数理解析研究所講究録
第475巻 1982年 26-46

Complex Leech lattice と Sporadic Suzuki group

東大 理学部 吉荒 聡
(Satoshi Yoshiara)

§1 単純群の極大部分群分類問題

有限群のうちで essential な存在である有限単純群に関する様々な疑問 ― どの位存在するのか、どんな部分群構造を持つか ― 等々は有限群論の重要な推進力のひとつであった。有限単純群の分類が完成された今日、その部分群構造の決定は残された重要課題のひとつであろう。すなわち、与えられた有限単純群が含む部分群、それらの交わり方、等々を調べる必要がある。前者は次の問題(*)に帰着される。

(*) 与えられた有限単純群 G に対し、G の極大部分群の共役類の完全代表系を求める。

(*) はごく自然な問題ゆえ、群論創始以来数多くの研究がなされている。

$L_2(q)$: Dickson [8]

$L_3(q)$, $U_3(q)$; Bloom [1], Hartley [13], Mitchell [17]

$Sz(q)$: Suzuki [21]

$Sp_4(q)$; q=odd Mitchell [18], q=even Mwene [19]

$G_2(4)$; Butler [3], Petron-Tchakerian [20], Wilson [24]

$G_2(q)$; q=even Cooperstein [6],

${}^2F_4(2)'$: Tchackerian [22]

$L_4(q)$: q=even Mwene [19]

Mathieu 群 $M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}$

Chang-Choi および Conway [5]

HS : Magliveras [16]

J_1 : Janko [14]

J_2, J_3 : Finkelstein-Rudvalis [12], [11]

M^c, $\cdot 3$: Finkelstein [10]

He : Butler [2]

筆者は sporadic simple group Suz に対する問題(＊)を考え次の結論を得た。[26]

<u>Theorem</u> Suz の極大部分群の共役類分割の完全代表系は次のリストに含まれる。

$2^{1+6}_-.U_4(2)$, $2^{2+8} \rtimes (A_5 \times \Sigma_3)$, $2^{4+6} \rtimes Z_3 \cdot A_6$,

$Z_3 \cdot U_4(3) \cdot Z_2$, $3^{2+4} \rtimes Z_2(A_4 \times E_4) . Z_2$, $3^5 \rtimes M_{11}$,

$(2^2 \times L_3(4)) \cdot \Sigma_3$, $(3^2 \times A_6) . Q_8$

$(A_5 \times A_6) . Z_2$, $M_{12} . Z_2$, $J_2 . Z_2$, $U_5(2)$, $G_2(4)$,

$*L_3(3).Z_2$ (2-classes), $*L_2(25)$, $*A_7$

このうち $*$EPのもの以外は確かに存在する。

<u>Notation</u> 上記において，p^n は order p^n の elementary abelian group, Z_m は order m の cyclic group, p^{a+b} は $P' \cong p^a$, $P/P' \cong p^b$ なる special group, 2_-^{1+6} は negative type の extra special 2-group (order 2^7) をあらわす。Σ_n, A_n は n次対称，交代群，Q_8 は order 8 の quaternion group。

<u>注意</u>：Wilson は Computor を用いて上記の3つの $*$EPの subgroup の存在を示した。[24]

筆者の知る所では，次の単純群についても右記の人々が問題(※)を考察中ないしは解決した由である。

Suz	Wilson [24], Yoshiara [26]		決定
$\cdot 1$	Curtis [7] + Wilson [25]		決定
$\cdot 2$	Wilson		(多分)決定
$G_2(q)$	q=odd	Ed Miglione	(多分)決定
${}^2F_4(2^{2m+1})$	John Sarli		
Ly	Andrew Woldar		
$O'N$	Yoshiara		Maximal local は決定

なお，Fischer の群 F_{22}, F_{23} については特別な形の subgroup のリストが存在する。(Enright [9])

以下，本稿では Complex Leech lattice 及びその自己同型群の factor group としての sporadic Suzuki group の定義(§2)より始めて，その基本的性質を幾つか紹介する。(§3) §3の内容は大体においては新しいものではないが，ここに述べる形で書かれたことは無いので（Complex Leech lattice を扱った論文としては Lindsey [15] が唯一のものであろう。）"Complex Leech lattice Λ_J" の意味を込めて，まとめておく。（証明等詳しくは [27] を見よ。）

§4では §3で準備した Complex Leech lattice の解析を通じて得られる顕著な 3-local group の幾つかを記述する。

なお，§3で見るように Complex Leech lattice の係数制限は Real Leech lattice として良く知られたものであるが（例えば Conway [5]）Complex Leech lattice 自身がある $\mathbb{Q}(i,j,k)^6$ の $\mathbb{Z}[i,j,k,\frac{1}{2}(1+i+j+k)]$-module の係数制限となっている。（ここで，$\mathbb{Q}(i,j,k)$ は $\mathbb{Q}$ 上の4元数環。）この module $\hat{\Lambda}$（Quaternionic Leech lattice とよぶ）に対応する群は $G_2(4)$ であり，$\hat{\Lambda}$ を通じて $G_2(4)$ の諸性質を解明しうると共に，$G_2(4) \subseteq Sz$ となるから，Sz 自身の subgroup の構造決定にも深くかかわってくる。この辺の事情の詳しい解説は Wilson [23] または [28] を参照されたい。

