数理解析研究所講究録
第 474 巻 1982 年 75-87

Torus embeddings と cusp singularities

東北学院大学　教養部　土橋宏康

§0　2次元cusp特異点(V, p)のminimal resolution $\pi : U \longrightarrow V$ の例外集合 $X = \pi^{-1}(p)$ は有理曲線のcycleとなるから，Xのdual graphはS^1の単体分割になる。又その各頂点に対応する曲線のself-intersection numberを付けておけば，これからX及びVは完全にわかる。実際S^1の単体分割の各頂点にすべて−2以下でそのうちの少くとも1つは−2より小さい整数を付けたものに対して，これを例外集合のdual graphに持つような2次元cusp特異点が一つ決まる。そこで，これの3次元への一般化として，例外集合がcompact(実)曲面Tの3角形分割であるような特異点をtorus embeddingsを使って構成することを考える。このような特異点の例として，知られているものではHilbert modular cusp特異点がある。この場合Tは2次元実torusとなる[4]。この他にも，$g(T) > 1$となるもの，あるいはTがnon−

orientableで $\chi(T)<0$ となる例も得られる。

§1. $N=\mathbb{Z}^n$, $N_{\mathbb{R}}=N\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ とする。$T_N=N\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}^*$ $(\cong(\mathbb{C}^*)^n)$, $\mathrm{ord}=-\log|\ |: T_N\to N_{\mathbb{R}}$ とすれば, $GL(N)$は T_N に自然に作用し, ord は $GL(N)$-同変写像となる。

<u>定義</u> $\mathcal{S}=\{(C,\Gamma)\mid C$ は $N_{\mathbb{R}}$ の cone, Γ は $GL(N)$ の部分群で, 次の条件(☆)を満たす。$\}$

(☆) C は Γ-不変, open non-degenerate $(\overline{C}\cap\overline{(-C)}=\{0\})$ convex であり, Γ の $D=C/\mathbb{R}_{>0}$ への作用は, 固有不連続かつ固定点を持たず, D/Γ が compact。

<u>定理</u>1 $(C,\Gamma)\in\mathcal{S}$ に対して, $V\setminus\{P\}\cong\mathrm{ord}^{-1}(C)/\Gamma$ となる n 次元正規孤立特異点 (V,P) が存在する。

証明は [1] の Chapter Ⅲ §1 Appendix の Theorem とほとんど同様にしてできる。この (V,P) を $\mathrm{Cusp}(C,\Gamma)$ で表わし, $\mathcal{T}=\{\mathrm{Cusp}(C,\Gamma)\mid(C,\Gamma)\in\mathcal{S}\}$ とする。

<u>命題</u>2 D/Γ が orientable (即ち $\Gamma\subset SL(N)$) ならば, $(V,P)=\mathrm{Cusp}(C,\Gamma)$ は純楕円型特異点 (即ち, $\delta_m(V)=1$) D/Γ が non-orientable ならば, m が偶数 (奇数) のとき, $\delta_m(V)=1\ (=0)$。($\delta_m(V)$の定義は[5]を見よ。)

証明は, T_N の global coordinate $(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ に対して, $dz_1/z_1\wedge dz_2/z_2\wedge\cdots\wedge dz_n/z_n$ が $SL(N)$ で不変であることから, 容易にできる。

注. $\mathcal{T}$はHilbert modular cusp特異点を含む。Kを有理数体上n次の全実な代数体とし、$x \longmapsto x^{(i)}$を相異るn個のKの$\mathbb{R}$への埋め込みとする。Mをrank nのKの代数的整数からなる部分群，Λをrank $(n-1)$のKのunitのなす群とする。

$$G(M,\Lambda) = \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon & \mu \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, \varepsilon \in \Lambda,\ \mu \in M \right\}$$

