数理解析研究所講究録
第474巻 1982年 155-168

complex affine root 系とその不変式

京大数研　斎藤恭司

§0. はじめに

単純楕円特異点（例へば $x^3+y^3+z^3=0$ は $\tilde{E}_6$ 型の単純楕円特異点である）の普遍変型族 — universal deformation

$$x^3+y^3+z^3+axyz+bxy+cyz+dzx+ex+fy+gz+h$$

を考える。ここでパラメーターの空間 $(a,b,\cdots,h)\in\mathbb{C}^8$ に非常に強い構造（flat 構造と呼ぶ）が、原始積分の理論から入れる事ができる。つまりこの空間を、ある種の保型函数のなす環の scheme（概型）とみなし、更に、その scheme に、内積、その他いろいろな構造を入れる事ができるのである。[3]

ここでは、その話しには、一切立ち入らないが、その研究から自然に導かれて、complex affine root 系なる概念に到達した。現在その一般論 — 分類，表示 etc — がほぼでき上り、その不変式論の建設にとりかかっているので、その一端を御紹介したいと思う。（詳しくは[4]）

§1 用語の定義

これから考える空間は，有理数体，実数体又は複素数体を係数とするとし、時に応じて使いわける。（係数体をKと書く。）

Eが(K上の)ベクトル空間V上の affine 空間であるとは、EにV

が translation group として simple, transitive に作用する事である。F が V 上の marked vector space とは F は K 上の vector space でその non zero element $a \in F$ が指定されていて、F/Ka と $V^\vee$ (=V の dual space) の同型が与えられているもの(のこと)とする。この時 $a \in F$ の事を marking と呼ぶ事にする。affine 空間とその間の affine linear map のなすカテゴリーは、marked vector space とその間の mark を preserve する線型写像のなすカテゴリーと(反変)同型となる。その(反変)同型対応は次の様にすればよい。

E:affine 空間 $\longmapsto F(E) =$ E 上の affine linear function の全体

この際, $F(E)$ の marking は定数函数 1 を marking a とおく。

F:marked vector space $\longmapsto E(F) = \{\varphi \in F^\vee : \varphi(a) = 1\}$

($F^\vee$ は F の dual vector space をいみする。)

又、二つの affine spaces E, E' がそれぞれ V, V' 上で与えられた時、(線型写像) $\varphi: E \to E'$ は自動的に線型写像 $\varphi': V \to V'$ をひきおこすが、それを φ の微分と言って $\varphi' = D\varphi$ と書く事にする。~~特に~~ (もう1) F が marking a を持つ marked vector space とする時の同型対応 $F/Ka \simeq V^\vee$ も微分と言って D で記す事にするので、次の exact sequence が成り立つ。

$$0 \to Ka \to F \xrightarrow{D} V^\vee \to 0$$

以下の sections では、以上の notations を無断で使う。

§2. complex affine root 系の公理系

E^{l+1} を $\underbrace{V^{l+1}}_{\text{実ベクトル空間}}$ 上の affine space とし、$\dim_{\mathbb{R}} V^{l+1} = l+1$ とする。

更に $V^{l+1\vee}$ には positive semi definite な内積 I があり、I の 0 固有空間の次元は 1 とする。I により induce される対応、$x \in V^{l+1\vee} \longmapsto I(x,\cdot) \in V^{l+1}$ も、同じ I で書く。従って写像の合成,

$$F(E^{l+1}) \xrightarrow{D} V^{l+1\vee} \xrightarrow{I} V^{l+1} \xrightarrow{D^\vee} F(E^{l+1})^\vee$$

により定まる対応を σ とすると、$I(f,g) = \langle \sigma f, g\rangle = \langle f, \sigma g\rangle$ $f,g \in F(E^{l+1})$ により、$F(E^{l+1})$ にも positive semi-definite (0固有空間の次元 = 2) な内積が定まる。$I(f,g) = I(Df, Dg)$

さて $f \in F(E^{l+1})$ が $I(f,f) \neq 0$ なる時、$f^\vee := 2f/I(f,f)$ とおく。明らかに $f^{\vee\vee} = f$, $I(f,f)\,I(f^\vee, f^\vee) = 4$. この時鏡映を

$$w_f(x) = x - I(x,f)f^\vee = x - I(x,f^\vee)f \quad , x \in F(E^{l+1})$$

と定義する。 $w_f \in \mathrm{Aut}(F(E^{l+1})) \simeq \mathrm{Aut}(E^{l+1})$

定義 R が E^{l+1} 上の complex affine root $\underbrace{\text{system}}_{\text{(略して c.a.r. 系)}}$ であるとは、$R \subset F(E^{l+1})$ で、次の諸公理(1~6)をみたすものとする。

