

写像の特異点に対する MORSE の不等式

千葉大理 福田拓生

この話しは、 C^∞ 写像の特異点のまわりでおきる現象に關するものである。 C^∞ 写像では、いくらでもひねくれたものが構成できる。そこで H. Whitney と R. Thom は、性質の良い写像のみを研究対象とすることを提唱し、構造安定性の問題(全ての写像は安定写像で近似できるか?)を提起した。(1950年代後半)。この問題は 1960年代後半から 1971 年にかけて、J. Mather によって完全に解決された。以来この分野の研究は、“良い写像” “良い特異点” の解明にむけられている。現在研究対象として考えられている良い特異点は、安定特異点と有限確定特異点である。安定特異点は有限確定である。この稿では この有限確定特異点(有限回のジェットでその位相型がまわってしまう)とよばれるものが、非常に一般的(有限確定でないものが、写像芽の空間の中で無限次元の部分集合となる。)であるにもかかわらず、かなりきちんとした構造をもつことを報告する。

目次

- §1. 安定性 と 有限確定性 (定義)
 §2. 結果 (概略)
 §3. 背景.
 §4. 基本定理
 §5. 結果 (詳細)
 §6. 証明.

§1. 安定性 と有限確定性. (定義).

定義 (C^∞ 同値, C^0 同値)

二つの C^∞ 写像 $f_1: M_1 \rightarrow N_1$ と $f_2: M_2 \rightarrow N_2$ が C^∞ (resp C^0) 同値 であるとは, 等式 $H \circ f_1 = f_2 \circ h$ を満たす C^∞ 微分同相写像 (resp. 同相写像) $h: M_1 \rightarrow M_2$ 及び $H: N_1 \rightarrow N_2$ が存在するときをいう。(下左図)

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{f_1} & N_1 \\ h \downarrow & \curvearrowright & \downarrow H \\ M_2 & \xrightarrow{f_2} & N_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (M_1, p_1) & \xrightarrow{\quad} & (N_1, f_1(p_1)) \\ h \downarrow & \curvearrowright & \downarrow H \\ (M_2, p_2) & \xrightarrow{f_2} & (N_2, f_2(p_2)) \end{array}$$

二つの写像芽 $f_1: (M_1, p_1) \rightarrow (N_1, f_1(p_1))$, $f_2: (M_2, p_2) \rightarrow (N_2, f_2(p_2))$ が C^∞ (resp. C^0) 同値 であるとは,

$H \circ f_1 = f_2 \circ h$ をみたす C^∞ 微分同相写像 (resp. 同相写像) の芽が存在するときをいう。(前頁右図式)

定義 (有限確定特異点). 写像芽 $f: (M, p) \rightarrow (N, q)$ が C^∞ - k -確定 (resp. C^0 - k -確定) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ f の p における k -jet を $j^k f(p)$ であらわすとき, $j^k g(p) = j^k f(p)$ なる任意の C^∞ 写像芽 $g: (M, p) \rightarrow (N, q)$ が f に C^∞ 同値 (resp. C^0 同値) になる。

ある $k > 0$ に対して C^∞ - k -確定 (resp. C^0 - k -確定) となるとき C^∞ -有限確定 (C^0 -有限確定) といい。

定義 (安定写像, 安定特異点). 多様体 M から N への C^∞ 写像全体の集合 $C^\infty(M, N)$ に Whitney の位相を入れておく。この位相で二つの写像 $f, g: M \rightarrow N$ が “近い” とは 任意の点 $p \in M$ に対して, それらの値 $f(p)$ と $g(p)$ が近いばかりでなく, 或る階数, 例えは k 階, までの jet $j^k f(p)$ と $j^k g(p)$ も又近い値をとることを意味する。

さて, 写像 $f: M \rightarrow N$ が C^∞ 安定 (resp. C^0 安定) である \iff f の近傍 $N(f) \subset C^\infty(M, N)$ が存在して,

$N(f)$ の任意の元が f に C^∞ 同値 (resp C^0 同値) になる。

C^∞ 安定写像 (resp. C^0 安定写像) の特異点 及びそれらに C^∞ 同値な特異点を C^∞ -安定特異点 (resp, C^0 -安定特異点) という。

§2. 結果の概略.