は，$(z_1, \cdots, z_n) \longmapsto (\varepsilon^{(1)} z_1 + \mu^{(1)}, \cdots, \varepsilon^{(n)} z_n + \mu^{(n)})$により，上半平面の$n$個の直積$\mathfrak{H}^n$に作用し，$\mathfrak{H}^n / G(M,\Lambda)$に1点$\infty$を付加して得られる正規孤立特異点$V(M,\Lambda)$はHilbert modular cusp特異点である。このとき$M \cong \mathbb{Z}^n$でありΛは$SL(M)$の部分群。$K \ni x \longmapsto (x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$により導かれる$M_{\mathbb{R}} = K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$から$\mathbb{R}^n$への同型写像を$i: M_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$とし，$C = i^{-1}((\mathbb{R}_{>0})^n)$とすれば，$(V(M,\Lambda), \infty) = \mathrm{Cusp}(C, \Lambda)$である。このとき明らかに$(C/\mathbb{R}_{>0})/\Lambda$は$(n-1)$次元実torusになる。逆に，$n = 3$のときには，$(C, \Gamma) \in \mathcal{S}$に対して$(C/\mathbb{R}_{>0})/\Gamma$が2次元実torusであれば，$\mathrm{Cusp}(C,\Gamma)$は3次元Hilbert modular cusp特異点になることがわかる。

§2 Duality　MをNのdual $\mathbb{Z}$-module $\mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z})$とすれば，$GL(N)$はMにも自然に作用する。$(C, \Gamma) \in \mathcal{S}$に対して$C^*$をCのdual cone即ち

$$C^* = \{ m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, n \rangle > 0 \text{ for all } n \in C \}$$

とすれば、明らかに C^* は Γ-不変な open non-degenerate convex cone になる。次に、Θ (Θ^*) を $C\cap N$ ($C^*\cap M$) の convex hull とし、$\Theta^\circ=\{m\in M_{\mathbb{R}}\mid \langle m,n\rangle\geqq 1 \text{ for all } n\in\Theta\}$ とする。明らかに、Θ° は convex であり、Θ^* を含む。$\mathcal{S}_0=\{(C,\Gamma)\in\mathcal{S}\mid \Theta^\circ=\Theta^*\}$ とする。

補題3　$(C,\Gamma)\in\mathcal{S}$ ($\mathcal{S}_0$) ならば、$(C^*,\Gamma)\in\mathcal{S}$ ($\mathcal{S}_0$)。

証明　$\square$ ($\square^\circ$) を $\pi|\partial\Theta:\partial\Theta\xrightarrow{\sim}D$ ($\pi|\partial\Theta^\circ:\partial\Theta^\circ\xrightarrow{\sim}D^*=C^*/\mathbb{R}_{>0}$) により導かれた D (D^*) の cell division とする。但し、$\pi:N_{\mathbb{R}}\setminus\{0\}\longrightarrow(N_{\mathbb{R}}\setminus\{0\})/\mathbb{R}_{>0}\cong S^{n-1}$。このとき $\square$ と $\square^\circ$ は共に Γ-不変であり、互いに dual である。従って、Γ の D^* への作用は、固有不連続であり固定点を持たない。又 D/Γ が compact であることから、D^*/Γ も compact。さらに、$\Theta^\circ=\Theta^*$ であれば、$(\Theta^*)^\circ=(\Theta^\circ)^\circ=\Theta$。