公理1. R で(加法的に)生成される $F(E^{l+1})$ の部分加群を $Q(R)$ と書く。($Q(R) = \mathbb{Z}R$)

すると i) $Q(R)$ は rank $l+2$ の lattice となり、$\mathbb{R}Q(R) = F(E^{l+1})$

ii) $Q(R) \cap \mathbb{R}a = \mathbb{Z}a$ (a は $F(E^{l+1})$ の marking)

iii) $Q(R) \cap F(E^1) =$ rank 2 の lattice

$= \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$ (適当な base $b \notin \mathbb{R}a$ をとる。)

(但しここで、$F(E^1) :=_{def.} \ker\sigma$, $F(E^1)$ の marking として、$F(E^{l+1})$ の marking a と同じものをとる。)

公理2. $\forall\alpha\in R$ に対し、$I(\alpha,\alpha)\neq 0$ でかつ

$w_\alpha R = R$ （w_α は α の鏡映）

以下 $w_\alpha,\alpha\in R$ で生成される群を W_R と書く。

公理3. 任意の $\alpha,\beta\in R$ に対し、

$I(\alpha,\beta^\vee)\in\mathbb{Z}$

公理4を書き下す前に、記号を用意する。先の公理 のiii)で導入された1次元affine空間上（E'），aは定数函数，bは座標函数とみなせる。（もちろんbのかわりに、$b+ka$なるものとおきかえてもよい。）さて、$E'_{\mathbb{C}}$, $E^{l+1}_{\mathbb{C}}$ 等で、係数を複素化した空間を考える。自然なinclusion $F(E')\subset F(E^{l+1})$ はprojection $\tau: E^{l+1}_{\mathbb{C}}\to E^1$ に対応しているとする。

$\mathbb{E}' :\underset{def}{=} \{p\in E'_{\mathbb{C}} : \mathrm{Im}\,(b/a\,(p))>0\}$

$\mathbb{E}^{l+1} :\underset{def}{=} \tau^{-1}(\mathbb{E}')$

群 W_R は $E^{l+1}_{\mathbb{C}}$ に作用しているとみなしてよいが、W_Rの作用でa,bはfixされるので、b/aもW_R不変となり、従って、W_Rは$\mathbb{E}^{l+1}$を不変にし、$\mathbb{E}^{l+1}$に作用すると思ってもよい。

公理4 W_Rの$\mathbb{E}^{l+1}$への作用はproper discontinuousである。

以下次の既約性も、便ぎ上常に仮定しておく。

公理5.（既約性）$R=R_1\cup R_2$ かつ $I(\alpha,\beta)=0$ $\forall\alpha\in R_1, \forall\beta\in R_2$ なら、$R_1=\phi$ 又は $R_2=\phi$ とする。

更に次の意味での強い既約性の仮定もしておく。

公理6.(強い被約性) $\alpha, \beta \in R$ に対し. $\sigma(\alpha), \sigma(\beta)$ が互に他の定数倍になるなら. $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$ 又は $\sigma(\alpha) = -\sigma(\beta)$.

さて, R が上の意味で c.a.r. 系であるならば $R^\vee := \{\alpha^\vee : \alpha \in R\}$ も c.a.r. 系となる。$R^\vee$ を R の相対系と呼ぶ。相対系に対しても公理1に従って $a^\vee, b^\vee$ を $Q(R^\vee) \cap K$, $Q(R^\vee) \cap F(E')$ の basis として定めておく
($a^\vee$ は a の定数倍, $b^\vee$ は b の定数倍にとれる。)

§3. c.a. root 系の分類.

上に定義した c.a. root 系を完全に分類できる。その為には tier 数なるものを導入すると便利である。

まずはじめに、次の様な事実がある事が示せる。

補題 (metric) I の (或る) 定数倍の I_R (及び $I_{R^\vee}$) で次の性質を持つものがただ一つある。

1) I_R を lattice $Q(R)$ (又は $Q(R^\vee)$) に制限すると整数値をとる。

ロ) $\inf_{\alpha \in R} I_R(\alpha, \alpha) = 2$ $\left(\text{又は} \inf_{\alpha^\vee \in R^\vee} I_{R^\vee}(\alpha^\vee, \alpha^\vee) = 2\right)$

