数理解析研究所講究録
第 472 巻 1982 年 165-173

量子一次元スピン系とGel'fand Levitan問題

東大 物性研 今田正俊
Imada Masatoshi

最近，量子逆散乱法の発展によって，完全可積分系を第二量子化の方法で記述することが可能となった。[1] 量子逆散乱法における散乱データを使うと，系の固有状態の生成・消滅演算子を定義することができる。

一方，ベーテ仮説の方法[2]は，完全可積分系に対する第一量子化の方法を与えている。この意味で，量子逆散乱法と，ベーテ仮説の方法は，互いに相補的であるといってよい。ここでは話の中心として量子逆散乱法の問題について議論したい。

量子逆散乱法は，通常，3つの手続きによって構成されている。即ち，1) 場のオペレーターから，散乱データ・オペレーターへの変換（順問題） 2) 散乱データどうし，及び散乱データと系の保存量との間の交換関係の導出（オペレーター代数） 3) 散乱データから，もとの場のオペレーターへの変換（逆問題）。三番目の問題，即ち逆問題は，相関関数などを求めるためには避けて通れない問題であるにもかかわらず，前二者に比べて，立ち遅れた問題となっている。逆問

題に対する最初の試みは，Creamer，Thacker，Wilkinson[3)]によって与えられた。彼らは，非線型シュレーディンガー方程式に対する逆問題を調べ，量子論的に拡張されたGel'fand Levitan方程式を導いている。

本稿では，Gel'fand Levitan方程式による逆問題の定式化が，量子スピン系の場合にも可能であることを示すことにする[4)]。但しここでは簡単のために，問題をハイゼンベルグ・イジングスピン系に限ることにする。系のハミルトニアンは次式で与えられる。

$$H=-\frac{J}{2}\sum_{j=-N/2+1}^{N/2}\left[\sigma_j^1\sigma_{j+1}^1+\sigma_j^2\sigma_{j+1}^2+\Delta\,\sigma_j^3\sigma_{j+1}^3\right] \quad \cdots (1)$$

ここで$\sigma_j^1, \sigma_j^2, \sigma_j^3$はj座標に存在するパウリ行列である。以下の議は$|\Delta|\geq 1$の場合に限ることにする。この系は6-バーテックス・モデルと呼ばれる系と等価であることが知られている。実際，Baxter[5)]は，ハミルトニアン(1)が，6-バーテックス・モデルで定義される転送行列$T_N(v)$を使って次式のように表わされることを示している。

$$H=-J\Delta\,\mathrm{th}2\zeta\left[T_N^{-1}(\zeta)\left[\frac{d}{dv}T_N(v)\right]_{v=\zeta}-N(2\,\mathrm{sech}\,2\zeta-1)/(2\,\mathrm{th}2\zeta)\prod_{j=-N/2+1}^{N/2}\sigma_j^4\right] \quad \cdots (2)$$

$$\Delta\equiv \mathrm{ch}2\zeta$$

ここでσ_j^4はj座標に作用する単位2×2行列である。(2)式において，転送行列$T_N(v)$はtransition matrixと呼ばれるL_nを使って次のように定義される

$$T_N(v) = Tr(L_{-N/2+1} L_{-N/2+2} \cdots L_{N/2})/w_3^N \qquad (3)$$

$$L_n \equiv \begin{pmatrix} w_3\sigma_n^3 + w_4\sigma_n^4, & 2w_1\sigma_n^- \\ 2w_1\sigma_n^+, & -w_3\sigma_n^3 + w_4\sigma_n^4 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{2}\rho_0 \sin 2\eta \\ w_3 &= \rho_0 \sin\eta \cos v \\ w_4 &= \rho_0 \cos\eta \sin v \\ \eta &= i\zeta \\ \rho_0 &= [\sin(v+\eta)\sin(v-\eta)]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

散乱データを定義するために，以下のJost関数を定義しよう。

$$\tilde{G}_N(n,v) \equiv V(-\frac{N}{2}, v)\, G_N(n,v)\, V^{-1}(n,v) \qquad (6)$$

$$G_N(n,v) \equiv L_{-N/2+1} L_{-N/2+2} \cdots L_n \qquad (7)$$

$$V(n,v) \equiv \begin{pmatrix} (w_3+w_4)^n, & 0 \\ 0, & (-w_3+w_4)^n \end{pmatrix} \qquad (8)$$

散乱データ $a(v)$, $b(v)$ は $\tilde{G}_N$ の熱力学的極限から次のように定義される。

$$\tilde{G}_N(n, v) \underset{\substack{n\to\infty \\ N\to\infty}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} a(v) , & b(v) \\ -b^*(v) , & a^*(v) \end{pmatrix} \equiv J(v) \tag{9}$$

