数理解析研究所講究録
第 475 巻 1982 年 57-74



# 多重線型写像の自己同型群と有限群

東京理科大　江川嘉美 (Y. Egawa)
大阪教育大　鈴木　寛 (H. Suzuki)

## §1. はじめに

Vを、体F上の有限次元線形空間とする。この時V上の二種類の多重線形な写像を考える。まず値域がVに含まれる

$$\Theta_1 : \overbrace{V \times \cdots \times V}^{r} \longrightarrow V \qquad \cdots\cdots\cdots (1)$$

を、ここでは、r-次の多重線形写像、値域がFに含まれる

$$\Theta_2 : \overbrace{V \times \cdots \times V}^{r+1} \longrightarrow F \qquad \cdots\cdots\cdots (2)$$

を、(r+1)-次の多重線形形式とよぶことにする。それぞれについて、自己同型群を次の様に定義する。

$$\mathrm{Aut}\,\Theta_1 = \{ g \in GL(V) : \Theta_1(u_1^g, \cdots, u_r^g) = \Theta_1(u_1, \cdots, u_r)^g \text{ for } \forall u_1, \cdots, u_r \in V \}$$

$$\mathrm{Aut}\,\Theta_2 = \{ g \in GL(V) : \Theta_2(u_1^g, \cdots, u_{r+1}^g) = \Theta_2(u_1, \cdots, u_{r+1}) \text{ for } \forall u_1, \cdots, u_r \in V \}$$

$\mathrm{Aut}\,\Theta_2$ は、GL(V) の元が体Fに自明に作用していると考えれば、$\mathrm{Aut}\,\Theta_1$ の右辺の様な形にも書ける。

Θを、多重線形写像（又は、形式）とし、我々は、次の問題を考える。

問題Ⅰ. $\mathrm{Aut}\,\Theta$ が有限群となる条件を求めよ。

問題Ⅱ. 有限群 $G$ が与えられた時、$\mathrm{Aut}\,\Theta$ の主要部分が、$G$ となるような $\Theta$ をみつけよ。

問題Ⅲ. $\Theta$ が与えられた時、$\mathrm{Aut}\,\Theta$ を決定せよ。

さて、上記のように我々は、$\mathrm{Aut}\,\Theta$ が有限になる場合に興味があるので、上の (1) 及び (2) に関して、$r \geqq 2$ の場合のみ考える。以後、$\Sigma_n$ は、$n$ 次対称群を あらわすものとする.

## §2. 問題Ⅰに関して

まずいくつかの定義をする。

定義2.1. $V$ を代数閉体 $F$ 上の線形空間とする。

(1) $r$-次の多重線形写像 $\Theta$ が非退化とは、任意の $v \in V-\{0\}$ について $\Theta(v, v, \cdots, v) \neq 0$ なることである。

(2) $(r+1)$-次の多重線形形式 $\Theta$ が非退化とは 任意の元、$v \in V-\{0\}$ について、$u \longmapsto \Theta(v, \cdots, v, u)$ によって決まる写像が、零写像ではないことである。

定義2.2. $\Theta$ を $r$-次の多重線形写像又は多重線形形式とす

る。 $\Theta$ が対称であるとは $\Theta(u_1,\cdots,u_r)=\Theta(u_1^\sigma,\cdots,u_r^\sigma)$ が、任意の $u_1,\cdots,u_r\in V$ と $\sigma\in\Sigma_r$ について成立することである。

定義2.3. (1) $MM(r,V)$を、$V$上$r$-次の多重線形写像全体の集合、$SMM(r,V)$を、$MM(r,V)$の元で、対称なもの全体の集合とする。