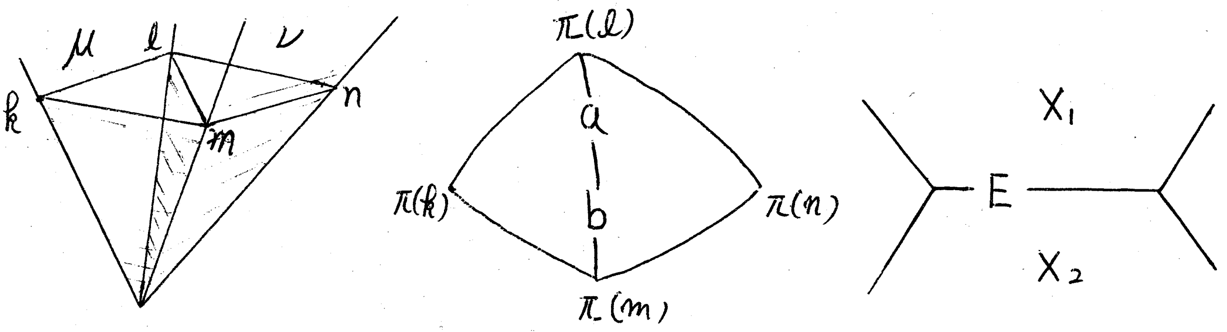
$N_{\mathbb{R}}$ の cone C に対して明らかに $C\subset(C^*)^*$。ところが、$(C,\Gamma)\in\mathcal{S}$ ならば、上の補題より $((C^*)^*,\Gamma)\in\mathcal{S}$ となり、$(C/\mathbb{R}_{>0})/\Gamma$ 及び $((C^*)^*/\mathbb{R}_{>0})/\Gamma$ が、共に compact であることから、$C=(C^*)^*$ となる。従って $\mathcal{T}$ 及び $\mathcal{T}_0$ は duality を持つ。

注　$n=2$ のときは、$\mathcal{T}=\mathcal{T}_0=\{2$次元の cusp 特異点$\}$ であり、上の duality は中村[2]のそれと一致する。

§3 $n=3$ のときの $(C,\Gamma)\in\mathcal{S}$ の具体的な構成。以下で［3］の記号と言葉を使う。$n=3$ とし、$(C,\Gamma)\in\mathcal{S}$ とする。(N,Σ)を $|\Sigma|=\bigcup_{\sigma\in\Sigma}\sigma=C\cup\{0\}$ となる non-singular coneからなる Γ-不変な r.p.p. decomposition とする。射影 $\pi: N_{\mathbb{R}}\setminus\{0\}\longrightarrow S^2$ により、Σ は D の Γ-不変な3角形分割 Δ を導びく。このΔの各辺の両端に次のようにして整数を付加する。$\mu=\mathbb{R}_{\geqq 0}k+\mathbb{R}_{\geqq 0}l+\mathbb{R}_{\geqq 0}m$ と $\nu=\mathbb{R}_{\geqq 0}l+\mathbb{R}_{\geqq 0}m+\mathbb{R}_{\geqq 0}n$ を $\mathbb{R}_{\geqq 0}l+\mathbb{R}_{\geqq 0}m$ を共通のfaceに持つΣの3次元cone とする。(k,l,m)と(l,m,n)が共にNの基底であることから、次の式を満たす整数 a, b がある。

$$(\ast)\qquad n+k+al+bm=0$$

このとき、辺 $\pi(\mathbb{R}_{\geqq 0}l+\mathbb{R}_{\geqq 0}m)$ の $\pi(l)$ 側に a, $\pi(m)$ 側に b を付加する。このようにして付加された整数は、明らかにΓの作用で不変である。



$T_N\mathrm{emb}(\Sigma)$ はΓの作用する非特異代数多様体であり、$\mathfrak{X}=T_N\mathrm{emb}(\Sigma)\setminus T_N$ とすると、$\mathfrak{X}$ は有理曲線に沿って正規交叉す

る有理曲面からなりΔをdual graphに持つ。$\hat{U}=\mathrm{ord}^{-1}(C)$とすると，$\mathrm{int}(\overline{\hat{U}})=\hat{U}\cup\hat{X}$であり，これに$\Gamma$は固有不連続かつ固定点を持たずに作用する。従って$U=\hat{U}/\Gamma$，$X=\hat{X}/\Gamma$とすれば，$U\cup X$は複素多様体であり，$U=V\setminus\{p\}$であるが，$\pi(X)=p$となる正則写像$\pi: U\cup X\to V$がある，但し$(V,p)=\mathrm{Cusp}(C,\Gamma)$。即ち，$X$は$(V,p)$のresolutionの例外集合であり，$\Delta$から導かれたcompactな実曲面$D/\Gamma$の3角形分割$\Delta/\Gamma$は$X$のdual graphとなる。しかも上で定めた各辺の両端の整数a，bは夫々$(E|X_2)^2=X_1^2\cdot X_2$，$(E|X_1)^2=X_1\cdot X_2^2$に等しい，但しX_1，X_2は夫々Δの頂点$\pi(\ell)$，$\pi(m)$に対応する曲面であり，$E=X_1\cdot X_2$は辺$\pi(\mathbb{R}_{\geq 0}\ell+\mathbb{R}_{\geq 0}m)$に対応するdouble curveである。

