数理解析研究所講究録
第 473 巻 1982 年 57-70

Hyperalgebraic construction of Chevalley group schemes

筑波大学数学系 竹内光弘 (Mitsuhiro Takeuchi)

いわゆるChevalley群スキームの定義と構成を，hyperalgebraの見地から振り返り，特にそれらは常にrefrexive群スキームとなる事を示すのが，講演の目的である．hyperalgebraやHopf代数は従来，体上で主に扱われて来たので，$\mathbb{Z}$上で考える場合は，いささかデリケートになる．問題のrefrexivityは$\mathbb{Z}$上だから成立つ事で，体上では成立しない．

どんなbase ringの上でもaffine群スキームは，可換Hopf代数と，カテゴリカルに対応する．以下の話では，base ringを$\mathbb{Z}$にとる．

$\Delta: C \longrightarrow C\otimes C$ と $\varepsilon: C \longrightarrow \mathbb{Z}$ を構造とするcoalgebra Cに対し，$C^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C, \mathbb{Z})$は，$\varepsilon$を単位元，$\Delta^*$から引起される積により代数となる．

逆に，Fが有限（即ち，有限生成$\mathbb{Z}$-加群）代数ならば，$F^*\otimes F^* \simeq (F\otimes F)^*$により，$F$の積のdualは$F^* \longrightarrow F^*\otimes F^*$なる写像と見なされ，これを$\Delta$として，$F^*$はcoalgebraになる．

Gを可換Hopf代数Aに対応するaffine群スキームとする．$M(=M_A)$を$\varepsilon: A \to \mathbb{Z}$の核とする．$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A/M^n)^*$は$A^*$のsubalgebraである．$A$を有限生成代数とする．このとき$A/M^n$はすべて有限代数になるので，$(A/M^n)^*$はcoalgebraの構造をもつ．しかも包含写像$\cdots (A/M^n)^* \hookrightarrow (A/M^{n+1})^* \cdots$はcoalgebra mapなので，$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A/M^n)^*$はcoalgebraになる．両方の構造を併せて，それは余可換Hopf代数になる．これを$hy_{\mathbb{Z}}(G)$と書き，Gのhyperalgebraとよぶ．

例として，G_aとG_mのhyperalgebraを求めよう．G_aとG_mはそれぞれ多項式環$\mathbb{Z}[T]$及びその局所化$\mathbb{Z}[U, U^{-1}]$で表わされ，coalgebra構造は

$$\Delta(T) = T\otimes 1 + 1\otimes T, \ \varepsilon(T) = 0 \ ; \ \Delta(U) = U\otimes U, \ \varepsilon(U) = 1$$

で与えられる．XとHを次で定義する：

$$X = \varepsilon\circ\frac{d}{dT} : \mathbb{Z}[T] \to \mathbb{Z}, \quad H = \varepsilon\circ\frac{d}{dU} : \mathbb{Z}[U, U^{-1}] \to \mathbb{Z}.$$

$hy_{\mathbb{Q}}(G_a)$と$hy_{\mathbb{Q}}(G_m)$はそれぞれ多項式環$\mathbb{Q}[X]$と$\mathbb{Q}[H]$であり，$hy_{\mathbb{Z}}(G_a)$と$hy_{\mathbb{Z}}(G_m)$は次の元で張られる$\mathbb{Z}$-subalgebraである：

$$1, T, \frac{T^2}{2!}, \cdots, \frac{T^n}{n!}, \cdots \quad 及び$$

$$1, H, \frac{H(H-1)}{2!}, \cdots, \frac{H(H-1)\cdots(H-n+1)}{n!}, \cdots$$

下の行の第n項を$\binom{H}{n}$とあらわす．このcoalgebra構造は同形で，上の標準基底を$b_0, b_1, \cdots, b_n, \cdots$とすれば，

$$\Delta(b_n) = \sum_{i=0}^{n} b_i \otimes b_{n-i}, \quad \varepsilon(b_n) = \delta_{0n}$$

