数理解析研究所講究録
第473巻 1982年 106-116

Weakly normal ring に関する若干の結果

兵庫教育大学　柳原弘志（Hiroshi Yanagihara）

§1. Bは1を含む可換環で，Aはその部分環で，BがA上整拡大になっているものとする。このとき，BにおけるAのseminormalization ${}_B^+A$ 及び weak normalization ${}_B^*A$ をそれぞれ次のように定義する：

$${}_B^+A = \{ b \in B \mid \mathrm{Spec}(A) \text{の任意の} \mathfrak{p} \text{に対し}, b/1 \in A_\mathfrak{p} + R(B_\mathfrak{p}) \}$$

$${}_B^*A = \{ b \in B \mid \mathrm{Spec}(A) \text{の任意の} \mathfrak{p} \text{に対し}, n>0 \text{が存在して}, (b/1)^{e^n} \in A_\mathfrak{p} + R(B_\mathfrak{p}) \}$$

ただし，e は体 $k(\mathfrak{p}) = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ の characteristic exponent とし，$R(B_\mathfrak{p})$ は $B_\mathfrak{p}$ の Jacobson radical とする。

更に，$A={}_B^+A$ 又は $A={}_B^*A$ のとき，それぞれ AはBで seminormal である，又は weakly normal であるという。定義より明らかに ${}_B^+A$，${}_B^*A$ はBとAの中間環で，$B \supset {}_B^*A \supset {}_B^+A \supset A$ となっている。

環の seminormal 拡大に関しては Traverso [5], Greco-Traverso [1] 等の結果があるが，weakly normal 拡大については，[5]

に対応する結果として，Manaresi [3] がある。Manaresi は weak normalization ${}^{*}_{B}A$ の新しい特徴付けを与えそれを用いることにより，環の weakly normal 拡大に関するいくつかの基本的な結果を得ている。一方，Hamann は $A={}^{+}_{B}A$ となる一つの判定方法を与えた．それを説明するために，まず次の定義を与える．

定義：B は環 A の拡大環とし　e, f を 1 より大きい自然数とする。もし，B の元 b が　$b^e \in A$, $b^f \in A$ をみたせば　$b \in A$ となるとき，A は B で (e, f)-closed であるという。又，1 より大きい自然数に対し，B の元 b が　$b^n \in A$ をみたすなら，$b \in A$ となるとき，A は B で n-closed であるという．

このとき，Hamann の結果は次のように述べられる．

定理 1.　A, B は上と同じとする。このとき次は同値である。

(i)　A は B で seminormal.

(ii)　A は B で $(2, 3)$-closed.

(iii)　A は B で (e, f)-closed，ただし e と f は互に素．

これに対し，伊藤史朗は次のような weak normal 拡大についての結果を得た。(cf. [2]).

定理2. A, Bは上と同じとするとき，次は同値である.

(i) AはBで weak normal.

(ii) (a) AはBで$(2,3)$-closed，かつ

(b) Bの元bに対し，$b^p \in A$，$pb \in A$となる素数pが存在すれば$b \in A$.

系. 上の定理2において，Aが標数$p>0$の体を含むときには，(ii)の条件は次の(ii)$'$とおきかえてもよい.

(ii)$'$ AはBでp-closed.

この系は筆者により，既に得られていたものであるが，伊藤の定理の special case として得られることは容易に確かめられる. 又，この系を用いることにより，Aが標数$p>0$の体を含む場合には

$${}^{*}_{B}A = \{ b \in B \mid b^{p^e} \in A \text{ となる } e \text{ が存在する} \}$$

となることも確かめられる.

§2. この節では，§1で述べた weak normal 拡大の特徴付けを用いて，若干の基本的な性質を示す. A, B, A', B'等はすべて1を含む可換環とする.

命題1．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A' \arrow[r, hook] & B' \end{tikzcd}$$

を可換環の pull-back diagram とする．又，B，B' はそれぞれ A，A' の整拡大とする。もし A' が B' で weakly normal なら A は B で weak normal である．

証明は定理2と pull-back diagram の定義より容易に分る．

系（Faithfully flat descent）．B は A の整拡大で $f: A \to A'$ は faithfully flat な環準同型とする．このとき，A' が $B' = A' \otimes_A B$ で weakly normal なら，A は B で weakly normal である。

実際，
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d] \\ A' \arrow[r, hook] & B' = A' \otimes_A B \end{tikzcd}$$
が pull-back diagram であることを見ればよい．

命題2．B を A の整拡大，S を A の積閉集合とする．このとき，A が B で weakly normal なら，A_S は B_S で weakly nomal である．

定理3. BはAの整拡大とするとき，次の(i)〜(iv)は互に同値である：

(i) AはBで weakly normal.

