数理解析研究所講究録
第 475 巻 1982 年 47-56

保型形式とMathieu群

名大 理　小池 正夫

(MASAO KOIKE)

§1. Mckayの問題

代数学通信に紹介されていたMckay自身のとは異なるが，同じ名前をつけることにしてそれを説明する：

$t_1 > t_2 > \cdots > t_j \geqq 1$ を整数，$n_1, \cdots, n_j$ を 0 でない整数とする．$s = \sum_{i=1}^{j} n_i$ は正の偶数と仮定する．Dedekindの η 関数：$\eta(\tau) = e^{\frac{\pi i \tau}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2n\pi i\tau})$，$\tau \in \mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}\tau > 0\}$ は $\mathbb{H}$ で正則で 0 を値にもたない．整数の組 $\{(t_1, n_1), \cdots, (t_j, n_j)\}$ に対して $\mathbb{H}$ の正則な関数

$$f(\tau) = \prod_{i=1}^{j} \eta(t_i\tau)^{n_i}$$

を対応させる．

Mckayの問題　$f(\tau)$ が全てのHecke作用素の同時固有関数となるような cusp form となる整数の組 $\{(t_1, n_1), \cdots, (t_j, n_j)\}$ を全て求めよ．

ここで次の条件を付加する：

(0) $\quad n_i > 0 \quad {}^\forall i$

すると Mckayの問題は次の条件をみたす有限個の整数の組として解ける:

(1) ${}^\forall t_i$ は t_1 の約数である.

(2) $N = t_1 t_j$ とおくと $\left\{ \left(\frac{N}{t_1}, n_1\right), \cdots, \left(\frac{N}{t_j}, n_j\right) \right\} = \left\{ (t_1, n_1), \cdots, (t_j, n_j) \right\}$

(3) $\sum t_i n_i = 24$

保型形式の言葉を少し説明する: $N \geqq 1$ 整数, $k \geqq 1$ 整数, ε を $\bmod N$ の Dirichlet 指標で $\varepsilon(-1) = (-1)^k$ とする. $\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \;\middle|\; c \equiv 0 \pmod N \right\}$. $\Gamma_0(N)$ に関する weight が k, 指標 ε の cusp form $f(\tau)$ とは次の条件をみたすものとする:

(i) $f(\tau)$ は $\mathbb{H}$ 上正則で次の変換公式をみたす.

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \varepsilon(d)(c\tau + d)^k f(\tau), \quad {}^\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$$

(ii) 'cusp' で 0 になる.

$S_k(N, \varepsilon)$ で上記をみたす $f(\tau)$ 全体を表わし. 特に ε が自明の時には $S_k(N)$ と単にかくことにする。

$\Gamma_0(N) \ni \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ だから $f(\tau) \in S_k(N, \varepsilon)$ は Fourier 展開:

$$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n, \quad a_n \in \mathbb{C}, \quad q = e^{2\pi i \tau}$$ をもつ.

各素数 p について $S_k(N, \varepsilon)$ に作用する Hecke 作用素 $T(p)$ を

$$f(\tau) \mid T(p) \underset{\mathrm{df}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_{np} q^n + p^{k-1} \varepsilon(p) \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^{np}$$

で 定義できる。$T(p)$達は互いに可換で 任意の自然数nについては 次の式で定める:

(i) $(n, m) = 1$ ならば $T(nm) = T(n)T(m)$

(ii) $T(p)\,T(p^a) = T(p^{a+1}) + p^{k-1}\varepsilon(p)\,T(p^{a-1})$, $a \geq 1$.

(0)〜(3)をみたす整数の組を略記して $t_1^{n_1} \cdot t_2^{n_2} \cdots$ とかくとそれらは次のものが全てである.（Mckay list とよぶ）

$s = 2$: $23 \cdot 1$, $22 \cdot 2$, $21 \cdot 3$, $20 \cdot 4$, $18 \cdot 6$, $16 \cdot 8$, 12^2

$s = 4$: $15 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$, $14 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 1$, $12 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$, $11^2 \cdot 1^2$, $10^2 \cdot 2^2$, $9^2 \cdot 3^2$
6^4, $8^2 \cdot 4^2$

$s = 6$: $8^2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1^2$, $7^3 \cdot 1^3$, $6^3 \cdot 2^3$, 4^6

$s = 8$: $4^4 \cdot 2^4$, $5^4 \cdot 1^4$, $6^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2$, 3^8

$s = 10$: $4^4 \cdot 2^2 \cdot 1^4$

$s = 12$: $3^6 \cdot 1^6$, 2^{12}

$s = 16$: $2^8 \cdot 1^8$

$s = 24$: 1^{24}

これらの整数の組に対して [3] の結果（ただし s:偶数にも拡張しておいて）を使うと 対応する $f(\tau)$ が weight が $\frac{s}{2}$ の $\Gamma_0(t_1 t_j)$ に関する ある指標 ε をもつ cusp form であることがわかる。 $s \equiv 0 \pmod 4$ ならば ε は自明であり. その他の場合も具体的にかける。 このとき