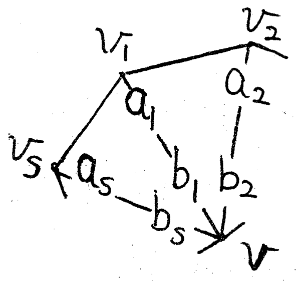
以下では，逆に上のような曲面の3角形分割から，$\mathcal{S}$に属する(C,Γ)を構成することを目標とする。Tをcompactな実曲面，$\varpi:\tilde{T}\to T$をその普遍被覆面とし，$\Gamma=\pi_1(T)$をTの基本群とする。次に，Δを$\tilde{T}$のΓ-不変な3角形分割とする。

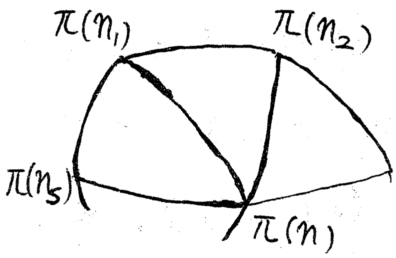
<u>定義</u>　monodromy conditionを満たすΓ-不変なΔのdouble $\mathbb{Z}$-weightingとは，Δの各辺の両端に付加された整数で次の2つの条件を満たすものをいう。(i)付加された整数はΓ-不変。(ii)Δの各頂点vに対して，$v_1, v_2, \cdots, v_s$をこの順

にvの回りを取りまく頂点の輪とする。辺vv_jのv及びv_jの側に付加された整数を夫々a_j, b_jとする。(n, n_1, n_2)をNの基底とすると、

(*) $n_{j+1}+n_{j-1}+a_j n_j+b_j n=0 \quad (j=2,3,\cdots,s)$

によりNの点$n_3,\cdots,n_s, n_{s+1}$が決まる。このとき$n_{s+1}=n_1$であって、$\pi(n_1),\pi(n_2),\cdots,\pi(n_s)$が、$\pi(n)$の回りをこの順で、丁度1回転する。





上の定義を満たすΔの double $\mathbb{Z}$-weighting を1つ取り、Δの3角形を1つ選ぶ。次にNの基底を1つ取り、その3つの元を、この3角形の各頂点に1つづつ対応させる。すると定義の(iii)の条件と$\tilde{T}$が単連結であることから、(*)により、写像$\sigma:\{\Delta$のすべての頂点$\}\longrightarrow N$が決まる。又(ii)の条件から、すべての$\gamma\in\Gamma$及びΔの頂点vに対して$\rho(\gamma)\circ\sigma(v)=\sigma(\gamma\circ v)$を満たす準同型写像$\rho:\Gamma\longrightarrow GL(N)$が決まる。さらに、$\pi\circ\sigma$を$\tilde{T}$に拡張して、$\Delta$の各3角形を$S^2$の球面3角形に移す局所同相な$\Gamma$-同変写像$f:\tilde{T}\longrightarrow S^2$を得

ることができる。このときΔの各単体μに対して $C(\mu)=\pi^{-1}(f(\mu))\cup\{0\}=\mathbb{R}_{\geq 0}f(\mu)$ とし，$\Sigma=\{C(\mu)\mid\mu$ はΔのすべての単体$\}\cup\{0\}$ とする。

