数理解析研究所講究録
第 475 巻 1982 年 17-21

有限群の局所部分群に於ける因子分解について

愛知教育大　林　　誠
(Makoto Hayashi)

仮定A: Gを有限群で$F^*(G)=O_p(G)$, $P\in Syl_p(G)$ とし
$\Sigma(P)=\{Q\,/\,Q$ はPの特性部分群$\neq 1\}$ とおく。

主問題: I. 仮定A及び"適当な条件"を満たすすべてのGに対し, $G=\langle N_G(Q)\,/\,Q\in\mathcal{A}\rangle$ となる$\mathcal{A}\subseteq\Sigma(P)$ を見出せ。

II. 適当な$\mathcal{A}\subseteq\Sigma(P)$ に対し, $G\neq\langle N_G(Q)\,/\,Q\in\mathcal{A}\rangle$ なるとき, Gについて何が云えるか?

例. $$G=Qd(p)=\left\{\begin{bmatrix} a & b & 0\\ c & d & 0\\ e & f & 1\end{bmatrix}\,\middle/\, a,\cdots,f\in GF(p),\ ad-bc=1\right\}$$

$P\in Syl_p(G)$ に対して, $G\neq N_G(P)=\langle N_G(Q)\,/\,Q\in\Sigma(P)\rangle$.

この様に, 標数pの体上のChevalley群とそのnatural な

module の半直積群 G に対しては，上記主問題 I，II は微妙となる。また，M を A_n（亦は S_n）の n 次の自然な permutation module $\overline{M}$ をその trace での剰余とするとき，$\overline{M}$ と A_n の半直積群 $\overline{M}\cdot A_n$ に於いても主問題 I，II は微妙となる。即ち，逆に本質的に問題となるのはこれ等に非常に似通ったものに限るのではなかろうか？というところに問題の意味がある。

何故この様な問題を考えるか？有限単純群の分類完成以後は非単純群 G を適当な言語で表現することが問題となろう。この際，構造的に扱いが最も厄介なのは $F^*(G) = O_p(G)$（即ち G の極小 normal はすべて p-群）のときである。この case を G の Sylow p-群の invariant（特性部分群(†1)（の正規化群））で記述しようという試みである。尚，問題の global な意味については本稿五味氏の記事参照。

従来得られた結果：　以下 G はすべて仮定 A を満たすとする。また，個々の特性部分群の定義については原論文を参照。

1°（Glauberman [2,3]）p が odd で，G が $Qd(p)$ を"含まない"ならば　$G = N_G(ZJ(P)) = N_G(K^\infty(P)) = N_G(K_\infty(P))$.

2°.（Glauberman [4]）$p=2$ で G が $Qd(2)\cong S$ を含まないならば，$G = N_G(J_i)N_G(J_j)$（$1\le i\ne j\le 3$）こゝで $\{J_i \mid 1\le i\le 3\} = \{J(P), Z(P), \mho(P)\}$.

問題：

1°（Aschbacher [1]）$J(G)=\langle J(R) \mid R\in Syl_p(G)\rangle$, $p=2$.
$V=\langle \Omega_1 Z(P)^G\rangle$, $\overline{G}=G/C_G(V)$ とおくとき,

① $G\neq\langle N_G(J(P)),\ C_G(Z(P))\rangle$ ならば,
$\overline{J(G)}\simeq\prod_i SL_{n_i}(2^{m_i})\times\prod_j Sp_{n_j}(2^{m_j})\times\prod_k S_{n_k}$ で $V/C_V(J(G))$ はそれ等の natural modules の直和であるか？

② $G\neq N_G(J(P))C_G(Z(P))$ ならば,
$\overline{J(G)}\simeq\prod_i C_i\times\prod_j S_{n_j}$, ここで C_i は標数2の体上の Chevalley 群の適当なもので, $V/C_V(J(G))$ はそれ等の natural modules の直和であるか？

2°. $\exists K\lhd G$ s.t. $G/K\simeq PSL(2,p^n)$, P を含む G の極大部分群は唯一つとするとき,

①（Aschbacher）$\exp(P)$ 或は P の nilpotent length が十分大ならば $\exists\{J_1,J_2,J_3\}\subseteq\mathcal{L}(P)$ s.t. $G=N_G(J_i)N_G(J_j)$, $1\le i\neq j\le 3$.