§2　基本概念の定義

Notation

$\Omega := \mathbb{F}_{11}$ 上の projective line $= \{\infty, 0, 1, \cdots, 10\}$

$Q := \mathbb{F}_{11}$ の平方元 $= \{x^2 \mid x \in \mathbb{F}_{11}\}$

$N := \Omega - Q$

$i \in \mathbb{F}_{11} = \{0, \cdots, 10\}$ に対して $N_i := \{n - i \mid n \in N\}$

$Q_i := \{q - i \mid q \in Q\}$；$N_\infty := \Omega$　とおく。

$\mathbb{F}_3$ 成分の1行12列 vector 全体のなす空間を $\mathbb{F}_3^{12}$ と書き，natural basis を Ω で index 付けて $\{e_\infty, e_0, \cdots, e_{10}\}$ とする。$\mathbb{F}_3^{12} \ni \mathbb{X} = \sum_{i=\infty}^{10} x_i e_i$ を $(x_i)_{i=\infty}^{10}$ とも書き，$\{i \in \Omega \mid x_i \neq 0\}$ を $\mathbb{X}$ の support，$\{i \in \Omega \mid x_i = 1\}$ を $\mathbb{X}$ の positive support，support の濃度を Weight とよぶ。また $X \subseteq \Omega$ に対して $\sum_{x \in X} e_x$ のことを，e_X と略記する。

（定義 1.）$c_\infty := e_\Omega = (1, \cdots 1)$

$c_i := e_{N_i} - e_{Q_i} = (\underbrace{1^6}_{N_i}, \underbrace{(-1)^6}_{Q_i})$　$(i \in \mathbb{F}_{11})$

とおくとき，これらの張る $\mathbb{F}_3^{12}$ の subspace

$\mathcal{C} := \langle c_\infty, c_0, \cdots, c_{10} \rangle$ を ternary Golay code とよび，

$\{\sigma : \{e_\infty, \cdots, e_{10}\}$ に関する単項行列 $\mid \mathcal{C}^\sigma = \mathcal{C}\}$

を $\mathcal{C}$ の自己同型群 と呼び $\mathrm{Aut}\,\mathcal{C}$ と記す。

次に，複素数体 $\mathbb{C}$ における 1 の原始 3 乗根 $\omega = -1+\sqrt{-3}/2$ をとり，$\theta := \sqrt{-3}$ とおく。$\mathbb{Z}$ に ω を添加した ring $\mathbb{Z}[\omega]$ $= \{\frac{1}{2}(a+b\theta) \mid a, b \in \mathbb{Z},\ a \equiv b \bmod 2\}$ を R とおく。θR は R の ideal であり $R/\theta R \cong \mathbb{F}_3$，この代表系として $\{0, \pm 1\}$ がとれる。

今，3 元体 $\mathbb{F}_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ を代表系 $\{0, \pm 1\}$ と同一視して $\mathbb{Z}$ の subset と見なし，$\mathbb{F}_3^{12} \subseteq \mathbb{Z}^{12}$（整数成分の 1 行 12 列ベクトルの全体）$\subseteq R^{12}$（$R$ 成分の 1 行 12 列ベクトル全体のなす R-module）とみる。この同一視のもとで，

（定義 2.）次の R^{12} の subset を <u>Complex Leech lattice</u> とよび Λ であらわす。

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{O} + \theta C + 3X \\ \mathbb{1} + \theta C + 3Y \\ -\mathbb{1} + \theta C + 3Z \end{array} \left| \begin{array}{c} X = (x_i),\ Y = (y_i),\ Z = (z_i) \in R^{12} \\ \sum_{i=\infty}^{10} x_i \equiv 0,\ \sum_{i=\infty}^{10} y_i \equiv 1,\ \sum_{i=\infty}^{10} z_i \equiv -1 \bmod \theta \\ C \in \mathcal{C} \end{array} \right. \right\}$$

ここで，$\mathbb{1} = (1, \cdots, 1)$

また $\{\sigma : \mathbb{Q}(\omega)$ 成分の 12 次ユニタリ 行列 $\mid \Lambda^{\sigma} = \Lambda\}$ を <u>Λ の自己同型群</u> とよび，これを $\mathrm{Aut}\,\Lambda = \widehat{G}$ と書く。

Λ は R^{12} の lattice；有限生成 R-module で，$\mathbb{Q}(\omega)\Lambda = \mathbb{Q}(\omega)^{12}$；が示される。また order 6 のスカラー行列 $-\omega I \in \widehat{G} = \mathrm{Aut}\,\Lambda$ は明らかであるが，factor group $\widehat{G}/\langle -\omega I \rangle =: G$ は simple group である事も示される。

$G = \mathrm{Aut}\,\Lambda / \langle -\omega I \rangle$ を Sporadic Suzuki group と呼ぶ。

以下，G の基本的性質の幾つかと，その為に必要な ternary Golay code $\mathcal{C}$，complex Leech lattice Λ ならびに $\mathrm{Aut}\,\mathcal{C}$，$\mathrm{Aut}\,\Lambda$ の幾つかの性質を証明なしに述べる。（証明等詳しくは [27] を参照）

§3 諸性質

(1) ternary Golay code $\mathcal{C}$ と，M_{11} の12点置換表現．

ternary Golay code $\mathcal{C}$ は次の $3^6 = 729$ 個のベクトルから成る。

Weight	形	positive support	個数
0	0	ϕ	1
6	① $\mp \mathbb{C}_i + \mathbb{C}_\infty = \pm(1^6\ 0^6)$	$N_i \quad (i \in \mathbb{F}_{11})$	11×2
	② $\pm \mathbb{C}_i - \mathbb{C}_\infty = \pm(1^6\ 0^6)$	$Q_i \quad (i \in \mathbb{F}_{11})$	11×2
	③ $\pm \mathbb{C}_i \pm \mathbb{C}_j = (\overset{\{a,b,c\}}{1^3}, -1^3, 0^6)$	Ωの任意の3点 a, b, c	$\binom{12}{3}$
9	① $\pm \mathbb{C}_i \pm \mathbb{C}_j + \mathbb{C}_\infty = (\underset{\{a,b,c\}}{-1^3}, 0^3, 1^6)$	Ωの任意の3点 a, b, c	$\binom{12}{3}$
	② ①の negative		$\binom{12}{3}$
12	① $\pm \mathbb{C}_i = \pm(1^6, -1^6)$	$N_i \quad (i \in \mathbb{F}_{11})$	11×2
	② $\mathbb{C}_\infty$, ③ $-\mathbb{C}_\infty$	Ω	1×2