(ii) Spec(A)の任意の$\mathfrak{p}$について，$A_{\mathfrak{p}}$は$B_{\mathfrak{p}}$で weakly normal.

(iii) Aの任意の極大イデアル$\mathfrak{m}$について$A_{\mathfrak{m}}$は$B_{\mathfrak{m}}$で weakly normal.

(iv) $\mathrm{Ass}^{f}_{A}(B/A)$の任意の$\mathfrak{p}$について，$A_{\mathfrak{p}}$は$B_{\mathfrak{p}}$で weakly normal.

ただし，$\mathrm{Ass}^{f}_{A}(B/A)$は A-加群 B/A の weakly associated prime ideal の集合である。

系. BはAの整拡大とするとき，次の条件(i),(ii)が満たされれば，AはBで weakly normal である：

(i) $A/\mathfrak{p}$の標数が0であるようなAの任意の素イデアル$\mathfrak{p}$に対し，$A_{\mathfrak{p}}$は$B_{\mathfrak{p}}$で (2,3)-closed.

(ii) $A/\mathfrak{p}$の標数が$p>0$であるようなAの任意の素イデアル$\mathfrak{p}$に対し$A_{\mathfrak{p}}$は$B_{\mathfrak{p}}$で p-closed.

この系の逆は成立しない。すなわち，AがBで weakly normal であっても (i),(ii)が成り立つとは限らない。例えば$B=\mathbb{Z}[X]$, $A=\mathbb{Z}[X^p]$とすると，この反例を与えている。こ

こで　$\mathbb{Z}$は有理整数環，pは素数，Xは$\mathbb{Z}$上の不定元である．

命題3．BはAの整拡大でかつ　flat A-module とする．更に，$nil(B)\subset A$で，Aの極小素イデアルは有限個しかないとする．このとき，次がなりたつ：

(i)　AはBで seminormal．

(ii)　AがBで weakly normal であるための必要十分条件はAの各極小素イデアル$\mathfrak{p}$に対し$A_{\mathfrak{p}}$が$B_{\mathfrak{p}}$で weakly normal となることである．

系．B, Aは命題3と同じとし，Aは有限個の極小素イデアルしか持たないと仮定する．更に，Aは有理整数環$\mathbb{Z}$を部分環として含み，$\mathbb{Z}$の0と異なる元はAの零因子でないとする。このとき，AはBで weakly normal である．

§3．Bを可換環とし，Aはその部分環で　Bが finite A-module となっているものとする．$\mathfrak{p}$をAの素イデアルとし，$\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$を$A$との交わりが$\mathfrak{p}$となる$B$の素イデアル全体とする．各$i$に対し，$\mathfrak{q}_i$は$\sqrt{\mathfrak{q}_i}=\mathfrak{p}_i$となる準素イデアルで，$\mathfrak{p}B$を含むものとする．このとき明らかに，$\mathfrak{q}_i\cap A=\mathfrak{p}$と

なる。今，$A/\mathfrak{p}$ の商体を $k(\mathfrak{p})$，$B/\mathfrak{q}_i$ の全商環を Q_i とするとき，各 i に対し，$k(\mathfrak{p})$ から Q_i への自然な単射 j_i が存在する。$Q=\prod_{i=1}^{n} Q_i$ とし，$f: k(\mathfrak{p}) \longrightarrow Q$ を $p_i \circ f = j_i$ となる準同型とする。ただし，p_i は $Q=\prod_{i=1}^{n} Q_i$ から Q_i への自然な射影である。以後この f により $k(\mathfrak{p})$ を Q の部分体と考えることにする。

K を $k(\mathfrak{p})$ と Q の中間体とし，次の可換環の pull-back diagram を考える：

$$\begin{CD} D @>{i}>> B \\ @V{j}VV @VV{g}V \\ K @>{h}>> Q \end{CD}$$

ただし，h は包含写像で，g は合成写像 $B \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} B/\mathfrak{q}_i \longrightarrow Q=\prod_{i=1}^{n} Q_i$ である。このとき，D は $i(D)=\{b\in B \mid g(b)\in K\}$ と同一視でき，$D \supset A$ とみなせる。この D を $(B;\mathfrak{q}_1,\cdots,\mathfrak{q}_n)$ から K 上の glueing で得られた環という。又単に $\mathfrak{q}_1,\cdots,\mathfrak{q}_n$ の glueing ということもある。