次に次の事に注意する。もし上記の公理系において metric を I から cI (c は positive constant) におきかえれば、$R^\vee$ が $c^{-1}R^\vee$ とおきかわって、公理系が成り立つ。すると $a^\vee, b^\vee$ は、それぞれ $c^{-1}a^\vee$, $c^{-1}b^\vee$ におきかえねばならず、$I_{R^\vee}$ は $c^2 I_{R^\vee}$ におきかえねばならない。以上に注意すれば次の定義は無意味ではない。

定義 c.a.r. 系 R (及び dual c.a.r. 系 $R^\vee$) に対する、第一 tier 数, 第二 tier 数 $t_1(R)$, $t_2(R)$ (及び $t_1(R^\vee)$, $t_2(R^\vee)$)

を、次の様に定義する。

$$t_1(R) := (b^\vee : b)\,(I_{R^\vee} : I)$$

$$t_2(R) := (a^\vee : a)\,(I_{R^\vee} : I)$$

（及び

$$t_1(R^\vee) = (b : b^\vee)\,(I_R : I)$$

$$t_2(R^\vee) = (a : a^\vee)\,(I_R : I)$$
）

（ここで記号 $A:B$ とは $A = cB$ となる様な定数 c を表わす。）

この定義は一寸抽象的で何をやっているか分らない様に見えるが、しかるに上に定義した tier 数達は非常に限られた整数値しかとり得ない事が以下に分り、更に実にこれ等の数のみで R がほぼ決定される事が分る。

補題 R が c.a.n. 系とする。

1) $\sigma F(E^{l+1})$ $(\simeq I(V^{l+1\vee}) \subset V^{l+1})$ は l 次元 vector space で non degenerate な内積 $I^\vee$ を持つ。（それを V^l と記す。）（$I^\vee(x,y) \overset{\text{def}}{=} I(\sigma^{-1}(x), \sigma^{-1}(y))$）すると V^l の部分集合 $\sigma(R)$ は普通の意味での既約, 被約ルート系となる。

2) $F(E^{l+1})/Ka$ ($l+1$ 次元空間) に対し $b \bmod Ka$ で marking をいれてやると、§1 の categorical な対応で、或る l 次元の affine 空間 E^l 上の affin lin function の全体 $F(E^l)$ と $F(E^{l+1})/Ka$ を同一視しておく。（E^l は上の 1) の vector space V^l 上の affine space である。）（同視一を ρ と書く。$0 \to Ka \to F(E^{l+1}) \xrightarrow{\rho} F(E^l) \to 0$）

すると、$\rho(R) \subset F(E^l)$ は Macdonald の意味での affine（キヤク, 被約）ルート系となる。

3) $\sigma(R)$ はよく知られている様に Dynkin 図型で分類され、その type は $A_l, B_l, C_l, D_l, E_l, F_4, G_2$ 等であるが、affine root 系 $\rho(R)$ の type は $\sigma(R)$ の type P と first tier 数 $t_1(R)$ により完全に

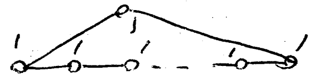
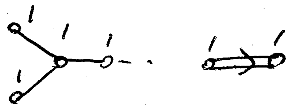
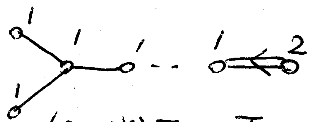
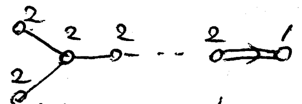
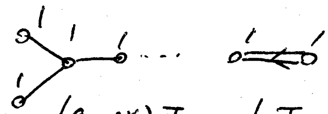
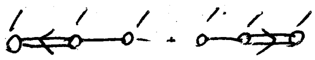
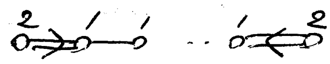
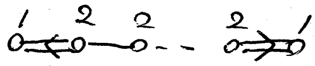
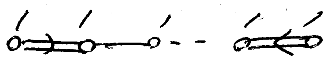
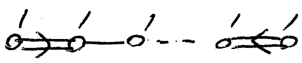
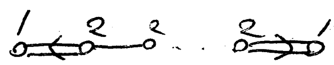
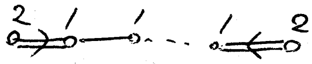
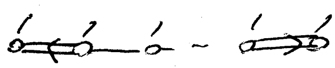
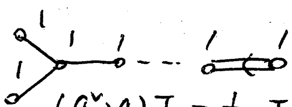
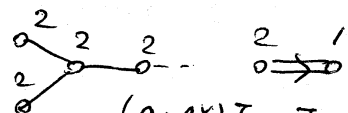
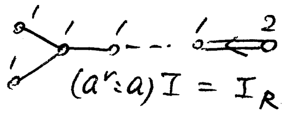
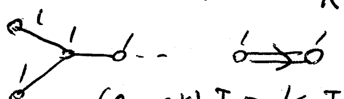
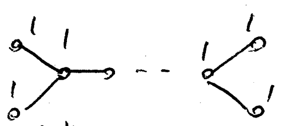
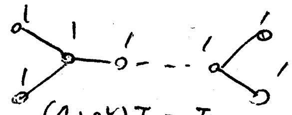
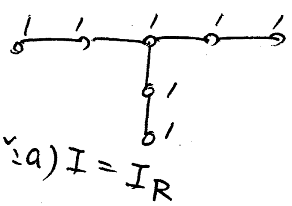
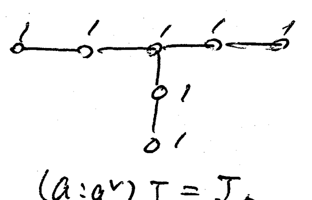
定まり $P^{(t_1)}$ と書く。(これは Moody 氏の記号法にあわせた。)