で与えられる．このようなcoalgebraは1次元のBirkhoff–Witt型coalgebraとよばれる．

所で$\mathbb{Z}$上の抽象的なhyperalgebraの定義は今の所未定である．代数的なaffine群スキームのhyperalgebraとして得られるものや，Birkhoff–Witt型の余可換Hopf代数は，むろんhyperalgebraとよんでよい．$\mathbb{Z}$上のHopf代数のうまい理論を作るためには何もすべてのHopf代数を考察の対象とする事はなかろう．torsionfreeとか，coalgebraの有限性定理などを必要に応じて仮定するのが得策と思われる．

Bを"抽象的なhyperalgebra"とする．単に余可換Hopf代数と思っても差支えない．B^*は代数であると同時にB-bimodule である．B^*の元fに対し

$$
\begin{aligned}
& B\cdot f \text{ が有限生成 } \mathbb{Z}\text{-加群} \\
\iff\ & f\cdot B \text{ が有限生成 } \mathbb{Z}\text{-加群} \\
\iff\ & f \in (B/I)^* \text{ for some ideal } I \text{ of } B \text{ such that} \\
& \qquad\qquad B/I \text{ is a finite algebra}
\end{aligned}
$$

であり，そのような元の全体B°はB^*のsubalgebraとなる．同値な条件の三つ目に現れるideal I はcofiniteとよばれる．cofiniteなIに対し，$(B/I)^*$はcoalgebraで，その合併がB°であるから，B°自体coalgebraである．両方の構造を併せるとそれは，可換なHopf代数になる．

このBが，代数的affine群スキームG(可換Hopf代数Aで表わされる)のhyperalgebraであるとしよう．もし$\bigcap_n M^n=0$ならば，AはB^*の部分代数に自然に埋込まれる事になる．体上と違って，この場合でも$A\subset B^\circ$とはならないかもしれない．もし$\bigcap_n M^n=0$で，さらにB^*の中で丁度$A=B^\circ$となっている時，Gをreflexiveとよぶ事にする．

一般のhyperalgebra Bに戻り，B°がたまたま有限生成代数であるとする．対応する代数的affine群スキームのhyperalgebra Hは$B^{\circ *}$にふくまれる．けれども体上と違って，自然な写像$B\longrightarrow B^{\circ *}$の像がHにふくまれる保証はない．たまたまこれが同形$B\simeq H$を引起すとき，hyperalgebra Bをreflexiveとよぶ事にする．

定義から直ちに分る通り，reflexive代数的affine群スキームとreflexive hyperalgebraはカテゴリカルに対応する．

G_aはreflexiveである．G_mもそうであると思われるが今の所分っていない．体上ではどちらもreflexiveでない．

本題のChevalley群スキームに入ろう．Chevalley群スキームは，対(X,Φ)に対し定まる．ここでXは有限自由$\mathbb{Z}$-加群，Φは$X_{\mathbb{R}}=X\otimes\mathbb{R}$内の抽象的ルート系で，$\Phi\subset X\subset\Lambda$($=\Phi$のweight lattice)を満たすものとする．まずルート系の理論から$X^*=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X,\mathbb{Z})$の中にcoroot たち$\Phi^*=\{\alpha^*\mid\alpha\in\Phi\}$

が定まる．Chevalley 群スキームを構成するには，まずその hyperalgebra を構成する．それには複素半単純リー環論を使う．

$\mathcal{L}$ を，一つの Cartan subalgebra $\mathcal{H}$ に関してルート系 Φ をもつ複素半単純リー代数とする．

$$\mathcal{L} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathcal{L}_\alpha \oplus \mathcal{H}$$

をその root space 分解とする．Φ が $\mathcal{L}$ の $\mathcal{H}$ に関するルート系だから

$$X_{\mathbb{C}} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$$

と自然に同一視され，これは dual の同形

$$X^*_{\mathbb{C}} \simeq \mathcal{H}$$

を引起す．coroot $\alpha^* \in X^*$ に対応する $\mathcal{H}$ の元を H_α と表わす ($\alpha \in \Phi$)．$\mathcal{L}_\alpha$ はすべて 1 次元であるが，その基底 X_α のあつまり ($\alpha \in \Phi$) で次の条件をみたすものが存在する：

$$[X_\alpha, X_\beta] = \begin{cases} H_\alpha & \text{if} \quad \alpha+\beta = 0 \\ 0 & \text{if} \quad \alpha+\beta \neq 0, \notin \Phi \\ \pm(r+1)X_{\alpha+\beta} & \text{if} \quad \alpha+\beta \in \Phi, \quad \beta - r\alpha \in \Phi, \\ & \qquad \beta-(r+1)\alpha \notin \Phi \quad (r \geq 0) \end{cases}$$

