数理解析研究所講究録
第474巻 1982年 1-6

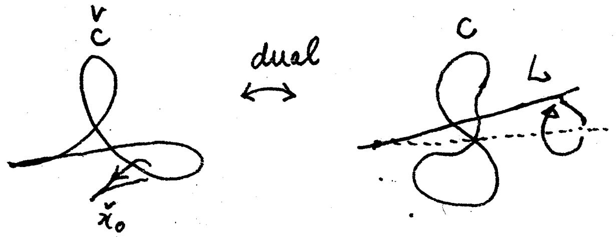
Maximal cuspidal curve の補空間の基本群について

九大・理 金子譲一

1° $C\subset \mathbb{P}^2$ を n 次代数曲線，$\check{C}\subset\check{\mathbb{P}}^2$ をその双対曲線とする．C の非特異モデルを R，その n 次対称積を $R^{(n)}=\overbrace{R\times\cdots\times R}^{n\text{ケ}}/\mathfrak{S}_n$，$D=\{(x_1\cdots x_n)\in R^{(n)}\mid \exists i\neq j,\ x_i=x_j\}$ とする．準同型

$$\pi_1(\check{\mathbb{P}}^2-\check{C})\longrightarrow \pi_1(R^{(n)}-D)$$

を以下のようにして与えることができる．$\pi_1(\check{\mathbb{P}}^2-\check{C})$ の基点を $\check{x}_0$，$L\subset\mathbb{P}^2$ をその双対直線とするとき，$\pi_1(\check{\mathbb{P}}^2-\check{C},\check{x}_0)$ の元に対して，L から出発して L に戻ってくる $\mathbb{P}^2$ の直線の"運動"が loop の上の点の双対直線をとることにより定まる．しかもこの運動の途中で直線が C の特異点を通ったり，また C に接したりすることはない．故に，C とこの直線との交点 n ケの，互いに衝突せずまた C の特異点を通らぬ"運動"がえられ，これは R 上にもち上がるから $\pi_1(R^{(n)}-D)$ の元を定める．この対応がもとめる写像を与える。この写像の ker. coker は何かという問題



が生ずる。ところで、$p = R$の種数、$n \geq 2p-1$のとき、$R^{(n)}$は、Rのヤコビ多様体$J(R)$上の$\mathbb{P}^{n-p}$束であった。このファイバー構造を用いて、次の完全系列を証明することができる。

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathbb{P}^{n-p} - \mathbb{P}^{n-p} \cap D) \longrightarrow \pi_1(R^{(n)} - D) \xrightarrow{(*)} \pi_1(J(R)) \longrightarrow 1.$$

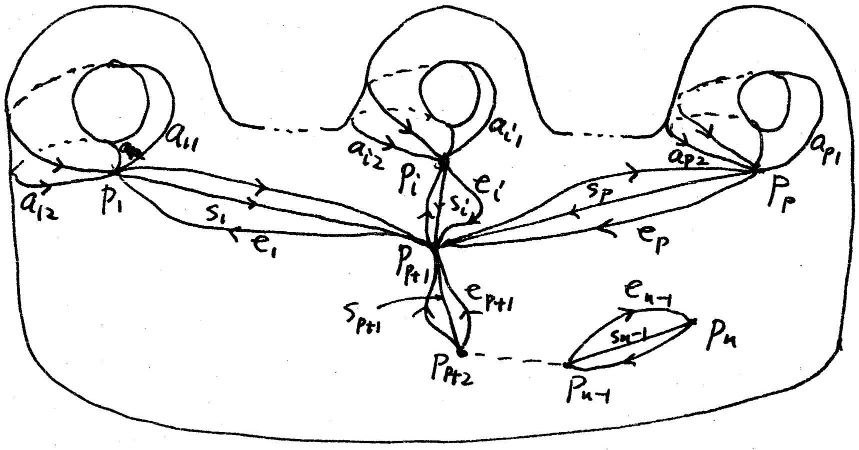
ここに、$\overbrace{\mathbb{P}^{n-p}}^{\text{ファイバー}}$は、very ample な linear series に対応するものをとる。また(*)は、abel-jacobi 写像により induce されるものとする。$P \subset \mathbb{P}^{n-p}$を一般な2-planeとすれば、$\pi_1(\mathbb{P}^{n-p} - \mathbb{P}^{n-p} \cap D) \cong \pi_1(P - P \cap D)$。$\check{C} \equiv P \cap D$は、$C$として、種数$p$、次数$n$で node のみもつ、$R$と双有理な平面曲線をとったときの双対曲線であって、P一般ゆえ、node と cusp のみを特異点とするから、次数$2(n+p-1)$、cusp $3(n+2p-2)$個、node $2(n-2)(n-3)+2p(2n+p-7)$個をもち、同じ degree, genus で最大個の cusp をもつ曲線である。