散乱データ・オペレータに関連して，古典系での反射係数に相当するオペレータ R^* を

$$R^*(v) = (\exp(\pi i/4)/\sqrt{\sin 2\eta})\, b(v)\, a^{-1}(v) \tag{10}$$

の形に定義すると，このオペレータは以下のような交換関係を満たすことが示される。

$$\begin{aligned} R^*(v_1) R^*(v_2) &= S(v_2, v_1) R^*(v_2) R^*(v_1) \\ R(v_1) R^*(v_2) &= S(v_1, v_2) R^*(v_2) R(v_1) \\ &\quad + 2\pi\delta(v_1 - v_2) \end{aligned} \tag{11}$$

但し
$$S(v_1, v_2) = \frac{\sin(v_1 - v_2 + 2\eta)}{\sin(v_1 - v_2 - 2\eta)}$$

上に示された交換関係とともに，$\prod_i R^*(v_i)|0\rangle$ であらわされる状態が $T_N(v)$ の固有状態であることに注意すると，R^* は系の固有状態に対する生成演算子であることがわかる。但しここで $|0\rangle$ はすべてのスピンが上向きであるような状態であ

る。

さて，本題のGel'fand Levitan方程式の導出の問題を議論しよう。そのためには，次のような2種類のJost関数を導入すると便利である。

$$
\begin{aligned}
\Psi_N(n,\nu) &\equiv V(-\tfrac{N}{2},\nu)\,G_N(n,\nu) \\
X_N(n,\nu) &\equiv V(\tfrac{N}{2},\nu)\,F_N(n,\nu)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

但し　$F_N(n,\nu)=L_{N/2}^{-1}L_{N/2-1}^{-1}\cdots L_{n+1}^{-1}$

Ψ_N と X_N はそれぞれ，2行2列の行列であり，各成分はオペレータである。それらを次のように書くことにする。

$$
\begin{aligned}
\Psi_N(n,\nu) &= \begin{pmatrix}\psi_N(n,\nu)\\ \tilde{\psi}_N(n,\nu)\end{pmatrix} \\
X_N(n,\nu) &= \begin{pmatrix}\tilde{\chi}_N(n,\nu)\\ \chi_N(n,\nu)\end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$\psi_N(n,\nu)=(\psi_{N1}(n,\nu),\psi_{N2}(n,\nu))$，$\chi_N(n,\nu)=(\chi_{N1}(n,\nu),\chi_{N2}(n,\nu))$。

ψ_{N1} と ψ_{N2} の $N/2$ における値を使ってオペレータ A_N 及び B_N を次のように定義する。

$$
\begin{aligned}
\psi_{N1}(N/2,\nu) &= (w_3+w_4)^{N/2}A_N(\nu) \\
\psi_{N2}(N/2,\nu) &= (-w_3+w_4)^{N/2}B_N(\nu)
\end{aligned}
\tag{14}
$$

$N \to \infty$ の極限で

$$
\begin{aligned}
a(v) &= \lim_{N\to\infty} A_N(v) \\
b(v) &= \lim_{N\to\infty} B_N(v)
\end{aligned}
\qquad (15)
$$

となることは，定義より明らかである。また，古典系の場合と同様の考察により，ψ_N は複素 v 平面の上半平面で解析的であり，$\tilde{\psi}_N$ は下半平面で解析的であることが示される。一方 χ は，$n \to N/2$ での漸近的なふるまいから，$\mathrm{Im}\, v \geqq 2\eta$ で解析的であり，$\tilde{\chi}$ は $\mathrm{Im}\, v \leqq 2\eta$ で解析的であることがわかる。

以上の考察より，古典系の場合と同じようにして，以下で定義される関数を導入することは有益である。

$$
\Phi_N(n,v) = \begin{cases} A_N^{-1}(v)\, \psi_N(n,v)\, e^{-\frac{ikN}{4}} \Lambda_N(n,v) , & \mathrm{Im}\, v > 2\eta \\ \tilde{\chi}_N(n,v)\, e^{-\frac{ikN}{4}} \Lambda_N(n,v) & \mathrm{Im}\, v < 2\eta \end{cases} \qquad (16)
$$

ここで
$$
\Lambda_N(n,v) = \prod_{j=n+1}^{N/2} \left[i\left(\sin\frac{k}{2}\right)\sigma_j^3 + \left(\cos\frac{k}{2}\right)\sigma_j^4 \right] \qquad (17)
$$

$$
e^{ik} = \sin(v+\eta)/\sin(v-\eta) \qquad (18)
$$

関数 $\Phi_N(n,v)$ は以下のような性質を持っている。

1) $\mathrm{Im}\,v>2\eta$ 及び $\mathrm{Im}\,v<2\eta$ において $v=-\eta$ 以外の点で解析的。Φ_N は $v=-\eta$ に極を持つ。