(2) $MF(r,V)$を、$V$上 $r$-次の多重線形形式全体の集合とし、$SMF(r,V)$を、$MF(r,V)$の元で、対称なもの全体の集合とする。

(3) $M$を、$MM(r,V)$, $SMM(r,V)$, $MF(r,V)$, $SMF(r,V)$のいずれかとし、$G$を、$GL(V)$の部分群である時、

$$M_G=\{\Theta\in M : \mathrm{Aut}\,\Theta\geq G\}$$

とする。

まず $\Theta$ が、多重線形写像の時は、次の結果を得ている。

定理2.1. ([11]) $V$を代数閉体 $F$ 上の線形空間とし、$\Theta$を非退化な、$MM(r,V)$ $(r\geqslant 2)$ の元とする。この時、

(1) $\mathrm{Aut}\,\Theta$ は有限群である。

(2) $U$を $\mathrm{Aut}\,\Theta$ の べき単部分群とすると、$|U|\leq|\Sigma_{\dim V}|_p$.

ここで $p=\mathrm{char}F$ であり、$p=0$ の時は $|\Sigma_{\dim V}|_0=1$ とする。

$\Theta$ が、多重線形形式の場合、特に、対称な $\Theta$ について、古くから有限性の条件が求められているが、現在のところ、次の定理が最良のようである。

定理2.2.（[7], [8], [13], etc.） $V$ を代数閉体 $F$ 上の線形空間とし、$\Theta$ を非退化な $MF(r,V)$ の元とする。$r \geq 3$ かつ、次のいずれかが成立すると仮定する。

(イ) $\Theta$ は対称

(ロ) $\mathrm{char} F = 0$ 又は $p > \dim V$

(ハ) $\mathrm{Aut}\,\Theta$ は $V$ 上既約

この時、$\mathrm{Aut}\,\Theta$ は、有限群である。

注. $\Theta \in SMF(r,V)$ の時は、良く知られているように、$\Theta$ は、$r$-次の $(\dim V)$-変数斉次多項式 $f_\Theta$ と対応しているが $\Theta$ が非退化ということは、$\frac{\partial f_\Theta}{\partial x_i}$ $i=1,2,\cdots,\dim V$ が零でない共通根を持たない事に対応している。また $\Theta \in MF(r,V)$ の元には自然に、

$$\Theta' : V \overset{r-1}{\times \cdots \times} V \rightarrow V^* \quad (ここで\ V^* = \mathrm{Hom}(V,F))$$

が対応しているから、定義2.1.(1)の非退化性の定義も、自然なものと思われる。

問題．非退化な．$MF(r,V)$ の元 $\Theta$ について，定理2.1．(2) の主張は成立するか。

注．上のニつの定理は，非退化なものの自己同型群の有限性を示すものであったが，ニつの不満足な点がある。一つは，非退化か否かの検証が困難であることであり，もう一つは，自己同型群が有限であっても，$\Theta$ が，非退化であるとは限らないことである。(例えば [12] を見よ。) すなわち，非退化性は，有限性を得る条件としては強すぎるという点である。したがって，非退化性より弱い条件でかつ検証しやすい有限性の条件を得ることが望まれる。

定義2.4．$GL(n,\mathbb{C})$ の有限部分群 $G$ が，原始的であるとは，$G$ の自然な表現が既約で，かつ $G$ の真部分群の誘導表現ではないことである。

この節の最後に，原始的な $G$ に関する補題をあげる。

補題2.3．$G$ を，$GL(V)$ の，原始的な有限部分群とし，$\Theta \in MM(r,V)_G$，$r \geqq 2$，$\Theta \neq 0$，$V$ は，複素数体 $\mathbb{C}$ 上の線形空間とする。この時，次が成立する。

(1) $A$ を $N(A) \geq G$ なる 可換な $\mathrm{Aut}\,\Theta$ の部分群とする。すると $A \leq Z(GL(V))$.

(2) $W \leq V$ について $\Theta(V, \cdots, V, W) \subseteq W$ ならば $W = \{0\}$ 又は $V$.