このような族 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Phi}$ を，一つの Chevalley base とよぶ．

Chevalley base を一つ固定する．$\mathcal{L}$ の $\mathbb{C}$ 上の universal enveloping 代数 $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}$ は $\mathcal{L}$ を primitive elements として $\mathbb{C}$ 上の hyperalgebra になる．この $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}$ は Φ だけで決り，X の方にはよう

ない．X に依存する $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}$ の hyperalgebra lattice $\mathcal{U}^X$ を次に定義する．

<u>$\mathcal{U}^X$ の定義.</u> 次のすべての元で生成される $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}$ の $\mathbb{Z}$-subalgebra である．

$$\frac{X_\alpha^n}{n!}\ (\alpha\in\Phi),\ \binom{H}{n}\ (H\in X^*),\ n=0,1,2,\cdots$$

ここで X^* は $\mathfrak{H}$ に含まれるとみなす．

$\mathcal{U}^X$ は次の諸性質をもつ．$\alpha\in\Phi$ に対し，$\mathcal{U}^\alpha$ を $\frac{X_\alpha^n}{n!}$，$n=0,1,\cdots$ の張る $\mathbb{Z}$-subalgebra とする．これは $hy_{\mathbb{Z}}(G_a)$ と同形である．$\mathcal{U}^0$ を $\binom{H}{n}$，$H\in X^*$，$n=0,1,2,\cdots$ の生成する $\mathbb{Z}$-subalgebra とする．X の rank を l とすれば，$\mathcal{U}^0$ は l 個の G_m の直積の hyperalgebra と同形になる．（$\mathcal{U}^0$ は X に依存する）．$\Phi\cup\{0\}$ に勝手な順序を与え $\{\gamma_1,\cdots,\gamma_s\}$ と並べる．すると product map が同形

$$\mathcal{U}^{\gamma_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{U}^{\gamma_s}\xrightarrow{\sim}\mathcal{U}^X$$

を引起す．各 $\mathcal{U}^\gamma$（$\gamma\in\Phi\cup\{0\}$）は $\mathbb{Z}$-hyperalgebra ゆえ，この同形で左側の tensor 積 coalgebra の構造を右側に transport できる．この coalgebra 構造は，$\Phi\cup\{0\}$ に与えた順序には依存せず，algebra 構造とともに，$\mathcal{U}^X$ を $\mathbb{Z}$ 上の hyperalgebra にし，しかも $\mathbb{C}$ 上の hyperalgebra の同形 $\mathcal{U}^X\otimes\mathbb{C}\simeq\mathcal{U}_{\mathbb{C}}$ が成立つ．$\mathcal{U}^X$ は Birkhoff-Witt 型の $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}$ の hyperalgebra lattice である．

特に weight lattice Λ に対し，$\mathcal{U}^\Lambda$ を単に $\mathcal{U}$ と記し，$\mathcal{U}_{\mathbb{C}}$ の Kostant form とよぶ．それは $\frac{X_\alpha^n}{n!}$，$\alpha\in\Phi$，$n\geq 0$ で生成される $\mathbb{Z}$-subalgebra である．任意の X に対し $\mathcal{U}\subset\mathcal{U}^X$ で，

包含写像は hyperalgebra map である.

後に分るように $\mathcal{U}^X$ は reflexive hyperalgebra で、対応する reflexive 群スキームが (X, Φ) の Chevalley 群スキームに他ならない. ($\mathcal{U}$ は universal 型の Chevalley 群スキームに対応する).

しかし $\mathbb{Z}$ 上だけで議論するのは今の所不可能で, 体が補助的に必要になる. 体 k に対し, $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{U}^X$ を k まで係数拡大すると, 全射の k 上の hyperalgebra map $\mathcal{U}_k \twoheadrightarrow \mathcal{U}^X_k$ が得られる. これは大切な事実である.

