $t \rightarrow 0$ ですべての $q_i \rightarrow 0$, すなわち3質点が相似的に同時衝突 (Triple collision) する解を表わしている。

これらの特殊解について Kowalevski の exponent を計算することは、Block (1908) による。本稿とは全く無関係な目的によって行なわれ、計算をくり返すことは本質的に同じである。結果を記すと、(i) の形の特殊解について、無理数となりうる exponent は

$$P_{1,2} = \frac{1}{6} \left\{ -1 + \sqrt{13 \pm 12K(m)} \right\} \quad (7.6)$$

但し

$$K(m) = \frac{1}{4M} \sqrt{(m_1 - m_2)^2 + (m_2 - m_3)^2 + (m_3 - m_1)^2}, \quad M = m_1 + m_2 + m_3.$$

(ii) の形の特殊解については (\mathbb{C}_3 が \mathbb{C}_1 と \mathbb{C}_2 の間にある時)

$$P_1 = \frac{1}{6} \left\{ -1 + \sqrt{9 + 16K'(m)} \right\} \quad (7.7)$$

但し

$$K'(m) = \frac{M(m_1 u^3 + m_2 v^3 + m_3 u^3 v^{-3})}{[m_1 + m_2 + m_3(u^{-2} + v^{-2})]^2}$$

ここで u, v は

$$u + v = 1 \quad \text{かつ} \quad m_1 v^2(u^3 - 1) + m_2 u^2(1 - v^3) + m_3(u^3 - v^3) = 0$$

をみたす正数の解。

と求められる。

3体の質量 m_1, m_2, m_3 を与えた時 (7.6) or (7.7) の一つが無理数となる時、前節の結果 (を拡張したもの) を使って、十分な数の代数的第一積分が存在しないことが主張でき、Bruns (1887) の結果に対する、全く独立なアプローチを与えることになる。(7.6) 及び (7.7) の exponent をすべて有理数とするような質量比

m_1, m_2, m_3 が実際に存在するかどうかは不明である。(17.7) は m_1, m_2, m_3 の互換によって値 ε を変えることに注意。)

他にも代数的カ-積分の存在を否定できる興味ある力学系の例は豊富であるが(例. Toda lattice の一般化)別の機会に譲りたい。

また無限自由度の Hamilton 系と見られる偏微分方程式系で特に相似変換に可する不変性をもつ KdV 型の方程式に對しても Kowalewski の exponent ε を定義することが出来る。そこから一体何が主張できるかは現在検討中である。

参考文献

§1 の Kowalewski の exponent の命名の由来は S. Kowalewski の

- Acta Math. 12, 177-232 (1889), Acta Math. 14, 81-93 (1890)

及びその結果の Lyapunov による解説

- Lyapunov: "Collected Papers" tom. 1, 402-417 (1896) in Russian

による。(1.13) に可する解の展開定理は Picard の名著

- "Traité d'Analyse" tom. 3, chap 1

に述べられている。log t を含むより一般の展開は Siegel の

- "Lectures on the singularities of the three-body problem" (1967)

TATA Institute of fundamental research, Bombay

が最も詳しい。§2 で主張した $\varepsilon = 2$ は、可 $\varepsilon = 2$

- Forsyth: "Theory of Differential Equations", part 2, chap 17
- Whittaker: "Analytical Dynamics", chap 14

に述べられている。 §3 の定理 1, 2 の証明は, 1982年 2月
名古屋大学数学教室で行われた"春の総合研究集会"集録中の

- "有限自由度の非線形力学系における代数的 μ -積分
の存在について"

でなされている。 §4 の例題, 及び積分可能な ϵ の値は

- Bountis, Segur and Vivaldi: Phys. Rev. A25, 1257-1264 (1982)

を参考にした。 §5 に登場する Picard 積分の名の出生は

- Picard et Simart: "Fonction algébriques de deux variables" I, II

によると思われる。 §7 で引用した Block の論文は

- Arkiv för Mat. Astron. Fys., 5, no 9, 1-32 (1908)

にあるが, この論文も含めて, その後の発展を知るには

- Hagihara "Celestial Mechanics" vol. 5, part 1, chap 22

が最も便利で包括的である。三体問題の exponent の一覧表は

- Waldvogel: Celes. Mech. 14, 287-300 (1976)

にコンパクトにまとめられている。三体問題の代数的積分不
可能性を論じた Bruns の定理は, 既出の Forsyth または
Whittaker を参照せよ。