<u>命題</u>　Mckay list の $s\geqq 4$ の整数の各組について

$$\dim S_{\frac{s}{2}}(t_i t_j,\ \varepsilon) = 1 \quad \text{である。}$$

従って　これらの元が　Hecke 作用素の同時固有関数になることが　ただちにわかってしまう。

$s=2$，従って　weight が 1 の cusp form については　それが　Hecke 作用素の同時固有関数となるためには　ある2次体の ideal 群の有限指標の L-関数と　Mellin 変換で結びついていることが十分条件として　知られているので，Mckay list の個々の場合に具体的にたしかめることによって　同時固有関数となることが　証明できる．

Mckay の問題の解で　Mckay list に入らないものは［3］に1つの例がある：

$$g(\tau) = \frac{\eta(8\tau)^8}{\eta(4\tau)^2\eta(16\tau)^2} \in S_2(2^6) \qquad (\leftrightarrow 4^{-2}\cdot 8^8\cdot 16^{-2})$$

これについて少し解説する．$f(\tau) = \eta(8\tau)^2\eta(4\tau)^2$ $(\leftrightarrow 8^2\cdot 4^2)$ は $S_2(2^5)$ の元で　$\dim S_2(2^5) = 1$ である．　new form について説明しよう．$S_k(N,\varepsilon)$ に対して　$S_k{}^1(N,\varepsilon) = \langle f(d\tau) \mid f\in S_k(M,\varepsilon)\quad M|N,\ 0<M<N,\quad 0<d\in\mathbb{Z}\quad d|\frac{N}{M} \rangle$ はその部分空間であり．Petersson 内積によるその直交補空間を $S_k^0(N,\varepsilon)$ とかき　new forms の空間とよぶ。$S_k^0(N,\varepsilon)$ は

Hecke 作用素でとじていることがいえ，本質的に新しい固有値がそこにあらわれる．

上の例の場合　$\dim S_2(2^6)=3$ だが　$\dim S_2^0(2^6)=1$ で

$f(\tau)\in S_2^0(2^6)$ がいえるので　$16^{-2}\cdot 8^8\cdot 4^{-2}$ が Mckay の問題の解になることがわかる。　従って　次の条件 (4) (5) がある．

(4)　$f(\tau)$ は new form である．

(5)　$\dim S^0_{\frac{5}{2}}(N,\varepsilon)=1$

Mckay の問題の解答として　(1)〜(5) をみたすことが必要十分条件としていえれば望ましいのだが。

<u>他の例</u>

① $S_4(8)=\langle 4^4\cdot 2^4\rangle,\quad S_4^0(16)=\langle 8^{-4}\cdot 4^{16}\cdot 2^{-4}\rangle$

② $S_3(8,\varepsilon)=\langle 8^2\cdot 4\cdot 2\cdot 1^2\rangle,\ S_3^0(32,\varepsilon)=\langle 16^{-2}\cdot 8^5\cdot 4^5\cdot 2^{-2}\rangle$

③ $S_6(4)=\langle 2^{12}\rangle,\quad \dim S_6^0(8)=1$

$8^{-4}\cdot 4^{10}\cdot 2^{10}\cdot 1^{-4}\in S_6(8),\quad \notin S_6^0(8)$

§2.　M_{24} との関係

Mathieu 群 M_{24} は 24 次の対称群の部分群だから　M_{24} の各共役類 (m) に対して　輪積による表示　$(m_1)\cdots(m_s)$，$m_1\geqslant m_2\geqslant\cdots\geqslant m_s$，$\sum m_i=24$　が対応している。　$m_1,\cdots,m_s$ の中で等しいものを集めて　$t_1^{n_1}\cdots t_j^{n_j}$ の形にかきかえたものを同一視して　Mckay list と比べると　次の奇妙な事実にきがつく：

事実: M_{24} の各共役類の輪積による表示は 全て Mckay list にある.

輪積表示に保型形式を対応させるという idea は Conway - Norton [1] にすでにのっているが それを借りてくる. $M_{24} \ni m$ に対して その属する共役数の輪積表示を $(m_1)\cdots(m_s)$ とする時.

$$\eta_m(\tau) = \eta(m_1\tau)\cdots\eta(m_s\tau)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} H_n(m)\, q^n, \qquad H_n(m)\in\mathbb{Z},\ H_1(m)=1$$

を考える. $\eta_m(\tau)$ が m の共役数にしかよらないことから, その Fourier 係数 $H_n(m)$ についても同じことがいえる. 上の事実と §1 で論じたことをあわせれば 次のことがでる.