$\pi_1(R^{(n)} - D)$の有限表示は、Zariski によって与えられている。従って、Reidemeister-Schreier の方法により、$\pi_1(P - \check{C})$の一般には、無限な(即ち、生成元、基本関係式とも無限な)表示を与えることができる。Zariski [2] は、このようにして、$p=1$のとき、無限表示を求め、それを整理していって、有限表示にまで reduce した。我々の目標は、これをp:一般のときに実行することである。そのためには、n次組みひも群の$\pi_1(R^{(n)} - D)$の表示を Zariski のそれと

異なったものにとることがKey-pointとなる.

2°. 組みひも群の有限表示.

$P=(p_1\cdots p_n)$ を $R^{(n)}-D$ の基点にとる. Rの dissections a_{ij}, $1\le i\le p$, $j=1,2$ を, $a_{i1}\cap a_{i2}=p_i$ かつ. $a_{11}a_{12}^{-1}a_{11}^{-1}a_{12}\cdots\cdots a_{p1}a_{p2}^{-1}a_{p1}^{-1}a_{p2}$ が 2-cell になるようにとる.(下図参照).
$p_{p+1},\cdots,p_n$ は, この2-cellの内部にあるとし, それらを向きを一定にとった線分 $s_1\cdots s_{n-1}$ で結ぶ.



$\pi_1(R^{(n)}-D)$ の生成元を以下のようにとる: e_i は $1\le i\le p$ (resp. $p+1\le i\le n-1$) のとき. p_i を $\underbrace{p_{p+1}}_{(resp.\ p_{i+1})}$ に, ~~その~~ $\underbrace{p_{p+1}}_{(resp.\ p_{i+1})}$ を p_i に, 上図の如くいれかえる運動を表わす.

p_i, $1\le i\le p$, が dissection a_{ij} にそって上図の如く動く運動を a_{ij} で表わす.

<u>Theorem 1</u>. $\pi_1(R^{(n)}-D)$ は、生成元 e_i $1\le i\le n-1$, a_{ij} $1\le i\le p$, $j=1,2$, をもち、基本関係式は以下の通り:

(1) $e_i e_j = e_j e_i$, $p+1\le i,j\le n-1$, $|i-j|\ge 2$, or $1\le i\le p$, $p+2\le j\le n-1$

(2). $e_i e_{i+1} e_i = e_{i+1} e_i e_{i+1}$, $1\le i\le n-2$.

(3) $e_i e_{i+1} e_i^{-1} e_j = e_j e_i e_{i+1} e_i^{-1}$, $1\le i< j-1\le p$.

(4) $a_{ij} e_k = e_k a_{ij}$, $i\ne k$, $j=1,2$

(5) $a_{ij} a_{kl} = a_{kl} a_{ij}$, $i\ne k$, $j,l=1,2$.

(6) $(e_i^{-1} a_{ij})^2 = (a_{ij} e_i^{-1})^2$, $1\le i\le p$, $j=1,2$

(7). $a_{i2} a_{i1}'^{-1} a_{i2}^{-1} a_{i1}' = e_i^2$., $a_{i1}' = e_{i1}^{-1} a_{i1} e_{i1}$, $1\le i\le p$.

(8) $\left(\prod_{i=1}^{p} e_i a_{i2}^{-1} a_{i1} a_{i2} a_{i1}^{-1} e_i\right) e_{p+1}\cdots e_{n-2} e_{n-1}^2 e_{n-2}\cdots e_{p+1} = 1$.

ここに $\prod_{k=1}^{\ell} x_k$ は $x_1 x_2\cdots x_\ell$ を表わす.