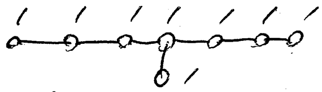
<u>定義</u> R を c.a.r.系とする。$\rho(R)$ の type を P とする時、$P^{(t_1,t_2)}$ を R の type と呼ぶ事にする。但し $t_i = t_i(R)$ $i=1,2$.

すると、2つの例外を除いて、R はその type $P^{(t_1,t_2)}$ によって完全にに決ってしまうのである。それは大雑把に言って、次の様な process による。$\rho(R) = R \bmod Ka$ は普通の affine ルート系だから、その basis $\rho(\alpha_0),\dots,\rho(\alpha_\ell)$ を一つ fix し、その逆像の元 (も一つずつ) $\alpha_0,\dots,\alpha_\ell\in R$ も fix しておく。すると $\sum_{i=0}^{\ell}\mathbb{Z}\alpha_i + \mathbb{Z}a = Q(R)$ だから、$\rho(R)\simeq R\cap\left(\sum_{i=0}^{\ell}\mathbb{Z}\alpha_i\right)$ に注意すると、R は $\rho(R)\times\mathbb{Z}a$ に埋めこめる。つまり R は $\rho(R)\times\mathbb{Z}a$ のどの様な部分集合か決定すればよいのだが、それが、以下に見る様に、第2 tier 数によって (2つの例外を除いて) 決まってしまう。

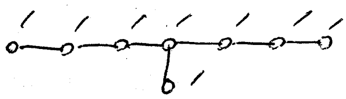
$\forall\alpha\in R$ に対し $\{k\in\mathbb{Z} : \alpha+ka\in R\}$ とおくと、これは $\mathbb{Z}$ の non-zero ideal である事が分り、その positive generator を $k(\alpha)$ と記す。すると R は $k(\alpha_0),\dots,k(\alpha_\ell)$ の data で決る事が分る。すると $k(\alpha_0),\dots,k(\alpha_\ell)$ は勝手にはとれず、以下の分類表に見るものしかつくれない。これにより、二つの例外を除いて、R は tier 数のみで決る事も分る。(逆にこれ等の type の c.a.r. が存在する事も、直接の構成法で示せる。)

c.a.r.sの分類表 (Dynkin図型の vertex のそばに書いてある数はその vertex α の $k(\alpha)$.)