<u>命題</u>4　fが1対1，$f(\tilde{T})$ が spherically convex で S^2 のある半球の完全内部に含まれると仮定する。すると $(C,\rho(\Gamma))\in\mathcal{S}$ であり，(N,Σ) は non-singular cone からなる Γ-不変な r.p.p. decomposition であって $|\Sigma|=C\cup\{0\}$，但し $C=\pi^{-1}(f(\tilde{T}))$。

<u>証明</u>　命題の仮定から，C は Γ-不変な open non-degenerate convex cone になる。fが1対1ならば，fは同相写像であり，ρも1対1になる。従って，ΓがTの基本群であることから Γ の $C/\mathbb{R}_{>0}=f(\tilde{T})$ への作用は固有不連続であり，固定点を持たない。又 $(C/\mathbb{R}_{>0})/\Gamma\cong\tilde{T}/\Gamma=T$ は compact。fがΓ-同変な同相写像であることから，明らかに(N,Σ)はΓ-不変な r.p.p. decomposition となり，$C=\cup C(\mu)$ だから $|\Sigma|=C\cup\{0\}$。

上のようにして定めたfが，命題の仮定を満たせば，定理1により正規孤立特異点 $(V,p)=\mathrm{Cusp}(C,\rho(\Gamma))$ を得る。しかも，この§の始めに述べたようにしてΔからVの resolution がわかる。

<u>定理5</u>　monodromy condition を満たす Γ-不変な Δ の double $\mathbb{Z}$-weighting が，次の2つの条件を満たせば，これから上のようにして導かれた写像 $f:\tilde{T}\to S^2$ は命題4の仮定を満足する。(i) Δの辺に付加された2つの整数の和が，すべて -2 以下。(ii) その上に付加された整数の和が，-2である辺をすべてΔから取り除いたとき，Δが胞体分割になる。

この場合，$\chi(T)<0$

<u>証明の概略</u>　$\tilde{T}$の1点 s を固定し，$f(s)$ を中心とする S^2 の十分小さい円 S を取る。S の各点 θ に対し，W_θ をその像 $f(W_\theta)$ が $f(s)$ と θ を通る S^2 の大円の小弧上にあり，s を始点とする $\tilde{T}$ の最も長い曲線とする。$W=\bigcup_{\theta\in S}W_\theta$，$D=f(W)$ とすると，W は開集合であり $f|_W: W\to D$ は同相写像である。σ を $\tilde{T}$ に拡張して $f=\pi\circ\tau$ を満たす Γ-同変連続写像 $\tau:\tilde{T}\longrightarrow N_{\mathbb{R}}$ を得ることができる。しかも条件(ii)の胞体分割を$\square$としたとき，$\square$の各2次元胞体αに対して$\tau(\alpha)$が，$N_{\mathbb{R}}$ のある平面H上にあるようにでき，このようなτが一意的に決まる。このとき，αの適当な近傍Uをとれば，条件(i)(ii)より $U\setminus\alpha$ はHの上(0の反対側)にある。βをsを含む$\square$の2次元胞体とすれば，$\tau(\beta)$は$N_{\mathbb{R}}$ のある平面上にあるから，すべての$x\in\tau(\beta)$に対して $\langle m_0, x\rangle=1$ となる $m_0\in M$ が1つ決まる。$k(t)=\langle m_0,\tau(t)\rangle$，$h=k\cdot f|_W^{-1}$

とすれば、夫々 $\hat{T}$ とD上の連続関数となる。$N_{\mathbb{R}}$ の平面によるて(W)の切り口を観察することにより次のようなことがわかる。

<u>補題</u> 任意の $t\in W$ に対して $h(t)\geq 1$ であり、1以上の任意の実数 l に対して $D(l)=\{u\in D \mid h(u)\leq l\}$ は spherically convex な閉集合であり、$h^{-1}(l)$ を境界に持つ。