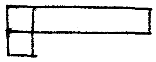
## §3. 問題IIとIIIに関して

定理2.1.(2) は 問題IIIに関する べき単部分群の位数の上限を与えるものであるが 現在のところ いくつかの有限群 $G$ について $MM(r, V)_G$, $MF(r, V)_G$ の元を見つけ そのいくつかの自己同型群が決定されているにすぎない。この節では 以下に その例をあげる。

(イ) ([4]) $G$ = Griess がフレンドリージャイアントと呼んだ散在型単純群モンスターとする。この時 $G$ は 196883 次元の既約表現 $V$ をただ一つもち $\dim SMM(2, V)_G = 1$ かつ $SMM(2, V)_G$ の元が決定されている。

(ロ) ([3]) $G = J_3$ $V$を $G$ の 85 次元の既約表現とすると $\dim SMF(3, V)_G = 1$ であり $SMF(3, V)_G$ の元が決定されている。

(ハ) ([1]) $G = PSL_2(p)$, $p \equiv 3 \pmod 8$, $V$ を $G$ の $\frac{1}{2}(p-1)$ 次元の既約表現とする。すると、$\dim SMF(3, V)_G = 1$ であり、$\Theta \in SMF(3, V)_G$, $\Theta \neq 0$ とすると、$\Theta$ は決定され $\mathrm{Aut}\,\Theta \cong Z_3 \times PSL_2(p)$ である。

(ニ) ([5], [12], [14]) $G = \Sigma_{n+1}$, $V$ を $n$ 次元の既約表現で、ヤング図形  $n$ $1$ に対応するものとする。

$$M = SMM(r, V),\ r = 2, 3 \quad SMF(3, V)$$

とした時、$M_G$ が決定され、各 $\Theta \in M_G$ について $\mathrm{Aut}\,\Theta$ が決定されている。$SMM(3, V)_G$ については後述。

(ホ) ([5], [6]) $G$ を $n+1$ 点集合 $\Omega$ 上の二重可移群とし、$\pi$ をその置換表現の指標とすると、$\pi = 1 + \chi$ で、$\chi$ は既約である。

$$\Omega_2^1 = \{(\{a, b\}, c) : a, b, c \in \Omega \ (\neq)\}$$

を $(n+1)n(n-1)/2$ 点からなる集合とし、$G$ の $\Omega_2^1$ 上の作用に関する軌道の数を $m$ とする。$V$ を $\chi$ の表現空間とする。

$$\dim SMM(2, V)_G = \langle \mathrm{Sym}^2 \chi, \chi \rangle = m$$

であって、特に $G$ が三重可移なら $m = 1$ さらに、

$$0 \neq \Theta \in SMM(2, V)_G = SMM(2, V)_{\Sigma_{n+1}}$$

とすると、$\mathrm{Aut}\,\Theta \cong \Sigma_{n+1}$ である。$m \geq 2$ ならば、

$$^{\exists}\Theta \in SMM(2,V)_G \setminus SMM(2,V)_{\Sigma_{n+1}}$$

よってこのような $\Theta$ の自己同型群を求めることは興味深い。特に、$G = PSL_3(2)$ の7点上の二重可移表現から作られるある $\Theta$ について $\mathrm{Aut}\,\Theta = G \cong PSL_3(2)$ となることが示されている。

(1) ([10]) $G$ を $n$ 点集合 $\Omega$ 上の二重可移群で、

$$\Delta_1(ab), \cdots, \Delta_r(ab), \Delta_1'(ab), \cdots, \Delta_r'(ab), \Gamma_1(ab), \cdots, \Gamma_s(ab)$$

を $\Omega \setminus \{ab\}$ の $G_{ab}$-軌道であり、

$$\Delta_1(ab) \cup \Delta_1'(ab), \cdots, \Delta_r(ab) \cup \Delta_r'(ab), \Gamma_1(ab), \cdots, \Gamma_s(ab)$$