$\mathcal{L}$ の忠実有限次元複素表現

$$\rho : \mathcal{L} \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M_{\mathbb{C}})$$

でその weigts (in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H, \mathbb{C})$) が X を生成するものをとる. $M_{\mathbb{C}}$ は $\mathcal{U}$-不変な lattice M をもつ事が知られている. このような ρ, M をそれぞれ X に関して admissible な表現, lattice とよぼう. M は $\mathcal{U}^X$-不変になる. M に対応する線形群スキームを GL_M と記す. M の rank を n とすれば $GL_M \simeq GL_n$ である.

$hy_{\mathbb{C}}(GL_M)$ は $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M_{\mathbb{C}})$ の universal enveloping 代数だから, ρ は単射の $\mathbb{C}$-hyperalgebra map

$$\tilde{\rho}_{\mathbb{C}} : \mathcal{U}_{\mathbb{C}} \hookrightarrow hy_{\mathbb{C}}(GL_M)$$

を引起す. M が $\mathcal{U}^X$-不変だということは, これが $\mathcal{U}^X$ を $hy_{\mathbb{Z}}(GL_M)$ に写像するという事で, $\mathbb{Z}$-hyperalgebra map

$$\tilde{\rho} : \mathcal{U}^X \hookrightarrow hy_{\mathbb{Z}}(GL_M)$$

が引起される．$\tilde{\rho}_{\mathbb{C}}$ は $\tilde{\rho}$ から係数拡大で得られる．

group-like Hopf代数 $\mathbb{Z}[X]$ に対応する diagonalizable群スキームを D^X とする．M の weights が X を生成するから，M は $\mathbb{Z}[X]$-comodule の構造をもち，ある表現

$$\sigma : D^X \longrightarrow GL_M$$

が対応する．この σ は D^X と，GL_M のある閉部分群スキームの同形を与える．この同形により，D^X を GL_M の閉部分群スキームとみなす事にする．

大ざっぱにいえば，(X, Φ) の Chevalley群スキーム（G^X と書かれる）とは，$\tilde{\rho}(\mathcal{U}^X)$ を $\mathbb{Z}$-hyperalgebra にもつ GL_M の連結閉部分群スキームである．もちろん D^X をふくむ事が期待される．しかし体上と異なり $\mathbb{Z}$ 上では，部分群スキームと部分hyperalgebra の対応がどうなっているのかよく分らない．そこで G^X の係数拡大と期待されるもの G^X_k を体 k 上で決めておいて，その form として G^X を求める事にする．体上の hyperalgebra の理論を使うために，次の二つが key になる．

1) $\tilde{\rho}$ は coalgebra retract をもつ．

2) $\mathcal{U}$ はその derived subhyperalgebra $[\mathcal{U}, \mathcal{U}]$ に一致する．

この二つの事実により，G^X_k が次のように構成できる．まず $\tilde{\rho}$ の体 k への係数拡大

$$\tilde{\rho}_k : \mathcal{U}^X_k \longrightarrow hy_k(GL_M)$$

は、1)により単射である．次に、$\mathcal{U}_k \twoheadrightarrow \mathcal{U}_k^X$ の全射と 2)により、$\tilde{\rho}_k$ の像は、その derived subhyperalgebra と一致する．従って体上の hyperalgebra 理論により、GL_{M_k} ($= GL_M$ の k への係数拡大) の連結閉部分群スキームで、$\tilde{\rho}_k$ の像を hyperalgebra にもつものが一意に定まる．これを G_k^X と定義する．

このように定義された G_k^X のもつ性質を次に並べる．それらをチェックするのは特に困難な事でない．$\mathcal{U}_k^X$ が Birkhoff-Witt 型だから G_k^X は smooth であり，$(D^X)_k$ をふくむ．(一般に $\mathbb{Z}$-group scheme G の k への係数拡大を G_k と記す)．体の拡大 K/k に対しては $G_K^X = (G_k^X)_K$ である．k が閉体のとき，G_k^X はいわゆる線形代数群とみてよいが，これは半単純で，$(D^X)_k$ を極大 torus にもち，それに関するルート系はちょうど Φ に一致する．

G_k^X が表現 ρ や lattice M に依存しない事はむろんいえる．ここではそれを問題にしない．代数群にしろ hyperalgebra にしろ体上の理論はかなり整備されているので，好みに応じ，色々なアプローチが考えられる．