$\mathcal{C}$ の weight n のベクトル全体を $\mathcal{C}_n$ と書く。$\mathrm{Aut}\,\mathcal{C}$ の元は

単項行列ゆえ，ベクトルのWeightを変えぬ。従って $\mathrm{Aut}\,\mathcal{C}$ は $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_6, \mathcal{C}_9, \mathcal{C}_{12}$ 上に作用するが，これらはすべて transitive となる。

特に $\mathrm{Aut}\,\mathcal{C}$ は24点集合 $\mathcal{C}_{12}=\{\pm c_i \mid i\in\Omega\}$ 上に transitive に作用し，従ってその符号を無視して得られる12個の pair のなす $C:=\{\{\pm c_i\} \mid i\in\Omega\}$ 上にも transitive に作用する。

一方，単項行列のなす群として $\mathrm{Aut}\,\mathcal{C}$ は24点集合 $\{\pm e_i \mid i\in\Omega\}$ 上，従って12個の pair $E:=\{\{\pm e_i\} \mid i\in\Omega\}$ 上に（transitive に）作用する。

E および C への作用の核は $\langle -I\rangle$ であり，$M:=\mathrm{Aut}\,\mathcal{C}/\langle -I\rangle$ とおけば (M, E) は単項行列が Ω 上にひきおこす自然な置換群であり，（M_{12}, natural な12点）と置換群として同型である事が示される。（M_{12} は12次 Mathieu 群）

もうひとつの12点集合 C 上の置換表現 (M, C) は，上の $M\cong M_{12}$ の自然表現とは同値にならない。実際，(M, C) の1点 $\{\pm c_\infty\}$ の stabilizer は，$\mathrm{Aut}\,\mathcal{C}$ の中の置換行列全体のなす群 P と同型で，E 上3重可移となる事が示される。

この $\mathrm{Aut}\,\mathcal{C}$ の permutation part P は，抽象群としては，(M_{12}, E) の1点の stabilizer M_{11}（11次 Mathieu 群）と同型となる事が示されるので，(P, C) は M_{11} の12点置換表現を与える。

P の $\mathcal{C}$ への作用により次の表で，$\mathcal{C}_6$ の ①,②,③；$\mathcal{C}_9$ の ①,②；

$\mathcal{C}_{12}$の$\mathbf{0}$, $\mathbf{c}_\infty$, $-\mathbf{c}_\infty$はそれぞれR-orbitとなる。

(2) Complex Leech lattice Λ ; Λ_2, Λ_3 および cross.

$\mathbf{x} \in \Lambda$ に対し, $q(\mathbf{x}) = \frac{2}{9}\sum_{i=\infty}^{10} |x_i|^2$ ($\mathbf{x}=(x_i)_{i=\infty}^{10}$; $|x_i|^2 = x_i \overline{x_i}$; $\overline{x_i}$ は x_i の複素共役) とおいて二次形式 q を定義すれば, $q(\mathbf{x})$ は even integer で, $q(\mathbf{x}) = 2$ をみたす $\mathbf{x} \in \Lambda$ は存在しない。すなわち, R-module Λ を $\mathbb{Z}$-module とみなして得られる $\mathbb{Q}^{24}$ の lattice $\Lambda|\mathbb{Z}$ は q より導かれる2次形式 q' に対し, even lattice かつ $q'(\mathbf{x})=2$ なる $\mathbf{x} \in \Lambda|\mathbb{Z}$ を持たぬが 更に $\Lambda|\mathbb{Z}$ は unimodular (i.e. q' に associate する双1次形式を $b_{q'}$ と書くとき $\Lambda|\mathbb{Z} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Q}^{24} \mid b_{q'}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{Z}\ (\forall \mathbf{y} \in \Lambda|\mathbb{Z})\}$) である事もわかる。従って, Conway [4] により $\Lambda|\mathbb{Z} \cong$ Real Leech lattice となる。これは Λ を complex Leech lattice と呼ぶ事の正当化である。

$\Lambda_n := \{\mathbf{x} \in \Lambda \mid q(\mathbf{x}) = 2n\}$ $(n=0,1,2,\cdots)$ とおく。$\Lambda_0 = \{\mathbf{0}\}$, 上の注意から $\Lambda_1 = \phi$. 慎重な計算により, Λ_2, Λ_3 の vector の個数と形が求められる。

$|\Lambda_2| = 196{,}560$, $|\Lambda_3| = 16{,}773{,}120$.

(定義 3.) R-module Λ の submodule $\theta\Lambda = \{\theta\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \Lambda\}$ による factor module $\overline{\Lambda} = \Lambda/\theta\Lambda = \{\mathbf{x} + \theta\Lambda \mid \mathbf{x} \in \Lambda\}$ を Λ の <u>mod θ の reduction</u> とよぶ。Λ_2, Λ_3 の natural projection $p: \Lambda \longrightarrow \overline{\Lambda}$ による image を $\overline{\Lambda}_2$, $\overline{\Lambda}_3$ と書く。

一般に，$\mathfrak{x} \in \Lambda$ に対して，$p(\mathfrak{x}) = p(\omega\mathfrak{x}) = p(\bar{\omega}\mathfrak{x})$ 及び $\mathfrak{x} \neq 0$ ならば $p(\mathfrak{x}) \neq p(-\mathfrak{x})$ である事に注意する。

次の重要な lemma が示される。

<u>lemma</u>．$\bar{\Lambda} = \{\bar{0}\} + \bar{\Lambda}_2 + \bar{\Lambda}_3$ と分解される。

また，p は Λ_2 上 3 対 1，Λ_3 上 $3 \cdot 12$ 対 1 の map。

$\bar{\mathfrak{x}} \in \bar{\Lambda}_2$ $(\mathfrak{x} \in \Lambda_2)$ に対し $p^{-1}(\bar{\mathfrak{x}}) = \langle\omega\rangle\mathfrak{x} = \{\mathfrak{x}, \omega\mathfrak{x}, \bar{\omega}\mathfrak{x}\}$。