Dは $\bigcup_{l\geq 1} D(l)$ に等しいから、spherically convex であり、半球 $\pi(\{x\in N_{\mathbb{R}} \mid \langle m_0, x\rangle > 0\})$ の完全内部に含まれる。次にWの任意の点列 $\{t_j\}$ を考える。これが $\hat{T}$ の点 t に収束するとすれば、h は連続だから $\{h(t_j)\}$ は上限 l_0 を持つ。$\{f(t_j)\}\subset D(l_0)$ であり、$D(l_0)$ は閉集合だから $f(t)\in D(l_0)\subset D$ となる。$f_{|W}$ は同相写像であったから、

$$t=\lim_{j\to\infty} t_j = \lim_{j\to\infty} f_{|W}^{-1}\circ f(t_j) = f_{|W}^{-1}\circ f(t) \in W.$$

従ってWは閉集合であるから $\hat{T}=W$。又、簡単な計算により $12\chi(T)=\sum_{\Delta/\Gamma\text{のすべての辺}}$ (2+辺上に付加された整数の和) となることがわかる。すると条件(i)(ii)より明らかに $\chi(T)<0$。

§4 例1. Δ_1 を2次球面 S^2 の8面体分割とする。Tを Δ_1 のすべての頂点で分岐する S^2 の2重被覆面とし、Δ_2 を Δ_1 から導かれたTの3角形分割とする。するとTは

$g(T)=2$ の compact orientable な曲面となる。Δ を Δ_2 から導かれた T の普遍被覆面 $\tilde{T}$ 上の３角形分割とし，$\Gamma=\pi_1(T)$ とする。図１の Δ_1 上の整数を Δ に引き戻すことにより Δ 上の Γ-不変な double $\mathbb{Z}$-weighting を得る。これらが monodromy condition 及び定理５の条件を満たすことは、容易に確められる。

例２．T 及び Δ_1 を図２の図形の同じ番号のついた辺，同じ記号のついた頂点どうしを貼り合わせることによって得られる曲面とその上の３角形分割とする。このとき T は $\chi(T)=-2$ の compact non-orientable な曲面となる。次に図の太線の両端に -2，細線の両端には -1 を付加すれば，monodromy condition を満たす Δ_1 上の double $\mathbb{Z}$-weighting が得られる。

図２

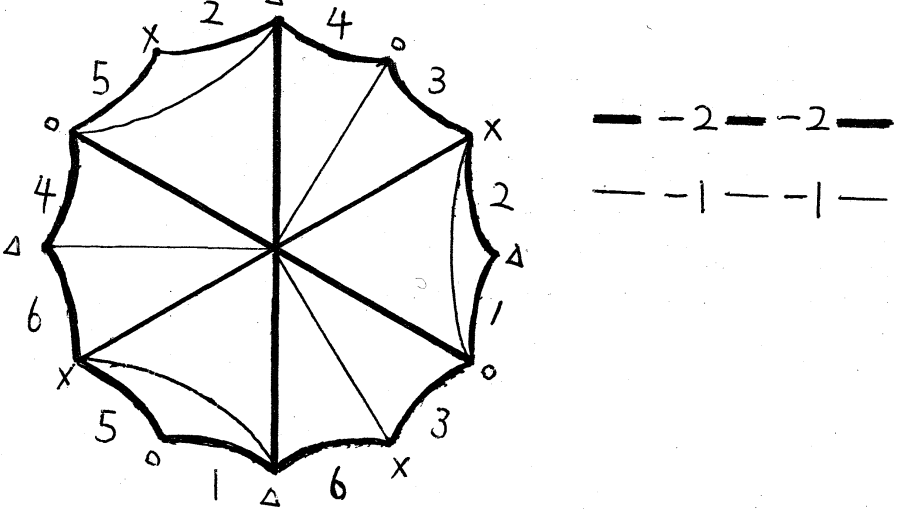
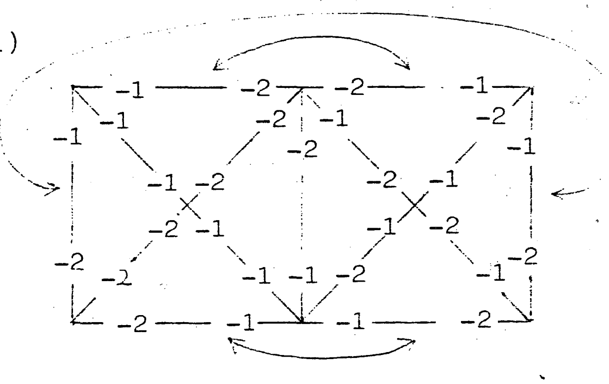
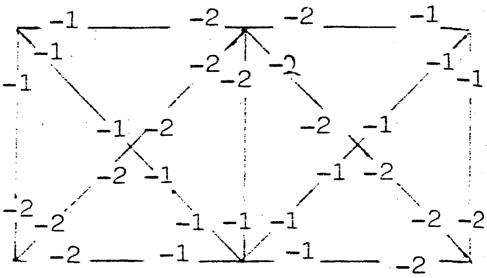