ここでは $\mathbb{Z}$ 上を問題にする．まず $G_{\mathbb{Q}}^X$ の form G^X を作る．そして任意の k に対し $G_k^X = (G^X)_k$ といえるか，G^X が ρ や M に依存しないかを考える．

一般に $\mathbb{Z}$ 上の Hopf 代数 A と，$A_{\mathbb{Q}}$ の Hopf ideal I に対し，

$A \cap I$（厳密には $A \longrightarrow A_{\mathbb{Q}}$ による I の逆像）は A の Hopf ideal になる．証明は易しい．そこで A は GL_M に対応するとし，I を $G^{\times}_{\mathbb{Q}}$ に対応する Hopf ideal にとる．$A \cap I$ に対応する GL_M の閉部分群スキームとして $G^{\times}$ を定義する．

$G^{\times}$ に対し，次の諸性質が，さしたる困難もなく検証できる．$G^{\times}$ は $D^{\times}$ をふくむ，GL_M の閉部分群スキームで連結 flat である．$(G^{\times})_{\mathbb{Q}}$ は $G^{\times}_{\mathbb{Q}}$ に一致し，$hy_{\mathbb{Z}}(G^{\times}) = \mathrm{Im}(\tilde{\rho})$ 従って $\mathcal{U}^{\times}$ と同形である．各 $\alpha \in \Phi$ に対し，$\mathbb{Z}$-群スキーム写像

$$x_{\alpha} : G_a \longrightarrow G^{\times}$$

でその引起す hyperalgebra 写像が

$$hy_{\mathbb{Z}}(G_a) = \mathcal{U}^{\alpha} \hookrightarrow \mathcal{U}^{\times} = hy_{\mathbb{Z}}(G^{\times})$$

と同一視されるものが一意に存在する．

ここまでは易しい．先に進むためには Chevalley の idea に従い，それを Hopf 代数の立場で整理する．すると前に述べた問が肯定的に解け，副産物として Chevalley 群スキームの reflexivity が出てくる．

包含写像 $D^{\times} \hookrightarrow G^{\times}$ と $x_{\alpha} : G_a \longrightarrow G^{\times}$ $(\alpha \in \Phi)$ すべてから得られる product map を考える．そのために，Φ の base をとり，それに関する正負のルートたち $\Phi^{\pm}$ に勝手な順序を入れて並べる．

$$\pi : \left(\prod_{\Phi^-} G_a\right) \times D^{\times} \times \left(\prod_{\Phi^+} G_a\right) \longrightarrow G^{\times}$$

をこうして得られる scheme map とする．π の定義域は，group 代数 $\mathbb{Z}[X]$ と多項式代数 $\mathbb{Z}[T_\alpha ; \alpha \in \Phi]$ のテンサー積

$$A = \mathbb{Z}[X] \otimes \mathbb{Z}[T_\alpha ; \alpha \in \Phi]$$

に対応するアフィン scheme である．G^X をあらわす可換 Hopf 代数を $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(G^X)$ であらわそう．π は単位元における tangent coalgebra (hyperalgebra と同様に定義される) の同型を引起し，A や $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(G^X)$ はその dual にふくまれるから，π は単射 algebra map

$$\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(G^X) \hookrightarrow A$$

に対応することが分る．このふくまれ方がどうなっているか，A は $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(G^X)$ からどうして得られるか，Chevalley が次のように答えている：

Chevalley の定理　$d = \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha \in X$ とおく．

a) d は $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(G^X)$ に属する．$A = \mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(G^X)[d^{-1}]$ である．

G^X_d を G^X の d に関する principal open subscheme とすれば，いいかえとして，

b) π は同型

$$\left(\prod_{\Phi^-} G_a\right) \times D^X \times \left(\prod_{\Phi^+} G_a\right) \simeq G^X_d$$

を引起す．

c) 勝手な体 K に対し，$G^X_d(K)$ は $G^X(K)$ で (Zariski 位相) に関し open dense である．

この定理から次の事実が次々に従う：

1) $G^{\times}_{k} = (G^{\times})_{k}$ が任意の体 k に対し正しい．なぜならc)により $(G^{\times})_{k}$ は連結となるから．

2) $\mathbb{Z}$-加群としての商 $A/\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(G^{\times})$ は torsion-free である．これもc)から容易に従う．