定理 1 $M_{24} \ni m$ に対応する保型形式 $\eta_m(\tau)$ は $\Gamma_0(m_1 m_s)$ に関する weight が $\frac{s}{2}$ である指標 ε_m をもつ cusp form で 全ての Hecke 作用素の同時固有関数である. とくに $s\equiv 0 \pmod 4$ ならば ε_m は自明な指標である。

$\eta_m(\tau)$ が Hecke 作用素の同時固有関数であることから H_n は次の関係式をみたす: p を素数とすると

(i) $H_p(m)\, H_{p^a}(m) = H_{p^{a+1}}(m) + p^{\frac{s}{2}-1}\varepsilon_m(p)\, H_{p^{a-1}}(m)$,

(ii) $(r, n) = 1$ ならば $H_{rn}(m) = H_r(m) H_n(m)$

<u>Leech lattice との関係</u>　Leech lattice L は M_{24} と関連してよくでてくるが、ここで必要な事実は L は $\mathbb{R}^{24}$ の lattice で unimodular な2次形式 $\langle x, y\rangle$ が定義されている。$\mathbb{R}^{24}$ の適当な basis $\{v_i\}$ に対して M_{24} は basis の置換をひきおこして L に自己同型として作用している。$M_{24} \ni m$ に対して $L_m = \{x \in L \mid m \cdot x = x\}$ を考える。上記のことから L_m は rank s（ただし m の共役数の輪積の数を s とする）で2次形式が定義される。従って

$$\theta_m(\tau) \underset{\mathrm{df}}{=} \sum_{x \in L_m} e^{\pi i \langle x, x\rangle}$$

は weight が $\frac{s}{2}$ のある $\Gamma_0(N)$ に関する保型形式である。従って

$$j_m(\tau) \underset{\mathrm{df}}{=} \frac{\theta_m(\tau)}{f_m(\tau)}$$

を考えると、これはある $\Gamma_1(N')$ に関する <u>保型関数</u> になることがわかる。そして cusp ∞ において1位の極をもつこともわかる。今そこでの Fourier 展開を

$$j_m(\tau) = q^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n(m) q^n, \quad A_n(m) \in \mathbb{Z}, \quad q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$$

とおく。

$H_n(m)$, $A_n(m)$ はともに m の関数とみれば M_{24} 上の類関数であることは明らかである。このとき次の定理が成立つ。

<u>定理2.</u> ① A_n は M_{24} の指標である。

② H_n は M_{24} の一般化された指標である。

ここで Conway-Norton [1] らによって予想され Atkin Fong らによって証明された 'Monstrous-Moonshine' との関係をのべておこう。 F_1 で Fisher-Grieß の 'Monster' とよばれる単純群をあらわす。 F_1 の各元 m に対して Thompson series

$$T_m(\tau) = q^{-1} + 0 + \sum_{n=1}^{\infty} H_n(m) q^n$$

で次の性質をみたすものが対応させることができる。

(i) $^{\forall}H_n$ は F_1 の指標である。

(ii) $T_m(\tau)$ は適当な N (mの位数と関係している) をとれば $\Gamma_0(N)$ を含むようなある Fuchs群 Γ_m に関する保型関数である

(iii) Γ_m に関する保型関数体は genus 0 で $T_m(\tau)$ はその体の生成元である。

一方 Leech lattice の自己同型群として与えられる Conway の群 $\cdot O$ に対して輪積の拡張のような Frame shape という概念があり それを使って $\cdot O \ni g$ に対して f_g, θ_g, J_g が同様に定義される。 Mckay によれば F_1 の元と $\cdot O$ の元の間に対応する Thompson series と J_g が定数項を除いて一致するような対応があるとのことだが詳しくは知らない。

実際 L_m は具体的に知られていないので，J_m がわかることを用いて計算できればおもしろい．

<u>Remark</u> 研究集会の時に G. Mason : M_{24} and certain automorphic forms という preprint を見せていただいので最後にふれておく：定理1が紹介されていたり，Fourier係数から簡単につくられる M_{24} の指標を群から直接構成しようとするなど興味深いことがかかれている．McKay list にでてくるが M_{24} の共役類の輪積表示にあらわれない $4^2 8^2$, $20\cdot 4$, $22\cdot 2$ が $2^{12}M_{24}$ の元の Frame shape としてでてくることが注意されている．しかし残る4つ：$6^3 2^3$, $9^2 3^2$, $18\cdot 6$, $16\cdot 8$ はこのようにして得られないようにかかれてある．$\cdot 0$ の元の Frame shape を表を御存知の方に教えていただければうれしいです．

文献

[1] J. Conway and S. Norton : Monstrous Moonshine, Bull. Lond. Math. Soc., 11 (1979), 308-339.

[2] G. Mason : M_{24} and certain automorphic forms, preprint.

[3] T. Honda and I. Miyawaki : Zeta-functions of elliptic curves of 2-power conductor, J. Math. Soc. Japan, 26 (1974), 362-373.