を $G_{\{ab\}}$-軌道とする。すると各 $g \in G$ に対して

$$\Delta_i(a^g b^g) = \Delta_i(ab)^g, \quad \Delta_j'(a^g b^g) = \Delta_j'(ab)^g, \quad \Gamma_k(a^g b^g) = \Gamma_k(ab)^g$$

が成立するように、すべての $\Delta_i(ab)$, $\Delta_j'(ab)$, $\Gamma_k(ab)$ を $a, b \in \Omega$ に対して決めることができ、$\mathbb{C}[\Omega]$ を置換表現空間 $\{X_a \mid a \in \Omega\}$ をその基底とすると

$$\Theta(X_a, X_a) = X_a$$

$$\Theta(X_a, X_b) = \alpha(X_a - X_b) + \sum_{i=1}^{r} \beta_i \Big( \sum_{c \in \Delta_i(ab)} X_c - \sum_{d \in \Delta_i'(ab)} X_d \Big)$$

によって決まる $\Theta$ は、$\Theta \in MM(2, \mathbb{C}[\Omega])_G$ であり、また

$$G \leq \mathrm{Aut}\,\Theta \leq \Sigma_n$$

である。さらにある $i$ について $\beta_i \neq 0$ ならば

$$\mathrm{Aut}\,\Theta \lneq \Sigma_n$$

であり、 $\mathrm{Aut}\,\theta$ は $\Omega$ 上二重可移群で三重可移群ではない。
$\beta_i$ がすべて零ならば、

$$\mathrm{Aut}\,\theta = \Sigma_n$$

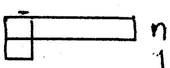
特に $G = PSL_2^{*}(q) = PSL_2(q)\langle\sigma\rangle$、$\sigma$ は $GF(q)=GF(p^r)$ 上の、体自己同型 $x \to x^p$ から引きおこされるもの、$\Omega$ を射影直線上の点とすると $q \equiv 3 \pmod{4}$ のとき $r=1$ であり、$\beta_1 \neq 0$ なる $MM(2, \mathbb{C}[\Omega])_G$ の元がとれる。

(ト) ([2]) $G$ を集合 $\Omega$ 上の階数3の偶数位数の原始的置換群で $G \not\cong D_{10}$ とする。$\mathbb{C}[\Omega] = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2$ を $G$ の既約表現への分解とし、$V_0$ を単位表現に対応するものとする。このとき、$SMM(2, V_1) \neq 0$ 又は $SMM(2, V_2) \neq 0$ であり、特に、$\Omega$ が 3-互換のなす $G$ の位数2の元の共役類とすると、$SMM(2, V_1) \neq 0$, $SMM(2, V_2) \neq 0$ である。この2次の対称多重線形写像によって定義される非結合的可換代数を、ノートン代数と呼ぶ。特に、$G = \Sigma_n$ で $\Omega$ を $G$ の互換全体のなす集合とすると、$V_1$ はヤング図形 ${}^{n-1}_{1}$ に対応する表現空間で、$V_2$ は ${}^{n-2}_{2}$ に対応するものであり、前者からできるノートン代数は、前述のもの [5] と同じである。

(チ) ([9]) $G_1$ を $\Sigma_6, \Sigma_7, O_6^-(3), O_7^-(3), M(24)$ とし、$G$ を、$\mathbb{Z}_3$ の $G_1$ による拡大、$\Omega$ を $G$ の $\{3,6\}$-互換の集合とすると、$\mathbb{C}[\Omega]$ の忠実な既約成分 $V$ で、$SMM(2,V)\neq 0$, $SMF(3,V)\neq 0$ なるものがあり、それぞれの元を、書きあらわせる。これを コンウェイ型と呼ぶ。特に $G_1$ を、$\Sigma_6$ $\Sigma_7$ とすると、12次元のコンウェイ型の代数が作れ [9] でその自己同型群が決定されているが、その証明にはすこし難があるようである。