証明は、Zariski [2] の与えた生成元、基本関係式との比較による。即ち、これらの生成元によって Zariski の生成元が表わされることを示し、これらの関係式から、Zariski の関係式が実際に従うことを示すことによる。

3° 主定理

Reidemeister-Schreier の方法を、完全系列

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2-C) \longrightarrow \pi_1(R^{(n)}-D) \longrightarrow H_1(R) \longrightarrow 1$$

へ適用すれば、$\pi_1(\mathbb{P}^2-C)$ の表示がえられる。これを

reduction していけば、結局、次のようになる。

Theorem 2. $\pi_1(\mathbb{P}^2 - \check{C})$ は次の有限表示をもつ。

生成元: $e_{ik\ell} \equiv a_{i1}^{k} a_{i2}^{\ell} e_i (a_{i1}^{k} a_{i2}^{\ell})^{-1}$, $1 \le i \le p$, $k, \ell = 0, 1$

e_j, $p+1 \le j \le n-1$.

関係式:

(1') $e_{ik\ell}\, e_{i+1,k'\ell'}\, e_{ik\ell} = e_{i+1,k'\ell'}\, e_{ik\ell}\, e_{i+1,k'\ell'}$

$1 \le i \le p-1$, $k, \ell, k', \ell' = 0, 1$ 及び $(k,\ell), (k',\ell') = (0,2), (2,0), (2,1)$.

(2') $e_{pk\ell}\, e_{p+1}\, e_{pk\ell} = e_{p+1}\, e_{pk\ell}\, e_{p+1}$, $k, \ell = 0, 1$ 及び $(k,\ell) = (0,2)$, $(2,0)$, $(2,1)$,

ここで、

$$e_{i02} = e_{i01}\, e_{i00}\, e_{i01}^{-1}$$
$$e_{i20} = e_{i10}\, e_{i00}\, e_{i10}^{-1} \qquad 1 \le i \le p.$$
$$e_{i21} = e_{i11}^{-1}\, e_{i01}\, e_{i11}$$

以下、$k, \ell, k', \ell', k'', \ell''$ は、0か1の勝手な値をとるものとする。

(3') $e_{ik\ell}\, e_{i+1,k'\ell'}\, e_{ik\ell}^{-1}\, e_{jk''\ell''} = e_{jk''\ell''}\, e_{ik\ell}\, e_{i+1,k'\ell'}\, e_{ik\ell}^{-1}$,

$1 \le i < j-1 \le p-1$

(4') $e_{ik\ell}\, e_{i+1,k\ell}\, e_{ik\ell}^{-1}\, e_{p+1} = e_{p+1}\, e_{ik\ell}\, e_{i+1,k\ell}\, e_{ik\ell}^{-1}$, $1 \le i \le p-1$

(5') $e_{jk'\ell'}\, e_{ik\ell} (e_{i01}\, e_{i11}\, e_{i10}\, e_{i00})^{-1} e_{ik\ell}$

$= e_{ik\ell} (e_{i01}\, e_{i11}\, e_{i10}\, e_{i00})^{-1} e_{ik\ell}\, e_{jk'\ell'}$. $1 \le i \ne j \le p$

(6′) $e_{ik\ell}\, e_j = e_j\, e_{ik\ell}$, $1 \le i \le p$, $p+2 \le j \le n-1$.

(7′) $e_i\, e_{i+1}\, e_i = e_{i+1}\, e_i\, e_{i+1}$, $p+1 \le i \le n-1$

(8′) $e_i e_j = e_j e_i$, $p+1 \le i, j \le n-1$, $|i-j| \ge 2$.

(9′) $\left(\prod_{i=1}^{p} e_{i01}\, e_{i11}\, e_{i10}\, e_{i00}\right) e_{p+1} \cdots e_{n-2}\, e_{n-1}^{2}\, e_{n-2} \cdots e_{p+1} = 1$.

証明は、計算のみである。Zariskiのそれと、かなり平行にいく。詳細は本論文を参照して下さい。

文献

[1] Dolgachev-Libgober : On the fundamental group of the complement to a discriminant variety, In: Algebraic Geometry, Lect. Notes in Math. vol 862, pp 1~25.

[2] Zariski, O : The topological discriminant group of a Riemann surface of genus p. Amer. J. Math. 59 (1937), pp. 335~358.