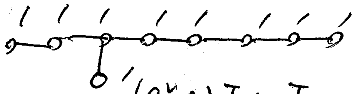
type R	typ ρR	ρR の Dynkin 図型 と $k(\alpha_i)$, $i=0\cdots,\ell$	typ $R^\vee$	typ $\rho R^\vee$	$\rho(R^\vee)$ の Dynkin 図型と $k(\alpha_i)$, $i=0,\cdots,\ell$
$A_\ell^{(1,1)}$	$A_\ell^{(1)}$	 $(a^\vee:a)I = I_R$	$A_\ell^{(1,1)}$	$A_\ell^{(1)}$	 $(a:a^\vee)I = I_{R^\vee}$
$B_\ell^{(1,1)}$	$B_\ell^{(1)}$	 $(a^\vee:a)I = \frac{1}{2} I_R$	$C_\ell^{(2,2)}$	$C_\ell^{(2)}$	 $(a:a^\vee)I = I_{R^\vee}$
$B^{(1,2)}$	$B_\ell^{(1)}$	 $(a^\vee:a)I = \frac{1}{2} I_R$	$C_\ell^{(2,1)}$	$C_\ell^{(2)}$	 $(a:a^\vee)I = \frac{1}{2} I_{R^\vee}$
$B_\ell^{(2,1)}$	$B_\ell^{(2)}$	 $(a^\vee:a)I = \frac{1}{2} I_R$	$C_\ell^{(1,2)}$	$C_\ell^{(1)}$	 $(a:a^\vee)I = I_{R^\vee}$
$B^{(2,2)}$,	$B^{(2)}$	 $(a^\vee:a)I = I_R$	$C_\ell^{(1,1)}$,	$C_\ell^{(1)}$	 $(a:a^\vee)I = \frac{1}{2} I_{R^\vee}$
$C_\ell^{(1,1)}$	$C_\ell^{(1)}$	 $(a^\vee:a)I = \frac{1}{2} I_R$	$B_\ell^{(2,2)}$	$B_\ell^{(2)}$	 $(a:a^\vee)I = I_{R^\vee}$
$C_\ell^{(1,2)}$	$C_\ell^{(1)}$	 $(a^\vee:a)I = I_R$	$B_\ell^{(2,1)}$	$B_\ell^{(2)}$	 $(a:a^\vee)I = \frac{1}{2} I_{R^\vee}$
$C_\ell^{(2,1)}$	$C_\ell^{(2)}$	 $(a^\vee:a)I = \frac{1}{2} I_R$	$B_\ell^{(1,2)}$	$B_\ell^{(1)}$	 $(a:a^\vee)I = I_{R^\vee}$
$C_\ell^{(2,2)}$	$C_\ell^{(2)}$	 $(a^\vee:a)I = I_R$	$B_\ell^{(1,1)}$	$B_\ell^{(1)}$	 $(a:a^\vee)I = \frac{1}{2} I_{R^\vee}$
$D_\ell^{(1,1)}$	$D_\ell^{(1)}$	 $(a^\vee:a)I = I_R$	$D^{(1,1)}$	$D^{(1)}$	 $(a:a^\vee)I = I_{R^\vee}$
$E_6^{(1,1)}$	$E^{(1)}$	 $(a^\vee:a)I = I_R$	$E_6^{(1,1)}$	$E_6^{(1)}$	 $(a:a^\vee)I = I_R$

$E_7^{(1,1)}$ $E_7^{(1)}$ 

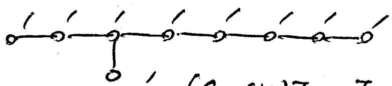
$(a^\vee : a) I = I_R$

$E_7^{(1,1)}$ $E_7^{(1)}$ 

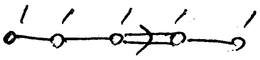
$(a : a^\vee) I = I_{R^\vee}$

$E_8^{(1,1)}$ $E_8^{(1)}$ 

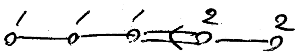
$(a^\vee : a) I = I_R$

$E_8^{(1,1)}$ $E_8^{(1)}$ 

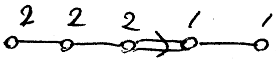
$(a : a^\vee) I = I_{R^\vee}$

$F_4^{(1,1)}$ $F_4^{(1)}$ 

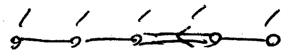
$(a^\vee : a) I = \frac{1}{2} I_R$

$F_4^{(2,2)}$ $F_4^{(2)}$ 

$(a : a^\vee) I = I_{R^\vee}$

$F_4^{(1,2)}$ $F_4^{(1)}$ 

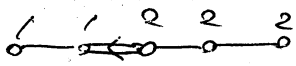
$(a^\vee : a) I = I_R$

$F_4^{(2,1)}$ $F_4^{(2)}$ 

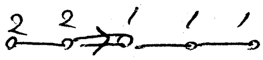
$(a : a^\vee) I = \frac{1}{2} I_{R^\vee}$