## §4. 自己同型群の計算例.

この節では、前節(ニ) $SMM(3,V)_{\Sigma_{n+1}}$ の場合の計算例とそこで用いられる $SMM(r+1,V)$ の元と $SMF(r,V)$ の元の対応定理を示す。

(ニ) の様に、$V$ をヤング図形  に対応する $\Sigma_{n+1}$ の $\mathbb{C}$-既約表現空間とし、$\chi=\chi^{(n,1)}$ をその指標とする。すなわち、$V_1=\langle e_0', \cdots, e_n'\rangle$ を $\Sigma_{n+1}$ の自然な置換表現空間とし $V_0=\langle e_0'+\cdots+e_n'\rangle$, $V=V_1/V_0=\langle e_1,\cdots,e_n\rangle$. $e_i$ $i=0,1,2,\cdots,n$ を、$e_i'$ の像とする。次の二つの問題を考える。

(1) $SMM(3,V)_{\Sigma_{n+1}}$ の元の決定.

(2) $SMM(3,V)_{\Sigma_{n+1}}$ の各元 $\Theta$ の自己同型群の決定.

問題(1), (2) に関して、次の定理が成立する。ただし、$n$ は 3以上とする。

定理4.1. ([14]) (1) $\Theta \in SMM(3,V)_{\Sigma_{n+1}}$ は、ある定数 $h, k \in \mathbb{C}$ について次の様に書ける。

$$\Theta(e_i, e_i, e_i) = (n-2)(h+nk)e_i$$

$$\Theta(e_i, e_j, e_j) = (n-2)(he_i - ke_j)$$

$$\Theta(e_i, e_j, e_\ell) = (k-h)(e_i+e_j+e_\ell)$$

ここで、$i, j, \ell \in \{1, 2, \cdots, n\}$ $(\neq)$ である。

(2) $\Theta \in SMM(3,V)$ がある $h, k \in \mathbb{C}$ について上の条件をみたすとすると、

$$\mathrm{Aut}\,\Theta \geq \langle -I \rangle \times H, \quad H \cong \Sigma_{n+1}$$

であり、$H$ は、$\{e_0, e_1, \cdots, e_n\}$, $e_0 = -(e_1 + \cdots + e_n)$ 上に自然に作用している。

定理4.2. ([14]) $\Theta$ を、定理4.1.の3次対称多重線形写像とし、$\{e_1, \cdots, e_n\}$ を $V$ の基底とする。この時次が成立する。

(1) $nk = 2h \neq 0$ の時、$\mathrm{Aut}\,\Theta = \mathrm{Aut}\,B \cong O(n, \mathbb{C})$ ここで $B \in SMF(2,V)$ であり、$B(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{i=1}^n \mu_i e_i) = (n+1)(\sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i) - (\sum_{i=1}^n \lambda_i)(\sum_{i=1}^n \mu_i)$

(2) $nk \neq 2h$ の時、$\mathrm{Aut}\,\Theta = \langle -I \rangle \times H \cong Z_2 \times \Sigma_{n+1}$ ここで $H$ は、定理4.1.(2)のものである。

定理4.1.の証明.　まず(2)を示す。$\mathrm{Aut}\,\Theta \geq \langle -I \rangle, H$ を言えばよい。ここで $H \cong \Sigma_{n+1}$ である.

$$\Theta(u^{-I}, v^{-I}, w^{-I}) = \Theta(-u, -v, -w) = -\Theta(u, v, w) = \Theta(u, v, w)^{-I}$$

したがって、$-I \in \mathrm{Aut}\,\Theta$。また $\Theta$ の定義より、そえ字について対称であるから. $\mathrm{Aut}\,\Theta \geq \Sigma_n$、ここで $\Sigma_n$ は基底 $e_i$ 達の自然な置換を引きおこす。あとは $e_0 = -(e_1 + \cdots + e_n)$ とおいて. 各式に互換 $(0, 1)$ を作用させたものが成立することを計算により確め. (2)が得られる。

