数理解析研究所講究録
第 473 巻 1982 年 1-11

Flatness and Some Elementary Concepts for Modules

Cornell Univ. Moss E. Sweedler

参考文献[1]では、次の問題 Q に答えている。

Q　$\{R^\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{L}}$ を環の族、各 $\lambda\in\mathcal{L}$ に対して M^λ は平坦右 R^λ 加群とすると、いつ、即ち、どんな付帯条件下で、$\prod_{\lambda\in\mathcal{L}} M^\lambda$ は平坦 $\prod_{\lambda\in\mathcal{L}} R^\lambda$ 加群になるか。

平坦加群について良く知られていることは、(イ) 自由加群や射影加群は平坦加群である。(ロ) 平坦加群であるための必要十分条件は、それが自由加群の族の帰納的極限であること。

余り良く知られていない平坦性の利用法は、次のことである。A を体 R の代数的拡大体とし、A を $A\otimes_R A$ 加群とみたとき、

$$A/R \text{ が分離的拡大} \iff A \text{ は } A\otimes_R A\text{-平坦}$$

これは有限次体拡大 A/R に対して、良く知られた次の結果の一般化である。

$$A/R \text{ が分離的拡大} \iff A \text{ は } A\otimes_R A\text{－射影的}$$

ここでは問題 Q に対する答について論ずるのではなくそこの証明で使った本質的なかつ非常に簡単なアイデアのいくつかについて論ずる。問題 Q への解答は、全く技巧的なものなので、与えないが、その答から出てくる結果を一つ紹介しておきましょう。

POLYNOMIAL RING PRODUCT THEOREM

各 $\lambda\in\mathcal{L}$ について、R^λ は体上の多項式環とする。

(1) 有限個を除いて R^λ の変数は２個以下とすれば、$\prod_{\lambda\in\mathcal{L}} M^\lambda$ は $\prod_{\in\mathcal{L}} R^\lambda$－平坦である。

(2) R^λ の変数が３個以上のものが無限個あるならば、次のような族 $\{M^\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{L}}$ がある。M^λ は有限階数の自由 R^λ 加群であるが、$\prod_{\lambda\in\mathcal{L}} M^\lambda$ は平坦右 $\prod_{\lambda\in\mathcal{L}} R^\lambda$ 加群ではない。ただしこの時は、R^λ は代数的閉体上の多項式環である。

問題 Q に答える際の主要な新しいアイデアは次のものである。

1. Support
2. Measure functions
3. Chase diagrams
4. measure function に基づいた種々のタイプの「加群の次元」

ここでは 1, 2 について幾分詳しく述べ、いくつかの点で付随的な研究を奨励するような領域に言及する。

アイデア 3, 4 は S.U. Chase の論文から示唆を受けたものであり、後程軽くふれます。実際、Chase の論文は加群の直積の性質を調べるのに有効な数多くのテクニックを提供してくれます。

§ SUPPORT

定義. 左 R 加群 L が「support $T \in \mathbb{Z}$ を持つ」或いは「T-supported である」とは、L の各有限部分集合が T 個以下の元で生成される L の部分加群に含まれるときにいう。

これは、次の各条件に同値である。

(1) L は T 個の元で生成された加群の族の帰納的極限で

ある。

(2) M を任意の右 R 加群としたとき、$M\otimes_R L$ の元の長さは T 以下である。即ち、$\sum_{i=1}^{T} m_i\otimes l_i$ の形に表わすことができる。

(3) M が階数 $T+1$ の自由右 R 加群ならば、$M\otimes_R L$ の元の長さは T 以下である。

(4) $T+1$ 個の元からなる L の任意の部分集合は T 個の元から生成される部分加群に含まれる。

(5) L は T-supported 加群の族の帰納的極限である。

例

(イ) T 個の元で生成された加群は T-supported である。

(ロ) F を階数 T の自由左 R 加群、L をその部分加群とする。商加群 F/L が平坦ならば、L は T-supported である。

(ハ) R を斜体とする。L が T-supported $\Leftrightarrow$ $\dim_R L \leq T$。

(ニ) R を可換環、A を可換 R 代数とする。このとき、

A が 1-supported $\Leftrightarrow$ R の積閉集合 S と $S^{-1}R$ の ideal I が存在し、$A\simeq S^{-1}R/I$。