$\bar{\mathfrak{x}} \in \bar{\Lambda}_3$ $(\mathfrak{x} \in \Lambda_3)$ に対し，$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1$ を含む Λ_3 の 12 個の vector $\{\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \cdots, \mathfrak{x}_{12}\}$ で，$p^{-1}(\bar{\mathfrak{x}}) = \{\langle\omega\rangle\mathfrak{x}_1, \langle\omega\rangle\mathfrak{x}_2, \cdots, \langle\omega\rangle\mathfrak{x}_{12}\}$ をみたすものが unique に存在する。また g に付随する双1次形式 f に関し，$\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_j$ $(1 \leq {}^\forall i \neq j \leq 12)$ は直交する。

例えば，${}^\forall i \in \Omega$ に対し $\mathfrak{s}_i := (\overset{i}{3\theta}, 0'')$ とおけば $\mathfrak{s}_i = 0 + \theta \cdot 0 + 3(\overset{i}{\theta}, 0'') \in \Lambda$ であり，$f(\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_j) = 0$ $({}^\forall i \neq j)$。また，

$\mathfrak{s}_i - \mathfrak{s}_j = \theta(\overset{i}{3}, \overset{j}{-3}, 0^{10})$ で

$(\overset{i}{3}, \overset{j}{-3}, 0^{10}) = 0 + \theta \cdot 0 + 3(\overset{i}{1}, \overset{j}{-1}, 0^{10}) \in \Lambda$ ゆえ

$\mathfrak{s}_i - \mathfrak{s}_j \in \theta\Lambda$. i.e. $p(\mathfrak{s}_i) = p(\mathfrak{s}_j)$.

従って，lemma から $p^{-1}(\bar{\mathfrak{s}}_\infty) = \{\langle\omega\rangle\mathfrak{s}_\infty, \langle\omega\rangle\mathfrak{s}_0, \cdots, \langle\omega\rangle\mathfrak{s}_{10}\}$ この $\{\mathfrak{s}_\infty, \mathfrak{s}_0, \cdots, \mathfrak{s}_{10}\}$ は Λ における直交座標軸の集合ともいうべき自然な対象である。そこで，

(定義 4.) Λ_3 の 12 個のベクトル $\mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_{12}$ が

(1) $f(\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_j) = 0$ $\quad (1 \leq {}^\forall i \neq j \leq 12)$

(2) $\mathfrak{x}_i - \mathfrak{x}_j \in \theta\Lambda$ $\quad (1 \leq {}^\forall i, j \leq 12)$

とみたすとき, 12個の rank 1 の R-submodules のなす unordered set $\{Rx_1, Rx_2, \cdots, Rx_{12}\}$ を cross とよび, 各 Rx_i を axis と呼ぶ。

lemma から, 任意の $x \in \Lambda_3$ に対し x を含む cross は unique に存在する。例えば先の $\delta_\infty = (\overset{\infty}{3\bar{\theta}}, 0^{11})$ を含む unique cross は $\{R\delta_\infty, R\delta_0, \cdots, R\delta_{10}\}$ である。この cross を standard cross とよび, S であらわす。

Λ の cross の全体を $\mathcal{S}$ と書くと, $\bar{\Lambda}_3 \ni p(x_1), -p(x_1) \longmapsto \{Rx_1, \cdots, Rx_{12}\}$ (x_1 を含む unique cross) $\in \mathcal{S}$ により, $|\mathcal{S}| = |\bar{\Lambda}_3|/2 = 2^9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$ である。

(3) Monomial subgroup, 行列式, G の order と simplicity.

以後 $\bar{\Lambda}_2, \bar{\Lambda}_3$ のかわりに, その符号を無視した pair より成る集合 $\{\{\pm\bar{x}\} \mid \bar{x} \in \bar{\Lambda}_2\}$ 等を考え, これも同じく $\bar{\Lambda}_2, \bar{\Lambda}_3$ と書く。$\mathrm{Aut}\,\Lambda$ の元はユニタリ行列ゆえ, f を保つから Λ_2, Λ_3 に作用する。$\theta\Lambda$ も不変にするから, 本来の意味での $\bar{\Lambda}_2, \bar{\Lambda}_3$, 従って, その符号を無視した $\bar{\Lambda}_2, \bar{\Lambda}_3$ 上にも作用する。この核は $\langle -\omega I \rangle$ であり, $G = \tilde{G}/\langle -\omega I \rangle$ は $\bar{\Lambda}_2, \bar{\Lambda}_3$ 上 faithful に作用。

$\bar{\Lambda}_3$ の 1 点 $\{\pm p(\delta_\infty)\}$ をとれば, G における この点の stabilizer は, $\mathrm{Aut}\,\Lambda$ における standard cross S の stabilizer M の image $\bar{M}\,(\subseteq G)$ である。M および $\bar{M} = M/\langle -\omega I \rangle$ を monomial subgroup とよぶ。

$$M=\left\{\sigma\in \mathrm{Aut}\,\Lambda \;\middle|\; \begin{array}{l}\forall i\in\Omega \text{ に対し, } \exists j\in\Omega \text{ をとれば} \\ (R\mathfrak{s}_i)^\sigma = R\mathfrak{s}_j\end{array}\right\}$$

である。$\mathrm{Aut}\,\Lambda$ は $\mathfrak{s}$ を保つから，$\mathbb{Z}[\omega]=R$ の unit group $\langle -\omega\rangle\cong\mathbb{Z}_6$ を U と書くとき，$\mathfrak{s}_i^\sigma\in R\mathfrak{s}_j\cap\Lambda_3=U\mathfrak{s}_j$.
そこで，M は U 成分の単項行列となる。