次に(1)を示す。未定係数法によっても $\Theta$ を決定できるが、$\langle \mathrm{Sym}^3 X, X \rangle_{\Sigma_{n+1}} = 2$ であることを用いると、

$$\langle \mathrm{Sym}^3 X, X \rangle_{\Sigma_{n+1}} = 2 \iff \mathrm{Hom}_{\Sigma_{n+1}}(\mathrm{Sym}^3 V, V) \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

$$\iff \mathrm{Sym}^3 V = V_1 \oplus V_2 \oplus W \qquad V_1 \cong V_2 \cong V \quad (\Sigma_{n+1}\text{-同型})$$

$$\mathrm{Hom}_{\Sigma_{n+1}}(W, V) = 0.$$

$$\Theta_1 : V \times V \times V \to \mathrm{Sym}^3 V \to V_1 \to V$$

$$\Theta_2 : V \times V \times V \to \mathrm{Sym}^3 V \to V_2 \to V$$

とすると. $\Theta_1, \Theta_2$ の像が. $\mathrm{Hom}_{\Sigma_{n+1}}(\mathrm{Sym}^3 V, V)$ の基底になる。

(2)より(1)の形の $\Theta$ は $\mathrm{SMM}(3, V)_{\Sigma_{n+1}}$ の元であるから. $h = n/(n-2)$　$k = 2/(n-2)$ の時 $\Theta_1$,　$k = -h = 1$ の時 $\Theta_2$ とすると. これらが. $\mathrm{SMM}(3, V)_{\Sigma_{n+1}}$ の基底となり. $\mathrm{SMM}(3, V)_{\Sigma_{n+1}}$ の元は. それらの一次結合としてすべて得ら

れる。これで 定理4.1.が示された。

さて、次にあげる定理4.3.は、SMM(r+1, V) と SMF(r, V) の元の間の対応定理であるが、後にのべるように、定理4.2. の証明に重要な役割を果たす。

定理4.3. $\Theta \in MM(r+1, V)$ とするとき、

$$\delta(\Theta) = \Theta^* : \overbrace{V \times \cdots \times V}^{r} \longrightarrow F$$

を次の様に定義する。すなわち、$u_1, \cdots, u_r \in V$ に対して、$u \longmapsto \Theta(u_1, \cdots, u_r, u)$ によって定義される $MM(1, V)$ の元を、$\Theta_{u_1, \cdots, u_r}$ とした時、

$$\delta(\Theta)(u_1, \cdots, u_r) = \Theta^*(u_1, \cdots, u_r) = Tr(\Theta_{u_1, \cdots, u_r})$$

とする。また、$\Theta^* \in MF(r, V)$ のとき、

$$\eta(\Theta^*) = \Theta : \overbrace{V \times \cdots \times V}^{r+1} \longrightarrow V$$ を

$$\eta(\Theta^*)(u_1, \cdots, u_r, u_{r+1}) = \Theta(u_1, \cdots, u_r, u_{r+1})$$

$$= \frac{1}{r+n}(\Theta^*(u_1, \cdots, u_r)u_{r+1} + \Theta^*(u_{r+1}, u_1, \cdots, u_{r-1})u_r + \cdots + \Theta^*(u_2, \cdots, u_{r+1})u_1)$$

で定義する。このとき、次が成立する。

(1) $\delta(\Theta) \in MF(r, V)$ で、$\Theta \in SMM(r+1, V)$ なら $\delta(\Theta) \in SMF(r, V)$

(2) $\eta(\Theta^*) \in MM(r+1, V)$ で、$\Theta^* \in SMF(r, V)$ なら $\eta(\Theta^*) \in SMM(r+1, V)$