上の(ニ)より $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Z}$ 上 1-supported である。この性質を $\mathbb{Q}$ の数個の元の共通分母をとるときに使っている。すなわち、

$q_1, \cdots, q_n \in \mathbb{Q}$, dをそれらの共通分母とすれば、

$$\{q_1, \cdots, q_n\} \subset \mathbb{Z} \cdot \frac{1}{d}$$

Supportは短完全系列において「生成元の個数」のような振舞いをする。即ち、左R加群の短完全系列

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

に対して、

$$\begin{array}{lll} & M \text{ は } T\text{-supported} & N \text{ も } T\text{-supported} \\ (*) & \left.\begin{array}{l} L \text{ は } S\text{-u.} \\ N \text{ は } U\text{-supported} \end{array}\right\} & \Longrightarrow \; M \text{ は } (S+U)\text{-supported} \end{array}$$

「生成元の個数」のように、Mがfinite supportを持っていたとしても、部分加群は必ずしもfinite supportを持っているとは限らない。このことから、次の定義は自然に思える。

定義　Mのすべての部分加群がfinite supportをもつとき、Mをsupport Noetherianといい、Rが左R加群として、support Noetherianの時、Rを左support Noetherianという。

私はsupport Noetherianの研究が、私達をどのような新世

界に導いてくれるかは知りませんが、それは興味深いものと思います。

supportが平坦性と問題Qの解答にどのように関わっているのかのヒントを述べよう.

平坦性は「考えている加群の中の《関係》は基礎の環の中の《関係》からくる。」という条件と同値である。この意味は次の通りです。右R加群Mが平坦であるためには、次の条件をみたすことは必要十分である。

$\{m_i\}_{1\le i\le t} \subset M$, $\{r_i\}_{1\le i\le t} \subset R$ で $\sum_{i=1}^{t} m_i r_i = 0$

をみたせば、$\{n_j\}_{1\le j\le \tau} \subset M$, $\{\mu_{jk}\}_{\substack{1\le j\le \tau\\ 1\le k\le t}} \subset R$

で、すべての $j=1,2,\cdots,\tau$ に対し、$\sum_{k=1}^{t} \mu_{jk} r_k = 0$ となり、すべての $k=1,2,\cdots,t$ に対し、$m_k = \sum_{j=1}^{\tau} n_j \mu_{jk}$

となるものが存在する。

注意すべきことは、Mの t 個の元 $\{m_i\}_{1\le i\le t}$ から出発して、Mの τ 個の元 $\{n_j\}_{1\le j\le \tau}$ —— これは増えている可能性がある。—— で終っていることである。無限個の平坦加群の直積が必ずしも平坦でないかもしれないのは各成分の τ が勝手に大きくなり得るからである。次の定理が得られる。

定理　階数tの自由左R加群からRへのすべてのR準同形写像φに対して$\mathrm{Ker}\,\varphi$がT-supportedならば、上記のtをT以下に選ぶことができる。

§ MEASURE FUNCTIONS

$|\mathbb{Z}|=\{0,1,2,\cdots\}$とする。

定義　左R加群から$|\mathbb{Z}|\cup\{\infty\}$への関数$\mathfrak{m}$がmeasure functionであるとは、すべての左R加群の短完全系列　$0\longrightarrow L\longrightarrow M\longrightarrow N\longrightarrow 0$　に対して、

$$\mathfrak{m}M \geqq \mathfrak{m}N \quad \& \quad \mathfrak{m}L+\mathfrak{m}N \geqq \mathfrak{m}M$$

をみたすときにいう。

最も身近な例は

$$\mathfrak{m}(L)=\begin{cases}\infty, & \text{Lが有限生成でない。}\\ n, & \text{L}\neq(0)\text{で、}n\text{はLの生成元の最小個数。}\\ 0, & L=(0).\end{cases}$$

である。このmeasure functionはthe minimal number of generators measure functionとよばれる。Supportは(*)をみたすので同様に、the minimal support measure functionが定義できる。第3の例は、組成列の長さである。（勿論、零加群は0