この話では、 \mathbb{R}^n から平面 \mathbb{R}^2 への平面写像の特異点の話に限定する。 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $p \geq 3$, の場合にも同種の結果が得られるが、あまりよくわかっていない。

$M(n, 2) = \{f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0) \mid C^\infty \text{ 写像 } \}$ とおく。そのとき、次のことが成立つ。

結果 $M(n, 2)$ の無限余次元部分集合 Σ_∞ が存在して次の条件をみたす。

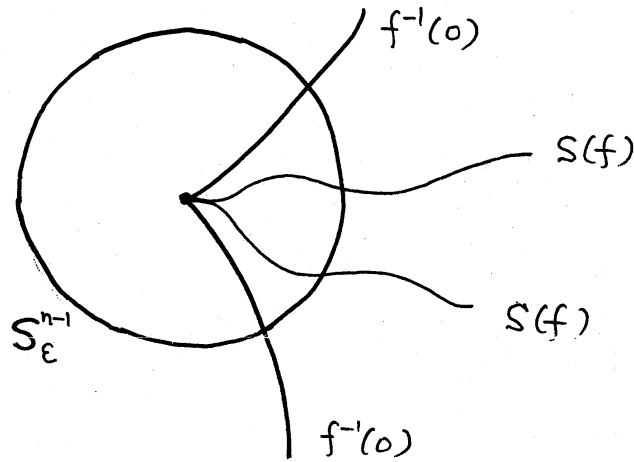
- 1) $f \in M(n, 2) - \Sigma_\infty \implies f$ は C^0 -有限確定
- 2) $f \in M(n, 2)$ が C^0 -有限確定 $\implies f$ は $M(n, 2) - \Sigma_\infty$ の元のどれかに C^0 同値.

- 3) C^∞ 写像 $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ の原点における芽が

$M(n, 2) - \Sigma_\infty$ の元とする。すると

イ) 充分小なる $\varepsilon > 0$ に対し $f^{-1}(0) \cap S_\varepsilon^{n-1}$ は C^∞ 多様体となる。(中となる場合もある)。但し S_ε^{n-1} は \mathbb{R}^n の原点を中心とする半径 ε の球面。

ロ) f の特異点の集合 $S(f)$ は一次元の集合で $S(f) \cap \{0\}$ は滑らかな曲線となる。



ハ) (Euler-Poincaréの等式). §5で詳しくみるように, Morse理論から自然に導かれる方法により, $S(f)$ の各枝に指標を定義できる。 $m_i(f)$ で指標が i の $S(f)$ の枝の数をあらわすとき次の等式を得る。($\chi(\dots)$ は Euler 数)

$$\sum (-1)^i m_i(f) + \chi(f^{-1}(0) \cap S_\varepsilon^{n-1}) = 1 + (-1)^{n-1}$$

ニ) $f^{-1}(0) = \{0\}$ のとき, 更に詳しい Morse 型の不等式を得る。($b_i(M)$ で M の i 次 Betti 数をあらわす。)

$$\begin{cases} m_0(f) \geq b_0(S^{n-1}) \\ m_1(f) - m_0(f) \geq b_1(S^{n-1}) - b_0(S^{n-1}) \end{cases}$$

$$m_2(f) - m_1(f) + m_0(f) \cong b_2(S^{n-1}) - b_1(S^{n-1}) + b_0(S^{n-1})$$

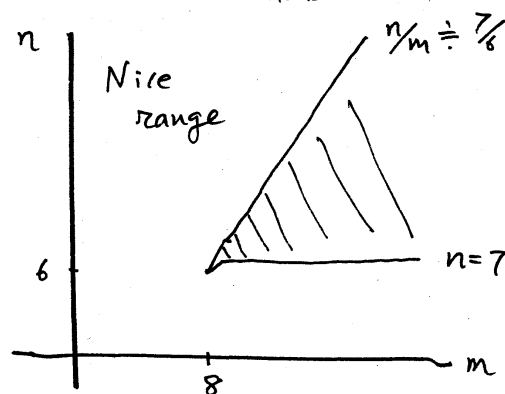
$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i m_i(f) = \chi(S^{n-1}).$$

§3 背景*

* この節に興味のある人は [W], [F3] を参照して下さい。

何故 上のような結果を求めたか を説明するには, C^∞ 写像の局所理論の現状を説明するのが一番である。J. Mather の安定性定理によると

A) $C^\infty(M^m, N^n)$ の中で C^∞ 安定写像が稠密に存在する必要十分条件は, 多様体の構造によらず, 次元の組 (m, n) のみにより, それは (m, n) が 次の ~~図~~ グラフの斜線の外にあることである。このとき (m, n) を nice dimension といい, nice dimension の集合を nice range といい。



B) C^0 安定写像は次元に関係なく、いつでも稠密に存在する。

さて、局所理論にかぎって現状をみてみると、

I) Nice range における C^∞ 安定特異点の分類は完成している。(J. Mather, J. Damon) 又この場合 C^0 -同値による分類と C^∞ -同値による分類は一致する。(J. Damon).