Λ の定義から，S の各 axis をすべて fix する M の subgroup D_0 は，$D_0=\langle -I\rangle\times D$，ここでアーベル群として $D\cong\mathcal{C}$ (ternary Golay code) という構造を持つ事がわかる。

$\mathcal{C}\ni \underset{(c_i)}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{C}}}$ に対し，行列 $d(\mathbb{C})\in D$ を，次の $d(c_i)$ を (i,i)

$$d(c_i):=\omega^{c_i}=\begin{cases}1 & \text{if } c_i=0\\ \omega & \phantom{\text{if }} c_i=1\\ \bar{\omega} & \phantom{\text{if }} c_i=-1\end{cases}$$

成分とする対角行列として定義すれば，$\mathbb{C}\longmapsto d(\mathbb{C})$ が上の同型 $D\cong\mathcal{C}$ を与える。

また $\mathrm{Aut}\,\Lambda$ の元は Λ 上への $\omega\in R$ の作用（これは D の元 $\omega I=(\omega,\cdots,\omega)$ 従って上の対応を通じて $(1,\cdots,1)=\mathbb{C}_\infty$ なる $\mathcal{C}$ のベクトルと対応）と可換ゆえ，$\mathrm{Aut}\,\mathcal{C}$ における $\mathbb{C}_\infty$ の stabilizer $P\cong M_{11}$ ($\mathrm{Aut}\,\mathcal{C}$ の permutation part) に対応する置換群（これも同じく P であらわす）が $M\subseteq\mathrm{Aut}\,\Lambda$ 中にあらわれる。

実は，$M=\langle -I\rangle\times(D_0\rtimes P)$ である。Λ_2,Λ_3 の M-orbit 分解を慎重に計算すると次の表の如くである。

Λ_2

代表元 $\mathbb{X}=(x_i)$	$\{\lvert x_\infty\rvert^2,\cdots,\lvert x_{10}\rvert^2\}$	orbitの濃度
(1) $(\underbrace{\theta^6}_{N}, 0^6)$	$\{3^6, 0^6\}$	$22\cdot 3^5\cdot 2$
(2) $(\underbrace{\theta^3}_{T_1}, \underbrace{(-\theta)^3}_{T_4}; 0^6)$	$\{3^6, 0^6\}$	$110\cdot 3^5\cdot 2$
(3) $(\overset{\infty}{3}, \overset{6}{-3}, 0^{10})$	$\{9^2, 0^{10}\}$	$3^2\cdot 11\cdot 12$
(4) $(\overset{\infty}{-2}, \overset{6}{-2}, 1^{10})$	$\{4^2, 1^{10}\}$	$2\cdot 3^6\cdot\binom{12}{2}$
(5) $(\overset{\infty}{-2+\theta}, \underbrace{\varpi^5}_{N}; 1^6)$	$\{7, 1^{11}\}$	$2\cdot 3^6\cdot 12$
(6) $(\overset{\infty}{-2-\theta}, \underbrace{\omega^5}_{N}; 1^6)$	$\{7, 1^{11}\}$	$2\cdot 3^6\cdot 12$

Λ_3 表中で $T_1=\{\infty,6,7\}$, $T_2=\{8,10,2\}$, $T_3=\{1,9,5\}$, $T_4=\{0,4,3\}$,

(1) $(\underbrace{(-\theta)^3}_{T_1}, \theta^6, \underbrace{0^3}_{T_4})$	$\{3^9, 0^3\}$	$2^3\cdot 3^6\cdot 5\cdot 11$
(2) $(\overset{\infty}{\theta}, \overset{6}{\theta\omega}, \overset{7}{\theta\varpi}; (-\theta)^6, \underbrace{0^3}_{T_4})$	$\{3^9, 0^3\}$	$2^4\cdot 3^7\cdot 5\cdot 11$
(3) $(\underbrace{\omega\theta, \theta, \theta}_{T_1}; \underbrace{\overset{8}{-\omega\theta}, -\theta, -\theta}_{T_2}; \underbrace{(-\theta)^3}_{T_3} \underbrace{0^3}_{T_4})$	$\{3^9, 0^3\}$	$2^4\cdot 3^6\cdot 5\cdot 11$
(4) $(\underbrace{\overset{\infty}{\theta\varpi}, \theta^5}_{N}; \overset{3}{3}, 0^5)$	$\{9, 3^6, 0^5\}$	$2^3\cdot 3^3\cdot 11$
(5) $(\underbrace{\overset{\infty}{\theta\omega}, \theta^5}_{N}; -3, 0^5)$	$\{9, 3^6, 0^5\}$	$2^3\cdot 3^3\cdot 11$
(6) $(\underbrace{\overset{\infty}{\theta\varpi}, \theta^2}_{T_1}; \overset{8}{3}, 0^5; \underbrace{(-\theta)^3}_{T_4})$	$\{9, 3^6, 0^5\}$	$2^4\cdot 3^3\cdot 5\cdot 11$
(7) $(\underbrace{3^3}_{T_1}, 0^9)$	$\{9^3, 0^9\}$	$2\cdot 3^3\binom{12}{3}$
(8) $(\underbrace{\theta^6}_{N}; \overset{6}{-2\varpi\theta}, 0^5)$	$\{12, 3^5, 0^6\}$	$2\cdot 3^5\cdot 22\cdot 6$
(9) $(\underbrace{\theta^3}_{T_1}, \underbrace{(-\theta)^3}_{T_4}; \overset{8}{-2\varpi\theta}, 0^5)$	$\{12, 3^5, 0^6\}$	$2\cdot 3^5\cdot 110\cdot 6$
(10) $(\overset{\infty}{3\theta}, 0^{11})$	$\{27, 0^{11}\}$	$12\cdot 6$
(11) $(\overset{\infty}{1}, \underbrace{(-2)^5}_{N}, 0^6)$	$\{4^5, 1^7\}$	$2\cdot 3^6\cdot 132$
(12) $(\overset{\infty}{1}, \underbrace{(-2)^2}_{T_1}, \underbrace{(-2)^3}_{T_4}, 1^3)$	$\{4^5, 1^7\}$	$2\cdot 3^6\cdot 6\cdot 110$