図1

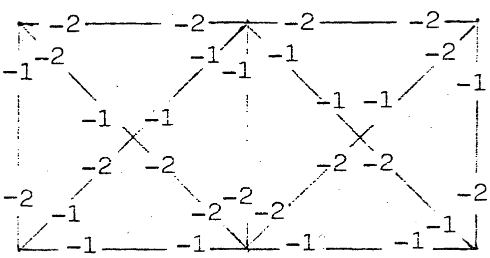
i)



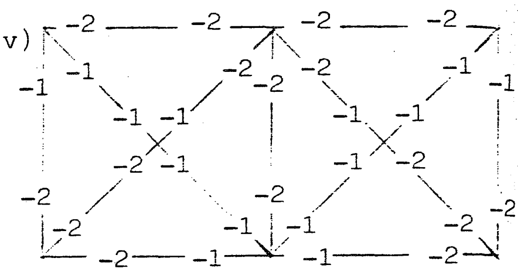
ii)



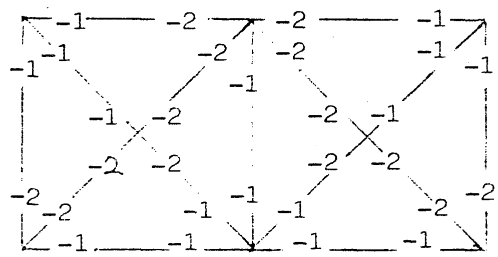
iii)



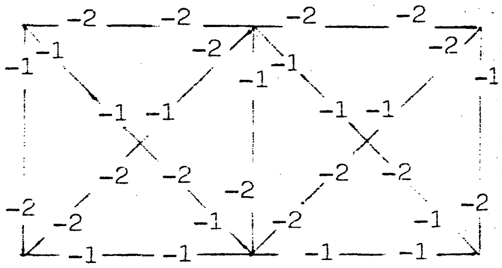
iv)



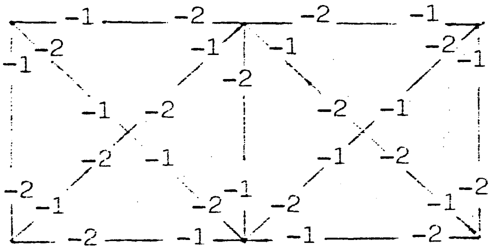
v)



vi)



vii)



文 献

[1] A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport and Y. Tai, Smooth compactification of locally symmetric varieties,. Math. Sci. Press, Brooklin, 1975

[2] I. Nakamura, Inoue-Hirzebruch surfaces and a duality of hyperbolic unimodular singularities, I. Math. Ann., 252, 221–235 (1980).

[3] T. Oda, Lectures on torus embedding and applications, Tata Inst. of Fund. Res., 1978.

[4] E. Thomas and A. T. Vasquez, On the resolution of cusp singularities and the Shintani decomposition in totally real cubic number fields, Math. Ann., 247, 1–20 (1980).

[5] K. Watanabe, On pluri genera of normal isolated singularities I, Math. Ann., 250, 65–94 (1980).