この glueing は Traverso [5] によって与えられた素イデアルの glueing や Tamone [4] によって与えられた準素イデアルの glueing の一般化である。以下では，この glueing に関する基本的性質と Traverso [5] により示された seminormal な環の拡大に関する構造定理に対応する weakly normal な環の拡大に

ついての構造定理を与える。まず glueing D を特徴付ける次の結果が成立つ。

命題4. $A, B, D, \mathfrak{p}, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_i, K$ etc. は上と同じとするとき、次が成立つ:

(i) $\mathfrak{p}' = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ は D の素イデアルである。

(ii) $\mathfrak{q}_i \cap D = \mathfrak{p}'$ がすべての $i = 1, 2, \cdots, n$ に対し成立つ。

(iii) $\mathfrak{p}'$ は A との交わりが $\mathfrak{p}$ となる D の唯一つの素イデアルである。

(iv) $D/\mathfrak{p}'$ の商体 $k(\mathfrak{p}')$ は K と同型である。

系 D' を A と B の中間環で $g(D') \subset K$ となるものとすると $D \supset D'$ でかつ、$D' \cap (\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i)$ が A との交わりが $\mathfrak{p}$ となる D' の唯一つの素イデアルである。

$A, B, \mathfrak{p}, \mathfrak{p}_i$ は上と同じとし、Q_i を $B/\mathfrak{p}_i$ の商体、$Q = \prod_{i=1}^{n} Q_i$ とする。このとき、$k(\mathfrak{p})$ は Q の部分体と自然にみなせるが、Q には $k(\mathfrak{p})$ 上純非分離拡大である最大の部分体が存在することが容易に示される。これを K_0 とするとき、$\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$、$K = K_0$ として作った上の glueing D_0 のことを B の $\mathfrak{p}$ 上の weak glueing という。D_0 は B で weakly normal

になることは容易に示される.

次の定理は seminormal な環の拡大に関する構造定理([5], 定理 2.1)に対応する結果である.

定理4.(構造定理) A, B はネーター環で, A は B の部分環で, B は A-加群として有限生成であるとする. もし A が B で weakly normal なら, 環の列

$$B = B_0 \supset B_1 \supset \cdots \supset B_{n-1} \supset B_n = A$$

で次の条件をみたすものが存在する:

各 i に対し, B_{i+1} は A のある素イデアル上の B_i の weak glueing である.

最後に我々の意味の glueing で Serre の (S_2) 条件が保存されるかどうか考える. これは, [6], §3の結果の一般化である.

定理5. A, B, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{q}_i$, $Q = \prod_{i=1}^{n} Q_i$ 等は §3の初めに与えたものと同じとし, K は Q と $k(\mathfrak{p})$ の中間体とする. 更に, A はネーター環とする. D を K 上 glueing により $(B; \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n)$ から得られた環とするとき, 次が成りたつ:

(i) 各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し, ht $\mathfrak{p}_i = 1$ で B が (S_2) をみたせば, D も (S_2) をみたす.

(ii) D は B と異なり、各 $\mathfrak{p}_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ が B の正則元を含めば、$D_{\mathfrak{p}'}$ は depth が 1 である。ただし、$\mathfrak{p}'$ は A との交わりが $\mathfrak{p}$ となる D の唯一つの素イデアル $\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{q}_i$ である。更にある $\mathfrak{p}_i$ の height が 1 より大きければ、D は (S_2) をみたさない。

系. B はネーター環で、A は B で weakly normal な B の部分環とし、B は有限 A-加群であるとする。もし A の B における conductor $A:_A B$ の A における素イデアルの height が 1 より大きく、$A:_A B$ が B の正則元を含めば、A は (S_2) をみたさない。

参 考 文 献

[1] S. Greco and C. Traverso, "On seminormal schemes," Compositio Math. 40 (1980), 325−365.

[2] S. Itoh, "On weak normality and symmetric algebras," to be submitted to J. Algebra.

[3] M. Manaresi, "Some properties of weakly normal varieties," Nagoya Math. J., Vol. 77 (1980), 61−74.

[4] G. Tamone, "Su una generalizzazione della nozione di incollamento," Atti Accad. Lincei, Ser. VIII, Vol. LXV (1980), 107–112.

[5] C. Traverso, "Seminormality and Picard group," Ann. Scuola Nor. Sup. Pisa, Vol. 24 (1970), 61–74.

[6] H. Yanagihara, "On gluings of prime ideals," Hiroshima Math. J. Vol. 10 (1981), 351–363.