代表元 $x=(x_i)$	$\{\lvert x_\infty\rvert^2,\ldots,\lvert x_{10}\rvert^2\}$	orbitの濃度
(13) $(\underbrace{\overset{\infty}{-2+\theta}, \bar\omega^2}_{T_1}, \underbrace{(-2\bar\omega)^3}_{T_2}; 1^6)$	$\{7, 4^3, 1^8\}$	$2^3\cdot 3^6\cdot 3\cdot 110$
(14) $(\underbrace{\overset{\infty}{-2+\theta}, \bar\omega^2}_{T_1}; 1^6; \underbrace{(-2\omega)^3}_{T_4})$	$\{7, 4^3, 1^8\}$	$2^2\cdot 3^6\cdot 3\cdot 110$
(15) $(\underbrace{\overset{\infty}{-2-\theta}, \omega^2}_{T_1}, \underbrace{(-2\omega)^3}_{T_2}; 1^6)$	$\{7, 4^3, 1^8\}$	$2^3\cdot 3^6\cdot 3\cdot 110$
(16) $(\underbrace{\overset{\infty}{-2-\theta}, \omega^2}_{T_1}; 1^6; \underbrace{(-2\bar\omega)^3}_{T_4})$	$\{7, 4^3, 1^8\}$	$2^3\cdot 3^6\cdot 3\cdot 110$
(17) $(\underbrace{\overset{(\infty,6)}{(-2+\theta)^2}, (\bar\omega)^4}_{N}; \overset{0}{-2}, 1^5)$	$\{7^2, 4, 1^9\}$	$2\cdot 3^6\cdot 660$
(18) $(\underbrace{(-2-\theta)^2, \omega^4}_{N}; \overset{0}{-2}, 1^5)$	$\{7^2, 4, 1^9\}$	$2\cdot 3^6\cdot 660$
(19) $(\underbrace{\overset{\infty}{-2+\theta}, \bar\omega^2}_{T_1}; \overset{1}{-2}, 1^6; \underbrace{\overset{0}{-2-\theta}, \omega^2}_{T_4})$	$\{7^2, 4, 1^9\}$	$2\cdot 3^6\cdot 12\cdot 110$
(20) $(\underbrace{\overset{\infty}{1+2\theta}, \omega^5}_{N}; \overset{0}{-2}, 1^5)$	$\{13, 4, 1^{10}\}$	$2\cdot 3^6\cdot 12\cdot 11$
(21) $(\underbrace{\overset{\infty}{1-2\theta}, \bar\omega^5}_{N}, \overset{0}{-2}, 1^5)$	$\{13, 4, 1^{10}\}$	$2\cdot 3^6\cdot 12\cdot 11$
(22) $(\overset{\infty}{4}, 1^{11})$	$\{16, 1^{11}\}$	$2\cdot 3^6\cdot 12$

更に,

$$U(i,j,k) := \frac{1}{\theta}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} i & j & k \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \bar\omega \\ 1 & \bar\omega & \omega \end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l} i \\ j \\ k \end{array}$$

とおき、行列の直和

$$\xi := U(\infty,6,7)\oplus\overline{U}(8,10,2)\oplus\overline{U}(1,9,5)\oplus U(0,4,3)$$

を作ればこれは12次ユニタリ行列であるが Λ を保つ事がcheckされる。すなわち、$\xi\in\mathrm{Aut}\,\Lambda=\tilde{G}$.

上の Λ_2, Λ_3 の M-orbitの代表元等を ξ で動かしてみることにより、$\langle\xi, M\rangle$ は Λ_2, Λ_3 上それぞれtransitiveとなる事が示される。特に、$G=\tilde{G}/\langle -\omega I\rangle$ は、$\bar\Lambda_2, \bar\Lambda_3$ 上transitiveであり、前に注意した如く、$\bar\Lambda_3$ の点 $\{\pm p(\delta_\infty)\}$ の G における

stabilizer は $\overline{M} = D_0/\langle\omega I\rangle \rtimes P \cong 3^5 \rtimes M_{11}$ （3^5 は order 3^5 の elementary abelian 3-group をあらわす．以後も使う．）であり，
$|\Lambda_3| = |\mathcal{S}| = 2^9\cdot5\cdot7\cdot13$ ゆえ，G の order は，
$|G| = |\Lambda_3|\cdot|\overline{M}| = (2^9\cdot5\cdot7\cdot13)\cdot3^5\times 11\cdot10\cdot9\cdot8 = 2^{13}3^7\cdot5^2\cdot7\cdot11\cdot13$
と定まる。（ここの Λ_3 は符号を無視した新たな Λ_3 である．）

更に，Aut Λ における $X = (\overset{6}{3}, \overset{7}{-3}, 0^{10}) \in \Lambda_2$ の stabilizer が；ξ，$D_1 = \{d(C) \mid C$ は 6,7 を support を含まぬ C の元$\}$，$P_{6,7} = \{\sigma\in P \mid 6^\sigma=6, 7^\sigma=7\}$ 等を含む事から，G における $\overline{X}$ の stabilizer $G_{\overline{X}}$ の Λ_2 （$196560/6 = |\Lambda_2|$）への作用における orbit が求められ，その size は 1, 891, 1980, 2816, 6336, 20736。（$X\in\Lambda_2$ に対する通常の内積 $X\cdot Y$ の値が $\langle-\omega\rangle 18, \langle-\omega\rangle 9, \langle-\omega\rangle 6\theta, \langle-\omega\rangle 3\theta, 0$；の 0 を除く各々の値に対する $Y\in\Lambda_2$ の全体に G_X は transitive. $X\cdot Y=0$ なる $Y\in\Lambda_2$ は2つの G_X-orbit に分かれる。）この値から，(G,Λ_2) が primitive であることがわかる。（従って $G_{\overline{X}}$ は G の maximal group である！）