$F_4^{(2,1)}$ $F_4^{(2)}$ 

$(a^\vee : a) I = \frac{1}{2} I_R$

$F_4^{(1,2)}$ $F_4^{(1)}$ 

$(a : a^\vee) I = I_R$

$F_4^{(2,2)}$ $F_4^{(2)}$ 

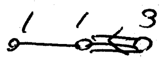
$(a^\vee : a) I = I_R$

$F_4^{(1,1)}$ $F_4^{(1)}$ 

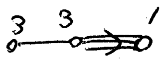
$(a : a^\vee) I = \frac{1}{2} I_R$

$G_2^{(1,1)}$ $G_2^{(1)}$ 

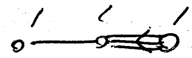
$(a^\vee : a) I = \frac{1}{3} I_R$

$G_2^{(3,3)}$, $G_2^{(3)}$ 

$(a : a^\vee) I = I_{R^\vee}$

$G_2^{(1,3)}$ $G_2^{(1)}$ 

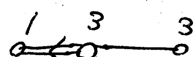
$(a^\vee : a) I = I_R$

$G_2^{(3,1)}$ $G_2^{(3)}$ 

$(a : a^\vee) I = \frac{1}{3} I_{R^\vee}$

$G_2^{(3,1)}$ $G_2^{(3)}$ 

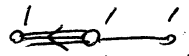
$(a^\vee : a) I = \frac{1}{3} I_R$

$G_2^{(1,3)}$ $G_2^{(1)}$ 

$(a : a^\vee) I = I_{R^\vee}$

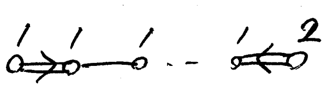
$G_2^{(3,3)}$ $G_2^{(3)}$ 

$(a^\vee : a) I = I_R$

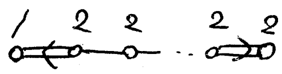
$G_2^{(1,1)}$ $G_2^{(1)}$ 

$(a : a^\vee) I = \frac{1}{3} I_{R^\vee}$

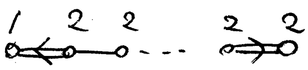
二つの例外型

$C_{\ell *}^{(1,1)}$ $C_\ell^{(1)}$ 

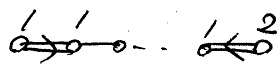
$(a^\vee : a) I = \frac{1}{2} I_R$

$B_{\ell *}^{(2,2)}$ $B_\ell^{(2)}$ 

$(a : a^\vee) I = I_{R^\vee}$

$B_{\ell *}^{(2,2)}$ $B_\ell^{(2)}$ 

$(a^\vee : a) I = I_R$

$C_{\ell *}^{(1,1)}$ $C_\ell^{(1)}$ 

$(a : a^\vee) I = \frac{1}{2} I_{R^\vee}$

§4. hyperbolic extension

以上により定まった c.a.r. 系を更に1次元高い空間に埋め込み、内積 I を hyperbolic に拡張する事を考える。すると自然に W_R の central extension $\widetilde{W}_R$ が定まる。従って、以下に見る様に、偏極アーベル多様体の族が、自然に構成できる。

§2で定義した様に、I は $V^{l+1\vee}$ 上の positive semi-definite な内積で、0固有空間の次元は1であったから、更に1次元大きい $l+2$ 次元の vector space V^{l+2} の dual space $V^{l+2\vee}$ に $V^{l+1\vee}$ を埋めこみ内積 I を $V^{l+2\vee}$ 内の non-degenerate symmetric bilinear I^0 で type $(l+1, 1)$ とする様に拡張できる。(つまり $V^{l+1\vee}$ の0固有空間の相棒を一次元分だけ内積が hyperbolic にする様に付け加えればよい。i.e. $\begin{array}{c} I \quad I^0 \\ \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$)
dual map $V^{l+2} \to V^{l+1}$ は surj. であるが、V^{l+2} 上の affine space E^{l+2} をとって、$E^{l+2} \xrightarrow{\pi} E^{l+1}$ affine linear surjective map でその derivation $D\pi$ が最初の $V^{l+2} \to V^{l+1}$ である様なものをとれる。以上の様な拡張 V^{l+2}, I^0, E^{l+2}, $E^{l+2} \xrightarrow{\pi} E^{l+1}$ 等の組は、適当に定義した同型を除いて、唯一つしかない。

さて、$E^{l+2} \xrightarrow{\pi} E^{l+1}$ の dual map により $F(E^{l+1}) \overset{\pi^*}{\hookrightarrow} F(E^{l+2})$ なる埋め込みが定まる。こうして $R \underset{bij}{\simeq} \pi^*(R) \subset F(E^{l+2})$ と埋めこめる。$^\forall \alpha \in R$ に対し、$\mathrm{Aut}(F(E^{l+2})) \simeq \mathrm{Aut}(E^{l+2})$ の元 g_α を

$$g_\alpha(x) = x - I^0(x, \pi^*\alpha)\, \pi^*\alpha \quad , \quad ^\forall x \in F(E^{l+2})$$