3) $G^{\times}$ は ρ や M に，次のいみで依存しない．$G^{\times}$ が M から来る事をはっきりさせるために $G^{\times}_{M}$ とかく事にする．別の admissible な表現 ρ' とその表現空間の admissible lattice M' があったとする．明らかに表現 $\rho \oplus \rho'$ も admissible で $M \oplus M' = M''$ は表現空間の admissible lattice である．対応して Chevalley 群スキーム $G^{\times}_{M}, G^{\times}_{M'}, G^{\times}_{M''}$ が考えられる．明らかに包含関係

$$G^{\times}_{M''} \subset GL_{M} \times GL_{M'} \subset GL_{M''}$$

が成立ち，射影すれば

$$G^{\times}_{M} \xleftarrow{pr_1} G^{\times}_{M''} \xrightarrow{pr_2} G^{\times}_{M'}$$

となる．この pr_1 又は pr_2 に対応する algebra map を $E \longrightarrow F$ とすれば

$$E_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} F_{\mathbb{Q}} \quad \text{かつ} \quad E[d^{-1}] \xrightarrow{\sim} F[d^{-1}]$$

である事が比較的簡単に分る．これと2)から，$E \longrightarrow F$ は同型でなくてはならない事がわかる．従って射影により

$$G^{\times}_{M} \xleftarrow{\sim} G^{\times}_{M''} \xrightarrow{\sim} G^{\times}_{M'}$$

である．このいみで $G^{\times}$ は ρ や M の選び方に依存しない．

$G^\times$がρやMに依存しないと言っても、この段階で$G^\times$の定義にρやMを用いているのは、応用上は便利だろうが、理論上は気持が悪い。すでに$hy_{\mathbb{Z}}(G^\times)=\mathcal{U}^\times$はChevalley baseから直かに定義されているから、$G^\times$を$\mathcal{U}^\times$からdirectに定義した方がきれいに思われる。次の4), 5)に見るように、それは3)の結果として得られる。

4) すべての有限$\mathbb{Z}$-自由$\mathcal{U}^\times$-加群は、必ずある$G^\times$の有理表現から来る。(証明) 今までのように$G^\times$は(ρ, M)から来ているとする。Nを有限$\mathbb{Z}$-自由$\mathcal{U}^\times$-加群とすれば$M_{\mathbb{C}}\oplus N_{\mathbb{C}}$はadmissible $\mathcal{L}$-加群で、$M\oplus N$をadmissible latticeにもつ。この$M\oplus N$から作られた$G^\times_{M\oplus N}$が元の$G^\times$と同形で、$G^\times_{M\oplus N}$はNを不変にするから、自然な$G^\times$のN上の有理表現が得られ、これが元の$\mathcal{U}^\times$の作用を引起す。

この4)は、実質的に次と同値である。

5) $G^\times$はreflexiveである。

(証明) $B=\mathcal{U}^\times$とおけば、$\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(G^\times)\subset B^\circ$がいえる。4)はすべての有限$\mathbb{Z}$-自由$B^\circ$-comoduleが必ず$\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(G^\times)$-comoduleである事を意味する。$B^\circ$は有限$\mathbb{Z}$-自由subcoalgebraの合併であるから$\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(G^\times)=B^\circ$でなくてはならない。

こうして、Chevalley methodの結果として、はじめに作った

$\mathcal{U}^X$ が reflexive hyperalgebra であって，対応する reflexive 群スキームが，Chevalley 群スキーム G^X に他ならない事が分った．

あとがき．有名な Kostant の "Groups over $\mathbb{Z}$" は本講演と実質的に殆ど同じ事を言っているように見える．しかしそこではそう言える根拠が明確に示されていないように思われる．少くとも私には長い事，なぜあのように少いページ数で Chevalley 群スキームの reflexivity（と実質的に同じと思われる事）が証明できるのか合点が行かなかった．Springer L.N. 131 にある Borel による Chevalley 群スキームの Survey には，上に述べた Chevalley の定理が述べられている．しかしこの Survey 自体はごちゃごちゃして分りにくい．Chevalley 群スキームの定義と構成の部分の論点を，$\mathbb{Z}$ 上の hyperalgebra をしっかり念頭において整理すれば，本講演のようになるであろう．