また，この事実と Aut Λ の元の固有値に対する簡単な注意により，あとは標準的な群論で G の simplicity が示される。

注意： 上の $\overline{X}\in\overline{\Lambda}_2$ の stabilizer $G_{\overline{X}} \cong U_5(2)$ である事が G の maximal local subgroup の分類が終了した段階でわかる。多分，もっと explicit に同型を確認できるであろう。

§4 Some 3-locals in G

この§では前§の準備だけから見つかるMaximal 3-local group の候補（実際にmaximal groupになる）を記述する。

前§で見た通り，対応 $\mathbb{C} \longmapsto d(\mathbb{C})$ を通じて ternary Golay Code $\mathcal{C}$ と Aut/L の subgroup D は $Aut\,\mathcal{C}$ の permutation part P の作用も込めて同型であった。$\mathcal{C}$ の P-orbit と $\mathcal{C}$ の元の表から $\bar{D} = D/\langle \omega I\rangle \subseteq G$ は P の作用で2個の orbits に分解する。代表元は $d(\mathbb{C}_i) = \omega_i$ と $d(\mathbb{C}_i+\mathbb{C}_j)=\omega_i\omega_j$ の image である。$|G|$ より，$\bar{D}\cdot P$ は G の 3-Sylow group を含むが $\bar{D}$ の外側の元は $\bar{M}=\bar{D}\cdot P$ で2つの共役類に分解し，前§の元 ξ により $\omega_i\omega_j$ とある $\bar{M}-\bar{D}$ の元は fuse する。mod $\langle -\omega\rangle$ でみた行列の trace をしらべればこうして得られた3つの $\langle \xi, \bar{M}\rangle$-class は fuse しえぬ。すなわち，$G$ の order 3 の元は3つの共役類に分かれる。ω_i, $\omega_i\omega_j$ を含む共役類を $\mathcal{C}_G(3A)$, $\mathcal{C}_G(3B)$, もうひとつを $\mathcal{C}_G(3C)$ と書く時，次が示せる。

<u>Lemma</u> ([26] Prop. 1.5) G の $\underbrace{\text{3-local}}_{\text{maximal}}$ group L に対して次のいずれかが成り立つ。

(1) $L = N_G(A)$ ここで，$A = \langle A \cap \mathcal{C}_G(3A)\rangle\ (\neq 1)$

(2) $L = N_G(A)$ ここで，$A^{\#} \subseteq \mathcal{C}_G(3C)$

以下(1)の形の3-local について述べる。$A \subseteq \bar{D}\cdot P$ としてよいから先の考察より $A \subseteq \bar{D}$ となる。P の作用を考えるこ

とより $\overline{\omega}_0 \in A$ としてよい。また $|A| \geqq 3^2$ ならば $\langle \overline{\omega}_0, \overline{\omega}_1 \rangle \subseteqq A$ としてよい。

$D \supseteq X$ に対して，X が axis 毎に fix する cross の全体を $\Phi(X)$ と書く。例えば $\Phi(D) = \{S\}$ であり，前§から，S を axis 毎に fix する $\mathrm{Aut}\,\Lambda = \widetilde{C}$ の subgroup は $D \times \langle -I \rangle$ である。

簡単な計算で，$\Phi(\langle \omega_\infty, \omega_0, \omega_1 \rangle) = \{S, D_1, D_2, D_3\}$ が示せる。ここで，S は standard cross，また D_1, D_2, D_3 は次の cross である。

$T_1 = \{\infty, 6, 7\}$, $T_2 = \{8, 10, 2\}$, $T_3 = \{1, 9, 5\}$, $T_4 = \{0, 4, 3\}$

とするとき，

$$D_1 = \left\{ \begin{array}{l} R(\overbrace{3, 3, 3}^{T_i}, 0^9) \\ R(3, 3\omega, 3\overline{\omega}, 0^9) \\ R(3, 3\overline{\omega}, 3\omega, 0^9) \end{array} \middle| \; i = 1 \sim 4 \right\}$$

$$D_2 = \left\{ \begin{array}{l} R(\overbrace{3, 3, 3\omega}^{T_i}, 0^9) \\ R(3, 3\omega, 3, 0^9) \\ R(3\omega, 3, 3, 0^9) \end{array} \middle| \; i = 1 \sim 4 \right\}$$

$$D_3 = \left\{ \begin{array}{l} R(\overbrace{3, 3, 3\overline{\omega}}^{T_i}, 0^9) \\ R(3, 3\overline{\omega}, 3, 0^9) \\ R(3\overline{\omega}, 3, 3, 0^9) \end{array} \middle| \; i = 1 \sim 4 \right\}$$

さて，$\langle \omega_0, \omega_1, \omega_\infty \rangle \subsetneqq A \subseteqq D$ とすると，$\exists\, \omega_i \in A \ (i \neq 0, 1)$ であり，$\Phi(A) \subseteqq \Phi(\langle \omega_0, \omega_1, \omega_\infty \rangle) = \{S, D_1, D_2, D_3\}$ は明らかだが ω_i は D_1, D_2, D_3 を axis 毎には fix しない。

よって, $\Phi(A)=\{S\}$である。$N_{\mathrm{Aut}\Lambda}(A)$は明らかに$\Phi(A)$に作用するから$S$をstabilizeし, 従って$N_{\mathrm{Aut}\Lambda}(A)\subseteq M$. $G=\mathrm{Aut}\Lambda/\langle -\omega_\infty\rangle$で考えれば$N_G(\bar{A})\subseteq\bar{M}$である。

従って, (1)の形のmaximal 3-localは$N_G(\langle\bar\omega_0\rangle)$, $N_G(\langle\bar\omega_0,\bar\omega_1\rangle)$または$N_G(\bar{D})=\bar{M}$のいずれかに共役でなければならぬ。