と定義して、g_α で生成される群を $\widetilde{W}_R$ と書く。

すると $\tilde{W}_R$ の元は部分空間 $F(E^{l+1}) \subset F(E^{l+2})$ を不変にし、そこへの制限を考える事により、次の exact sequence を得る。

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \tilde{W}_R \longrightarrow W_R \longrightarrow 1$$

ここに $\mathbb{Z}$ は制限写像の核であり、この exact sequence は中心拡大になっているが semi-direct product ではない。（すぐに、その obstraction としての特性類を計算する。）

さてこの $\tilde{W}_R$ は E^{l+2} に作用するのであるが、それを複素化して、次の定義を行う

$$\mathbb{E}^{l+2} := \left\{ x \in E_{\mathbb{C}}^{l+2} : \ \pi(x) \in \mathbb{E}^{l+1} (\Leftrightarrow \operatorname{Im} b/a(\tau \circ \pi(x)) > 0) \right\}$$

$\tilde{W}_R$ は b/a を不動にするのだから、$\tilde{W}_R$ は $\mathbb{E}^{l+2}$ に作用すると思ってよい。（実はこの空間への作用は proper discontinuous になる。）

商空間 $\mathbb{E}^{l+2}/\tilde{W}_R$ を調べる為に、次の順をおう。

先に $\sigma(R)$ は有限ルート系になると言った。その Weyl群を $W_{\sigma(R)}$ とすると W_R の作用を商空間 $F(E^{l+1})/F(E^1)$ に induce する事により次の exact sequence を得る。

$$1 \longrightarrow T \longrightarrow W_R \longrightarrow W_{\sigma(R)} \longrightarrow 1$$

この sequence は semi-direct product になり、T は次の様な lattice の部分群として実現され、可換である。

$$T \hookrightarrow \sigma(Q(R^\vee)) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \left(Q(R) \cap F(E^1)\right) \hookrightarrow V_{\mathbb{C}}^{l})$$

（この埋め込みは finite index（つまり coker が有限）と分る。又、

W_R の元として．T の元は $\mathbb{E}^{l+1}$ に自然に $V_{\mathbb{C}}^{l}$ の元の translation として作用している。）　ここで b, a は E' 上の関数であり $(a=1)$　b/a により $\mathbb{E}'$ は上半平面 $\mathbb{H}=\{c\in\mathbb{C} : \mathrm{Im}\, c>0\}$ と同一視する。すると各 fix した $p\in\mathbb{E}'$ に対し．$\mathbb{E}^{l+1}\to\mathbb{E}'$ の fiber（$\mathbb{E}_p^{l+1}$ と記す。l 次元の affine 空間となる）に $T\subset\sigma(Q(R^\vee))a(p)+\sigma(Q(R^\vee))b$ は平行移動として作用するから，$\mathbb{E}_p^{l+1}/T$ は $\mathbb{E}_p^{l+1}/\sigma(Q(R^\vee))\otimes_{\mathbb{Z}}(a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z})\simeq\sigma(Q(R^\vee))\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}/(a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z})$（$\simeq$ elliptic curve $\mathbb{C}/a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ の l ケの直積）に isogenus な abel 多様体となる。（$a = a(p)$，$b = b(p)$）

元の問題にもどる。$\tilde{T}$ でもって T の $\tilde{W}_R$ への逆像の全体を表わし，次の exact sequence を考える。

$$1\to\mathbb{Z}\to\tilde{T}\to T\to 1$$

Fix した $p\in\mathbb{E}'$ に対し，$\mathbb{E}_p^{l+2}=\left\{\begin{array}{l} x\in\mathbb{E}^{l+2} :\ \mathbb{E}^{l+2}\xrightarrow{\pi}\mathbb{E}^{l+1}\xrightarrow{\tau}\mathbb{E}' \\ \text{の projection で}\ \ p=\tau\circ\pi(x)\end{array}\right\}$

$\mathbb{E}_p^{l+2}$ への $\tilde{T}$ 作用を考える。まず，$\mathbb{Z}$ の作用での商 $\mathbb{E}_p^{l+2}/\mathbb{Z}$ は $\mathbb{E}_p^{l+1}$ 上の $\mathbb{C}^*$-bundle を与える。（$\because\ \mathbb{C}/\mathbb{Z}\simeq\mathbb{C}^*$）。そこで更に T で割ると

$$\begin{array}{ccccc}\mathbb{E}_p^{l+2}/\tilde{T} & \longrightarrow & \mathbb{E}_p^{l+1}/T & \longrightarrow & p\\ \cap & & \cap & & \cap\\ \mathbb{E}^{l+2}/\tilde{T} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{E}^{l+1}/T & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{E}'\end{array}$$