有限の組成列をもたない非零加群は∞とする。)

measure function の定義より、同形な加群は相等しい measure を持つし、2つの加群 L_1, L_2 に対して、次が成立することがいえる。

$$\mathfrak{m}(L_i) \leq \mathfrak{m}(L_1 \oplus L_2) \leq \mathfrak{m}(L_1) + \mathfrak{m}(L_2)$$

Lの表示とは、短完全系列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

でPが射影加群となるものをいう。$\mathfrak{m}K < \infty > \mathfrak{m}P$ の時、この表示は、<u>$\mathfrak{m}$-有限</u>という。

$\mathfrak{m}$ が the minimal number of generators measure function の時は通常の有限表示は $\mathfrak{m}$ 有限表示である。通常の有限表示のように、次のことの証明には、Schanuel の補題が使われる。

$$0 \longrightarrow K_i \longrightarrow P_i \longrightarrow L \longrightarrow 0 \qquad (i = 1, 2)$$

をLの2つの表示とする。このとき、$\mathfrak{m}K_2 < \infty > \mathfrak{m}P_1$ ならば、$\mathfrak{m}K_1 < \infty > \mathfrak{m}P_2$ である。

従って、Lがひとつの $\mathfrak{m}$-有限表示をもち、かつ他の表示 $0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow L \longrightarrow 0$ が与えられた時、

$\mathfrak{m}K = \infty = \mathfrak{m}P$ 或いは $\mathfrak{m}K < \infty > \mathfrak{m}P$

のどちらかが成立する。

S.U. Chase の論文 [2] では、射影加群の直積がいつ射影加群になるかという問題を研究している。そこでは、有限表示が、その解答に大きな役割をしめている。「有限表示」を「$\mathfrak{m}$ 有限表示」に置き換えても、彼の結果の多くは依然正しい。[1] では、$\mathfrak{m}$ を the minimal support measure function とした時のこれらの一般化を必要とした。また、一般の measure function に対しても、それらが成立することを証明するのは簡単であった。

前に support のところで support Noetherian について述べたが、明らかに、加群 L がすべての部分加群 L′ に対して、$\mathfrak{m}(L') < \infty$ をみたせば、$\mathfrak{m}$-Noetherian である。私はこの研究が私達をどんな新世界に導くかは知りません。いくつかのすばらしい応用がなければ、それは多分余りに形式的すぎて価値はないだろうと思う。(しかし、私には support Noetherian は、すばらしい応用を持っているように思えます。その応用を見つけることも、その研究の一部分にちがいないと考えている。)

§ Chase Diagrams

Chase diagrams とは既に紹介した Chase の論文 [2] から

とった重要な可換図式である。その1つは次の形をしている。

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & 0 \\
 & \bullet \arrow[d] & & & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}
$$

これに、2つの加群を付け加え、次の図式を得る。

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

多分、これは代数学者にとっては、四角形の完成（completing the square、米国では、2次方程式の解法 —— $(x+\alpha)^2=\beta$ の形に変形すること —— も同じく completing the square と呼ぶので、代数学者以外の数学者は、これを聞くと、2次方程式の解決を思い、爆笑になる。従って、筆者は別の名称を提唱したい。それが Chase diagrams である。）である。Chase diagrams は $\mathfrak{m}$ 有限表示の研究には非常に有用である。S.U. Chase は、それらを有限表示に関する結果の証明に使いました。長年の間、私は同じ可換図式を「Chase diagram」と名づけたいと思っていました。その理由は、そうすれば、私は Chase diagraming による証明で、定理を得ることができるからです。（chase = 追う、追いかける）

環の直積上の加群の直積の研究から、環の射影極限上の加群の射影極限はどうなるのかということと環の超積上の加群の超積はどうなるのかという問題を考えている。

参考文献

[1] Sweedler, M.E., Representation of flatness for the product of modules over the product of rings, J. Algebra, 74(1980), 159-205.

[2] Chase, S.U., Direct product of modules, Trans. Amer. Math. Soc., 97 (1960), 457-473.