$N_G(\langle\bar\omega_0,\bar\omega_1\rangle)$の構造は, $\Phi(\langle\omega_0,\omega_1,\omega_\infty\rangle)=\{S,D_1,D_2,D_3\}$への作用の核（それは$S$をfixするから$M$に入る）を$M$中できちんと見る事, 及び4元集合$\Phi(\langle\omega_0,\omega_1,\omega_\infty\rangle)$上に$A_4$がひきおこされる事により定められて, $3^{2+4}\rtimes Z_2(A_4\times E_4).Z_2$と同型な群になる。

$N_G(\langle\bar\omega_0\rangle)$の構造は次の様に求められる。$\omega_0=(\bar\omega^6\ \overset{N}{\omega^6})$の固有値$\omega$に対する固有空間と$\Lambda$の共通部分であるrank 6のsublattice $\Gamma=\{x\in\Lambda\mid x^{\omega_0}=\omega x\}$, 更に$\Gamma$のmod θのreduction $\bar\Gamma=\Gamma/\theta\Gamma=\{x+\theta\Gamma\mid x\in\Gamma\}$を考える。$\bar\Gamma$は$F_3$上6次元のspaceであるがここに$\Lambda$の2次形式$g$の$\Gamma$への制限よりinduceされる2次形式$\bar g$: $\bar g(\bar x)=\frac{1}{2}g(x) \bmod \theta$ ($g(x)$はeven integerであった.) を入れる。この2次形式$\bar g$はnon-degenerateでnegative typeである事が示される。$C_{\mathrm{Aut}\Lambda}(\omega_0)$は$\bar\Gamma$に作用し(ユニタリ行列ゆえ) g従って$\bar g$を保つから, 作用の核で割った部分は$O^-(6,3)$のsubgroup, 実はその交換子となる事がわかる. 核は$\langle\omega_0,\omega_\infty\rangle$であることがわかり, これから$C_G(\bar\omega_0)\cong Z_3\cdot P\Omega^-(6,3)$がわかる. ($-I$は$O^-(6,3)$のスカラー行列になる.) また$D$で$\omega_0$をinvert

する元があるから，$C_G(\overline{\omega_0}) \cong Z_3 \cdot P\Omega^-(6,3) \cdot Z_2 \cong Z_3 \cdot U_4(3) \cdot Z_2$
（よく知られた同型 $P\Omega^-(6,3) \cong U_4(3)$．）

References

[1] Bloom, D. M., The subgroups of $PSL_3(q)$, for odd q, Trans. Amer. Math. Soc., 127 (1967) 150–178.

[2] Butler, G., The maximal subgroups of the sporadic simple group of Held, J. Algebra 69 (1981) 67–81.

[3] Butler, G., in [6]

[4] Conway, J. H., A characterization of Leech's lattice, Inventiones Math. 7 (1969) 137–142.

[5] Conway, J. H., Three lectures on exceptional groups, "Finite simple groups", Academic Press, London, 1971. chap. VII, 215–247.

[6] Cooperstein, B., Maximal subgroups of $G_2(2^n)$, J. Algebra, 70 (1981) 23–36.

[7] Curtis, R. T., On subgroups of ·0, I Lattice stabilizers, II Local structure, J. Algebra 27 (1973), J. Algebra 63 (1980) 413–434.

[8] Dickson, L. E., Linear Groups, Dover, New York, 1958.

[9] Enright, G. M., Subgroups generated by transpositions in F_{22} and F_{23}, Comm. in Algebra, 6 (8), 823–837 (1978).

[10] Finkelstein, L., The maximal subgroups of Conway's group C_3 and McLaughlin's group, J. Algebra 25 (1973) 58–90.

[11] Finkelstein, L., and Rudvalis, A., Maximal subgroups of Janko's simple groups of order 50,232,960, J. Algebra 30 (1974), 122–143.

[12] Finkelstein, L., and Rudvalis, A., Maximal subgroups of the Hall-Janko-Wales group, J. Algebra 24 (1973), 486–493.

[13] Hartley, R.W., Determination of ternary collineation group whose coefficients lie in $GF(2^n)$. Ann. of Math. 27 (1925) 140–158.

[14] Janko, Z.A., A new finite simple group with abelian 2-Sylow subgroups and its characterization, J. Algebra 3 (1966) 147–186.

[15] Lindsey, J.H, A correlations between $PSU_4(3)$, the Suzuki group and the Conway group, Trans. Amer. Math. Soc., 157 (1971) 189–204

[16] Magliveras, S.S., The subgroup structure of the Higman-Sims group, Bull. Amer. Math Soc., 77 (1971) 535–539.

[17] Mitchell, H.H., Determination of the ordinary and modular ternary linear groups, Trans. Amer. Math. Soc., 12 (1911) 207–242.

[18] Mitchell, H.H., The subgroups of the quaternary abelian linear groups, Trans. Amer. Math. Soc., 15 (1914) 379–396.

[19] Mwene, B., On the subgroups of the group $PSL_4(2^n)$, J. Algebra 41 (1976) 79–107.

[20] Petrov. N and Tchackerian. K., The maximal subgroups of $G_2(4)$,

J. Algebra 76, 171–188 (1982)

[21] Suzuki, M., On a class of doubly transitive groups, Ann. Math. 75, 105–145 (1962).

[22] Tchakerian, K., The maximal subgroups of the Tits simple group Compus Rendus de l'academie Bulgare des sciences 34, N°12 (1981).

[23] Wilson, R. The Quarternionic lattice for $2G_2(4)$ and its maximal subgroups, J. Algebra 77, 441–466 (1982)

[24] Wilson, R. The Complex Leech lattice and the maximal subgroups of Suz, to appear in J. Algebra (?)

[25] Wilson, R. personal communication

[26] Yoshiara, S. 散在型鈴木単純群の極大部分群について 東大修士論文 1982

[27] Yoshiara, S. to appear

[28] Yoshiara, S. to appear