II) Nice range の外では、 C^0 安定特異点の C^0 -同値による分類が意味をもつ。しかし今までの所、このことに関しては何ら結果がない。困難の原因は、I)においては、Malgrangeの予備定理により、 C^∞ 安定特異点の C^∞ 分類が、付随する環の分類に帰着されたが、位相的分類には今までの所、代数が使えないからである。

III) IIの観点から C^0 安定特異点に対する位相不変量の開発が望まれるが、J. Damonの二・三の結果以外あまり知られていない。

IV) C^∞ 及び C^0 有限確定特異点 Complex holomorphic

の場合の孤立特異点・complete Intersection に相当する。従って当然研究すべきものである。

i) C^∞ 有限確定性の判定条件

- 1) 関数の場合は「ほぼ完全」といえる結果がある。
- 2) 写像の場合には、 \mathbb{R} コレエレの条件(代数により計算可能なもの)をみたせば C^∞ - k -確定であるという形のものがいくつかある。しかし必要十分条件ではなく、幾人かの人々が頑張って改良しつつある。主な道具は Malgrange の予備定理と中山の補題である。

ii) C^0 有限確定性の判定条件.

- 1) 関数の場合は完全にわかっている。(T.C. Kuo 他)
- 2) 写像の特異点の場合には、ほとんどわかっていない。(最近 石川剛朗(京大)により、 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ の場合の結果が得られた。)

iii) 安定特異点・有限確定特異点のまわりで起る現象を解析したいが、ほとんど結果がない。著者が知っている唯一の結果は、有限型の局所被覆 $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ の位相被覆度を f に付随する局所環 $\mathcal{O}(f)$ に属する量であらわせる Levine-Eisenbud の定理である。この種の定理の一般化の試みが期待される。

V) 結論として, その重要性にもかかわらず, C^∞ 写像の特異点の位相的分類及び解析は, 今までの所, ほとんど何もわかっていない。

§2 に述べた結果は IV) の iii) に沿うものである。

§4 基本定理.

§2 で述べた結果の基となる定理は次のものである。まづ記号を定める。

$$\mathcal{M}(n, p) = \{ f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0) \text{ } C^\infty \text{ 写像芽} \}$$

$$S_\delta^{p-1} = \{ y \in \mathbb{R}^p \mid \|y\| = \delta \}$$

$$D_\varepsilon^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \varepsilon \}$$

$[f]_0$: 写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ に対して, その原点における芽.

定理 1. $([F_1], [F_2])$ $\mathcal{M}(n, p)$ の無限余次元の部分集合 Σ_∞ で次の条件をみたすものが存在する。

1) $[f]_0 \in \mathcal{M}(n, p) - \Sigma_\infty \Leftrightarrow [f]_0$ は C^0 -有限確定

2) 任意の C^0 -有限確定写像芽は $\mathcal{M}(n, p) - \Sigma_\infty$ の

どれかの元に C^0 -同値.

3) $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ で, $[f]_0 \in \mathcal{M}(n, p) - \Sigma_\infty$

\Rightarrow 1) 充分小なる $\varepsilon > 0, \delta > 0$ に対して

$D_\varepsilon^n \cap f^{-1}(S_\delta^{p-1})$ は (境界のある) C^∞ 多様体

2) 制限写像 $f: D_\varepsilon^n \cap f^{-1}(S_\delta^{p-1}) \rightarrow S_\delta^{p-1}$ は位相安定写像で, その位相型は $[f]_0$ の位相型を定める.