2) $v\to\pm i\infty$ のとき $\Phi_N(n,v)\to(1,0)$

3) $\mathrm{Im}\,v=2\eta$ を越えるとき次の跳びを持つ

$$B_N(v-2\eta)A_N^{-1}(v-2\eta)\chi_N(n,v)e^{-\frac{ikN}{4}}\Lambda_N(n,v)$$

以上3つの性質を利用して，Φ_N に対して，ある適当な経路の積分を考えれば，χ_N に対する Gel'fand Levitan 方程式を導くことができる。即ち

$$\lim_{N\to\infty}\left[\tilde{\chi}_{Ni}(n,v)\left[\frac{\sin(v-\eta)}{\sin(v+\eta)}\right]^{\frac{N}{4}}\sin v\,\Lambda_N(n,v)\right]$$

$$=\lim_{N\to\infty}\Big[\delta_{i1}\sin v+\frac{\sqrt{\sin 2\eta}}{4\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}dv'K(v,v'+2\eta,\tfrac{N}{2})R^*(v')$$

$$\times\chi_{Ni}(n,v'+2\eta)\Lambda_N(n,v'+2\eta)$$

$$+\frac{\sqrt{-\sin 2\eta}}{2}\sum_s K(v,v_s^{(0)},\tfrac{N}{2})R_s^*(v_s^{(0)}-2\eta)\chi_{Ni}(n,v_s^{(0)})\Lambda_N(n,v_s^{(0)})$$

$$+\Xi_{Ni}(n,v)\Big]\qquad \text{但し } i=1,2 \qquad (19)$$

ここで

$$R_s^*(v_s^{(0)}-2\eta)\equiv\left(e^{\frac{\pi i}{4}}/\sqrt{\sin 2\eta}\right)\tilde{b}(v_s^{(0)}-2\eta)\,a^{-1}(v_s^{(0)}-2\eta)$$

$$K(v,v',n)\equiv\sin[(v'+v-i\varepsilon)/2][\sin(v'-\eta)]^{\frac{n}{2}}/\left(\sin[(v'-v+i\varepsilon)/2][\sin(v'+\eta)]^{\frac{n}{2}}\right)\qquad(20)$$

また $v_s^{(0)}$ は $\mathrm{Im}\,v\geqq 2\eta$ の領域における $a(v)$ の零点であり，

$\tilde{b}(v_s^{(0)}-2\eta)=\lim_{N\to\infty}B_N(v_s^{(0)}-2\eta)$ である。

(19) 式において右辺第2項がスピン波励起からの寄与であり，第3項はスピン波の束縛状態からの寄与と考えてもよい。右辺の最後の項 $\Xi_{Ni}(n,\nu)$ は $\Phi_N(n,\nu)$ の ν ニークにおける極からの寄与であるが，ここでは詳しくはふれない。(19) 式とともに，$\tilde{\chi}_{N1} = \chi^{*}_{N2}(n,\nu^{*}+2\gamma)$ 及び $\chi_{N2}(n,\nu+2\gamma) = -\chi^{*}_{N1}(n,\nu^{*}+2\gamma)$ を使えば，$\tilde{\chi}$ を解くことができる。また求められた $\tilde{\chi}$ を $\nu\to -i\infty$ の近くで展開して，

$$\lim_{N\to\infty} \tilde{\chi}_{N1}(n,\nu)\, Q_N(n,\nu) = 1 + \sum_{j=1} \Omega_2^{(j)}(n)\, \delta^{j}$$

$$\lim_{N\to\infty} \tilde{\chi}_{N2}(n,\nu)\, Q_N(n,\nu) = -\sum_{j=1} \Omega_1^{(j)}(n)\, \delta^{j}$$

の形に書けば（但し $\delta \equiv e^{-i\nu}$），もとのハミルトニアンを記述するスピンオペレータは $\Omega_1^{(1)}(n)$ を用いて，以下のように書ける。

$$\sigma_n^{-} = \frac{i}{4\sin\gamma\cos\gamma\, e^{i\gamma}}\left[\Omega_1^{(1)}(n) - \Omega_1^{(1)}(n-1)\, Z(n,\gamma)^2\right]$$

$$Z(n,\gamma) = -i(\sin\gamma)\,\sigma_n^{3} + (\cos\gamma)\,\sigma_n^{4}$$

$$\sigma_n^{+} = (\sigma_n^{-})^{*}$$

$$\sigma_n^{3} = [\sigma_n^{+}, \sigma_n^{-}]$$

以上，大変大ざっぱに，量子スピン系の Gel'fand Levitan 問題について議論したが，詳しくは文献4)を参照された

い。

文献

1) 例えば review としては

H. B. Thacker : Rev. Mod. Phys. 53 (1981) 253.

2) H. A. Bethe : Z. Phys. 71 (1931) 205.

3) D. B. Creamer, H. B. Thacker and D. Wilkinson : Phys. Rev. D21 (1980) 1523.

4) M. Imada : to appear in Prog. Theor. Phys.

5) R. J. Baxter : Ann. Phys. 70 (1972) 193, 323.