②（Thompson）（$O_p(G)$ 内の）どの chief factor も $SL(2,p^n)$ の natural な module でないならば, $G=N_G(ZJ(P))$ ？
但し, p : odd。これ等については [5] 参照。

3°. $p=2$, S^4 を"含まない"すべての有限群 G に対し
$G=N_G(Q)$ なる $Q\in\mathcal{L}(P)$ を構成せよ。

3° (Hayashi [7]) $p=2$ でGが位数 $p(p-1)$ (p: Fermat prime) の Frobenius 群を"含まない"ならば, $G = N_G(\Omega_1 Z N^{\infty}(P))$。

更に関連した結果として,

4° (Goldschmidt [6]) G^*を(必ずしも仮定Aを満たさない)有限群でSをG^*の2-部分群, $H_i \subseteq G$ で $S \in Syl_2(H_i)$, $i=1,2$ とする。$|H_i : S| = 3$, $i=1,2$ で $\langle H_1, H_2 \rangle \neq N_{G^*}(T)$ for $\forall T \in \mathcal{C}(S)$ ならば $|S| \leq 2^7$。

5° (Rowley [9]) G^*を(必ずしも仮定Aを満たさない)有限群でSをG^*の2-部分群, $H_i \subseteq G$ で $S \in Syl_2(H_i)$, $i=1,2$ とする。$|H_i : S| = p_i$(素数), $i=1,2$ で $\langle H_1, H_2 \rangle \neq N_{G^*}(T)$ for $\forall T \in \mathcal{C}(S)$ ならば $p_1 = p_2 = 3$。

II. に関連するものとして,

6° (Niles [8]) $\exists K \lhd G$ s.t. $G/K \cong PSL(2,p^n)$, Pを含むGの極大部分群は唯一つで $G \neq N_G(Q)$ for $\forall Q \in \mathcal{C}(P)$ とすると; (1) $G/C_p(G) \simeq SL(2,p^n)$ (2) Gの non-central な chief factor は唯一つでそれは $SL(2,p^n)$ の natural な module (3) $cl(P) \leq 2$ or $p=3$ で $cl(P)=3$ 等々.

7° (Glauberman-Niles [5]) ($p=2$で) $\exists K \lhd G$ s.t. $G/K \simeq PSL(2,p^n)$, Pを含むGの極大部分群は唯一つで $G = N_G(Q)$ for some $Q \in \mathcal{C}(P)$ とすると, $G = N_G(J_i)$ for some J_i, $1 \leq i \leq 2$, ここで, J_1, J_2, はPに依ってのみ定義された特性部分群。

4°. G^*を（必ずしも仮定Aを満たさない）有限群，SをG^*の2-部分群，$H_i \leq G^*$, $S \in Syl_2(H_i)$, $F^*(H_i) = O_2(H_i)$, $|H_i : S| = p_i^{e_i}$（p_iは素数）$i = 1, 2$とする。このとき，

① $\langle H_1, H_2 \rangle \not\leq N_{G^*}(T)$ for $\forall T \in \mathcal{L}(S)$ ならば p_1, p_2 は共にFermat 素数で $i=1,2$に対し H_iは位数 $p_i(p_i-1)$ の Frobenius 群を"含む"か？

② $N_G(T) \not\geq \langle H_1, H_2 \rangle$ for any $1 \neq T \leq S$ で $e_1 = e_2 = 1$ ならば $\exists n$ s.t. $|S| \leq 2^n$?

5°. $G = N_G(Q)$ for some $Q \in \mathcal{L}(P)$ のとき，Qを complete characteristic in P (i.e. $Q \leq R \leq P$ ならば QはRの特性部分群）にとれるか？

REFERENCES

[1] Aschbacher, On the failure of the Thompson's factorization… (to appear)

[2] Glauberman, Canadian J. Math. 20 (1968)

[3] ——, Math. Z, 117 (1970)

[4] ——, Regional Conference Series 33 Providence A.M.S (1977)

[5] Glauberman & Niles, A pair of characteristic… (to appear)

[6] Goldschmidt, Ann. Math. 111 (1980)

[7] Hayashi, Math. Z, 181 (1982)

[8] Niles, J. Alg.

[9] Rowley, Automorphisms of certain trees (to appear)