注意. 1) の条件のみをみたす Σ_∞ の存在は R. Thom [T₁] により知られていた。J. Mather は, この定理を改良して, C^0 安定写像の稠密性を証明した。この論文 [T] の証明は難解で, "extremely sketchy" と評されている。著者は, これをなんとか理解しようともかいていて, ~~2)~~ 3) に気づいた。

さて, 上の定理の 1) 2) から C^0 有限確定特異点がかかなり一般的であることがわかる。一方 位相安定写像 $f: M \rightarrow N$ に対しては, いろいろと大域的な結果 ($N = \mathbb{R}$ の場合には Morse の不等式, より一般には, 特異集合と特性類の関係) が知られている。(例えは R. Thom [T₂], 安藤良文 [A₁] [A₂] 参照) それでこれらの結果と定理 1) 3) の 2) を組合せると C^0 有限確定特異点のまわりにはあらわゆる特異点と $D_\varepsilon^n \cap f^{-1}(S_\delta^{p-1})$

の構造 (同じだが $f^{-1}(0) \cap S_\varepsilon^{n-1}$ の構造) との向の関係が
 3113わかる。次節で、それを $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ の場合にみる。

§5. §2 の結果の詳しい考察.

Σ_∞ を前節の定理1で得られたものとする。今 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$
 でその原点における芽 $[f]_0$ が $[f]_0 \in \mathcal{M}(n, 2) - \Sigma_\infty$ とする。
 あると定理1の3) から、充分小なる $\varepsilon > 0$ と $\delta > 0$ に対し
 て、制限写像

$$f_{\varepsilon, \delta} = f|_{D_\varepsilon^n \cap f^{-1}(S_\delta^1)} : D_\varepsilon^n \cap f^{-1}(S_\delta^1) \rightarrow S_\delta^1$$

は位相安定写像となる。 S_δ^1 に反時計まわりの向きをつける。
 S_δ^1 は1次元多様体なので、局所座標で考えることにより、
 $f_{\varepsilon, \delta}$ の特異点を関数の臨界点と考えることができる。今
 $f_{\varepsilon, \delta}$ が位相安定なので、その特異点は全て非退化な臨界点
 となり、ように Index (指標) が、Morse 関数の場合と
 同じく、定義できる。

さて、 $m_\lambda(f_{\varepsilon, \delta}) = (\text{Morse 関数と考えたときの}) f_{\varepsilon, \delta}$ の
 指標 λ の臨界点の個数

$b_i(M) = M$ の i 次元 Betti 数

$\chi(M)$: M の Euler 標数

とおく。

定理 2. f, ε, δ を上のとおりとする。このとき次が成立つ。

1) (Euler-Poincaré の等式)

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i m_i(f_{\varepsilon, \delta}) + \chi(f^{-1}(0) \cap S_{\varepsilon}^{n-1}) = \chi(S_{\varepsilon}^{n-1})$$

2) 特 $I = f^{-1}(0) \cap D_{\varepsilon}^n = \{0\}$ のとき 次の Morse 型の不等式が成立つ。

$$\left\{ \begin{array}{l} m_0(f_{\varepsilon, \delta}) \geq b_0(S_{\varepsilon}^{n-1}) = 1 \\ m_1(f_{\varepsilon, \delta}) - m_0(f_{\varepsilon, \delta}) \geq b_1(S_{\varepsilon}^{n-1}) - b_0(S_{\varepsilon}^{n-1}) \\ m_2(f_{\varepsilon, \delta}) - m_1(f_{\varepsilon, \delta}) + m_0(f_{\varepsilon, \delta}) \geq b_2(S_{\varepsilon}^{n-1}) - b_1(S_{\varepsilon}^{n-1}) + b_0(S_{\varepsilon}^{n-1}) \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i m_i(f_{\varepsilon, \delta}) = \chi(S_{\varepsilon}^{n-1}) = 1 + (-1)^{n-1} \end{array} \right.$$

2) の証明が次節で与えられる。1) の証明は [F₂] を参照。

さて、上の 1) 2) にあらわされる $m_i(f_{\varepsilon, \delta})$ が ε, δ によらず一定であれば、§2 で述べた結果と同じ結果となる。実際

1) $m_i(f_{\varepsilon, \delta})$ は ε, δ を充分小さくとるとき, ε, δ によらず一定であることがわかる。

更に詳しく述べると

$$\begin{aligned} \text{2) } \{f_{\varepsilon, \delta} \text{ の臨界点} \} &= \cancel{D_\varepsilon^n} \cap f^{-1}(S'_\delta) \cap \{f \text{ の特異点} \} \\ (\text{更に } \delta \text{ を小さくすると}) &= f^{-1}(S'_\delta) \cap \{f \text{ の特異点} \} \end{aligned}$$