となって，$\mathbb{E}_p^{l+2}/\tilde{T}$ は abel 多様体 $\mathbb{E}_p^{l+1}/T$ の上の $\mathbb{C}^*$-bundle を定める。

それに associate した line bundle を L_p とおく。L_p の Chern-class
(それは $H^2(\mathbb{E}_p^{\ell+1}/T, \mathbb{Z}) \simeq Ext^2_{\mathbb{Z}}(T, \mathbb{Z}) \simeq \{E : T\times T \to \mathbb{Z}$ skew-symmetric bilinear form$\}$
の元として考える。) は実は次の bilinear forms の tensor 積と同一視される。

$$I_{R^\vee}^\vee : \sigma Q(R^\vee) \times \sigma Q(R^\vee) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

J : $F(E') \cap Q(R)$ 上の skew-symmetric form
s.t. $J(a,a) = J(b,b) = 0 \quad J(a,b) = -J(b,a) = 1$.

$$\boxed{c(L_p) = \begin{cases} I_{R^\vee}^\vee \otimes J & t_1 = t_2 = 1 \\ \frac{1}{t(R)} I_{R^\vee}^\vee \otimes J & \text{other wise} \end{cases}}$$

上表示式の右辺は、は $V^\ell_{\mathbb{C}}$ 上の positive definite Hermite 双形式, $H(z,w)$

$$H(z,w) = \frac{\text{const}}{Im(b/a(p))} I^\vee(z, \overline{w})$$

をとった時、$c(L_p) = Im(H)$ (H の imaginary part) と表示できるので、L_p の chernclass は positive definite な Hermite 形式の Imaginary part として表示された。従って Lefschetz の定理により、L_p は ample bundle となり、従って Abel 多様体 $\mathbb{E}_p^{\ell+1}/T$ の偏極が L_p により定まった。言いかえると、

$$\mathbb{E}^{\ell+1}/T \xrightarrow{\tau} \mathbb{E}'$$

は、偏極アーベル多様体の 1 parameter family となった。

$$L \xrightarrow{\pi} \mathbb{E}^{\ell+1}/T \xrightarrow{\tau} \mathbb{E}'$$

は、その line bundle の族とする。i.e. $L = \underbrace{\left(\mathbb{E}^{\ell+2}/\tilde{T}\right)}_{\mathbb{C}^*\text{-bundle}} \cup \underbrace{\left(\mathbb{E}^{\ell+1}/T\right)}_{\text{ゼロ section}}$

(対応する)

§5. まとめ。

前の§の構成により、偏極abel多様体の族

$$\tilde{L}^{-1} \to \mathbb{E}^{l+1}/T \to \mathbb{E}$$

に自然にWeyl群 $W_{\sigma(R)} \simeq W_R/T \simeq \tilde{W}_R/\tilde{T}$ が作用している。そこで、$W_{\sigma(R)}$不変式の研究が必要になってくる。つまり、Weyl群不変なθ-函数の研究が必要になってくる。その或る特別な場合については、既にLooijenga [1], Shvartsman Bernstein [2] 等による研究がある。ここで興味あるのは、ある種の対称性を持つルート系（それを対称型ルート系と呼ぶ）については、更に強い構造（不変式環の）が入るのだが、紙数もつきたので、その詳細は[4]を参照。

特に、$E_6^{(1,1)}$型のc.a.root系に対し、$\tilde{L}^{-1}$のゼロsection blow down $0\backslash\tilde{L}^{-1}$をWeyl gr $W_{\sigma(R)}$で割ったもの $0\backslash\tilde{L}^{-1}/W_{\sigma(R)}$ を更に $SL(2,\mathbb{Z})$（楕円modular group）で割ったものが、cannonicalに、§0でのべた8次元空間 $(a, b, \cdots, h)$ と同一視される。これが主要目標であった。

文献

[1] E. Looijenga, Root systems and elliptic curves, Inv. math 38, 17-32 (1976)

[2] Bernstein I. N. & O. V. Shvartsman, Chevalley's theorem for complex crystallographic coxeter groups, Funk. Anal. Vol 12, No 4, pp 79-80, (1978)

[3] K. Saito, primitive forms for a simple elliptic singularity (in preparation)

[4] 〃, complex affine root systems and their invariants (in preparation)