(3) $\delta, \eta$ は共に線形であり、$\Theta^* \in SMF(r, V)$ について

$\delta \circ \eta(\Theta^*) = \Theta^*$

(4) $\Theta \in MM(r+1, V)$ について、 $\mathrm{Aut}\,\Theta \le \mathrm{Aut}\,\delta(\Theta)$

(5) $\Theta^* \in SMF(r, V)$ について、 $\mathrm{Aut}\,\Theta^* = \mathrm{Aut}\,\eta(\Theta^*)$

証明は容易である。

系. $\chi$ を、有限群 $G$ の、複素既約表現の指標とした時

$$\langle \mathrm{Sym}^r \chi, 1 \rangle_G \le \langle \mathrm{Sym}^{r+1} \chi, \chi \rangle$$

証明. 定理4.3.(3)より、$\eta$ の単射性を用いる.

$G$ を有限群とし、$V$ を $G$ の既約表現空間とした時、$SMF(2,V)_G \neq 0$ ならば、$B \in SMF(2,V)_G \setminus \{0\}$ を用いて $MM(r,V)_G$ の元と、$MF(r+1,V)_G$ の元が対応するが、上の定理は $MM(r,V)$ の元と $MF(r-1,V)$ の元の対応である. $SMF(3,V)$ の元で 自己同型群を含めて $SMM(4,V)$ に対応しているものがある事を考えると、最も次数の低い、したがって おそらく、扱いの楽な、代数的構造で、自己同型群として有限群があらわれるものは、$SMF(3,V)$ の元より、むしろ、$SMM(2,V)$ の元であるかもしれない。次に、この対応定理に関し、問題を一つあげる。

問題　$\chi$ を 有限群 $G$ の複素既約指標とする。この時

$$\langle Sym^2\chi, 1\rangle \neq 0 \quad \langle Sym^r\chi, \chi\rangle \neq 0 \quad かつ \quad \langle Sym^{r+1}\chi, 1\rangle = 0$$

なる条件を求めよ。

命題4.4. 定理4.2.の仮定のもとで、次が成立する

(1) $\delta(\Theta) = (n-2)(h+k)B$

(2) $(n+2)\eta(B) = \Theta_1$

ここで $B$ は、定理4.2.(1) のものであり、$\Theta_1$ は、定理4.1.(1) の証明で定義したものである。すなわち $\Theta_1$ は $h = {}^{n}/(n-2)$ $k = {}^{2}/(n-2)$ をみたす $h, k$ によって定義された $\Theta$ である。

証明. 定理4.3. の $\delta, \eta$ の定義を用いて、計算により得られる。

定理4.2.(1) の証明.　$\Theta$ を $nk = 2h \neq 0$ をみたす $h, k$ によって定義されたものとすると、

$$\Theta = ((n-2)(h+k)/(n+2))\Theta_1$$

である。ここで、$(n-2)(h+k) \neq 0$ だから $\mathrm{Aut}\,\Theta = \mathrm{Aut}\,\Theta_1$.
よって $\mathrm{Aut}\,\Theta_1$ を求めればよい。一方命題4.4.により
$\eta((n+2)B) = \Theta_1$ だから、定理4.3.(5) より $\mathrm{Aut}((n+2)B) = \mathrm{Aut}\,\Theta_1$
ところが $\mathrm{Aut}((n+2)B) = \mathrm{Aut}\,B \cong O(n, \mathbb{C})$ であることに

より、定理4.2.(1)が得られる。

定理4.2.(2)の証明. $\Theta_1$ を上記のものとし、$\Theta_2$ を、$h=-k=-1$ に対応するものとする。$h, k$ に対応する $\Theta$ をとると、$\Theta = s\Theta_1 + t\Theta_2$ と書ける。ここで $s=(n-2)(h+k)/(n+2)$, $t=(nk-2h)/(n+2)$ である。

補題4.5. $\mathrm{Aut}\,\Theta_2 \cong Z_2 \times \Sigma_{n+1}$ が示されれば、$nk \neq 2h$ なるすべての $\Theta$ について、$\mathrm{Aut}\,\Theta \cong Z_2 \times \Sigma_{n+1}$、すなわち、定理4.2.(2)の帰結が成立する.