となる。又

1) p を f の特異点とし $\|f(p)\| = \delta$ とする。すると p は $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ の fold 型の特異点で 適当な座標 $(\xi_1, \dots, \xi_n), (\eta_1, \eta_2)$ のもとに 次の型にあらわせる。

$$*) \begin{cases} \eta_1 = \xi_1 \\ \eta_2 = -\xi_2^2 - \xi_3^2 - \dots - \xi_\lambda^2 + \xi_{\lambda+1}^2 + \dots + \xi_n^2 \end{cases}$$

もし (η_1, η_2) の向きを \mathbb{R}^2 の正の向きにとると, この λ は $f_{\varepsilon, \delta}$ の臨界点 p の指標と一致する

2) f の特異点の集合 $S(f)$ は, §2 の図で示したように, 原点から何本かの枝が出た形になっているが, それぞれの枝ではその特異点の標準型は一致する。したがって *) の型の特異点の枝の指標を λ と定めると,

$$m_\lambda(f_{\varepsilon, \delta}) = S(f) \text{ の index } \lambda \text{ の枝の数}$$

となり, §2 の等式, 不等式が 定理2 から得られる。

§6. 定理 2.2) (§5) の証明.

$[f]_0 \in \mathcal{M}(n, 2) - \Sigma_\infty$ で $f^{-1}(0) = \{0\}$ とする。 δ を充分小さくすると $f^{-1}(S'_\delta) \subset D_\varepsilon^n$ となる。従って

$$D_\varepsilon^n \cap f^{-1}(S'_\delta) = f^{-1}(S'_\delta) \quad \text{となり}$$

これは境界のない多様体となる。 $\delta \rightarrow 0$ のとき $f^{-1}(S'_\delta)$ は原真に縮んでいくので、 $f^{-1}(S'_\delta)$ はホモトピー-球面である。

一方、定理 1 の 3) より制限写像

$$f: f^{-1}(S'_\delta) \rightarrow S'_\delta$$

は安定写像で、従って f の値は \mathbb{R}^2 はなにか、 f は Morse 関数と考えられる。(§5 の始めの部分の復習)。

一方、 S'_δ の普遍被覆 $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S'_\delta$ を考える。

$f^{-1}(S'_\delta)$ がホモトピー-球面なので基本群 $\pi_1(f^{-1}(S'_\delta)) = \{0\}$ となり、 f の lifting $\bar{f}: f^{-1}(S'_\delta) \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する。

$$\begin{array}{ccc} & \bar{f} & \mathbb{R} \\ & \nearrow & \downarrow \pi \\ f^{-1}(S'_\delta) & \xrightarrow{f} & S'_\delta \end{array}$$

すると、この \bar{f} は、正真正明の Morse 関数で、 f と \bar{f} の臨界点及びこれらの指標は一致するので、 \bar{f} に対する Morse の不等式より、定理 2.2) を得る。 証明終

文 献

- [A₁] 安藤良文: ある型の Thom-Boardman の特異集合を持たない
微分可能写像について, 数学, 30-3 (1978), 38-49
- [A₂] Y. Ando, Elimination of certain Thom-Boardman singularities
of order 2. J. Math. Soc. Japan 34-2 (1982) 241-268
- [F₁] T. Fukuda, Local topological properties of differentiable
mappings I, Invent. math. 65 (1981) 227-250
- [F₂] ----- II, to appear
- [F₃] 福田拓生: 微分可能写像の特異点論, 数学, 34-2 (1982) 116-139
- [T₁] R. Thom, Local topological properties of differentiable
mappings, Colloq. on differential analysis, Oxford
Univ. Press (1964)
- [T₂] R. Thom, Les singularités des applications différentiables,
Ann. Inst. Fourier, 6 (1955-56), 43-87.
- [W] C.T.C. Wall, Finite determinacy of Smooth map-germs I, II,
Bull. London Math. Soc. (1981), 481-539.
- [L-E] D. Eisenbud and H. Levine, An algebraic formula for the degree
of a \mathbb{C} map germ, Ann. of Math. 106 (1977) 19-44

尚 J. Mather, J. Damon の仕事については, [F₃] [W] の
文献表を参照して下さい。[W] は この時点での, 微分可能写
像の特異点 (局所理論) に関する最良の文献表である。(もちろ
ん, 本文も秀れた Survey である)