証明. $\mathrm{Aut}\,\Theta_2 \cong Z_2 \times \Sigma_{n+1}$ が示されたとする。定理4.2.(1)より、$\mathrm{Aut}\,\Theta_2 \leq \mathrm{Aut}\,B$. $\Theta$ を $nk \neq 2h$ なるものとすると、$h+k \neq 0$ ならば命題4.4.(1)より、$\mathrm{Aut}\,\Theta \leq \mathrm{Aut}\,B$. したがって $nk \neq 2h$ ならば、いつでも $\mathrm{Aut}\,\Theta \leq \mathrm{Aut}\,B$ が成立する。$\sigma \in \mathrm{Aut}\,\Theta$ とし、$\Theta^\sigma(u,v,w) = \Theta(u^\sigma, v^\sigma, w^\sigma)^{\sigma^{-1}}$ とすると

$$s\Theta_1 + t\Theta_2 = \Theta = \Theta^\sigma = s\Theta_1^\sigma + t\Theta_2^\sigma = s\Theta_1 + t\Theta_2^\sigma$$

今、$t \neq 0$ だから $\sigma \in \mathrm{Aut}\,\Theta_2 \cong Z_2 \times \Sigma_{n+1}$. したがって、$\mathrm{Aut}\,\Theta \leq \mathrm{Aut}\,\Theta_2$. 定理4.1(2)より $\mathrm{Aut}\,\Theta_2 \leq \mathrm{Aut}\,\Theta$ だから $\mathrm{Aut}\,\Theta = \mathrm{Aut}\,\Theta_2 \cong Z_2 \times \Sigma_{n+1}$ がえられる.

したがって、定理4.2.(2)を証明するには、$\mathrm{Aut}\,\Theta_2 \cong Z_2 \times \Sigma_{n+1}$ を示せばよい。この証明も簡単ではないが、殆どが計算であるため、ここでは省略する。

以上、計算例として定理4.1,4.2の証明の、大要を述べたが、一般的に、自己同型群の決定は容易ではない。現在のところは、たくさんの計算例の中で、少しずつ一般的手法を開発してゆく段階のようである。

## 参考文献


[1] A. Adler : On the automorphism groups of certain hypersurfaces, J. of Alg. 72 (1981), 146-165

[2] P.J. Cameron, J.M. Goethals & J.J. Seidel : The Krein condition, spherical design, Norton algebras and permutation groups, indag. math 40 (1978), 196-206

[3] D. Frohardt : A trilinear form for the third Janko group, preprint

[4] R.L. Griess Jr. : The friendly giant, Inv. math 69 (1982), 1-102

[5] K. Harada : On a commutative nonassociative algebra associated with a multiply transitive group, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, to appear

[6] K. Harada, Y. Egawa : Personal communication

[7] H. Matsumura, P. Monsky : On the automorphisms of hypersurfaces, J. Math. Kyoto Univ. 3-3 (1964), 347-361

[8] C-H. Sah : Alternating and symmetric multilinear forms and Poincare algebras, Comm. Alg. 2. (1974), 91-116

[9] S. D. Smith : Nonasseciative commutative algebras for triple covers of 3-transposition groups, Michigan Math J. 24 (1977)

[10] M. Wajima : Personal communication

[11] Y. Egawa, H. Suzuki : Automorphism groups of multilinear mappings, preprint.

[12] ———, ——— : Automorphism groups of $\Sigma_{n+1}$-invariant cubic forms, in preparation.

[13] H. Suzuki : Automorphism groups of multilinear maps, preprint

[14] ——— : Automorphism groups of $\Sigma_{n+1}$-invariant trilinear mappings, preprint.