数理解析研究所講究録
第475巻 1982年 75-78

Frobenius 予想と散在型単純群

筑波大数学系　八牧宏美 (Hiroyoshi Yamaki)

有限群 G とその位数を割る自然数 n に対して

$$L_n(G) = \{ x \in G \mid x^n = 1 \}$$

とおく。 Frobenius は "Über einen Fundamentalsatz der Gruppentheorie" と題する論文で $|L_n(G)| \equiv 0 \pmod{n}$ となることを示した。 この結果は Hall によっていろいろな方向に拡張されている。

<u>Frobenius 予想</u> (以下 F-予想と略記する。)

<u>$|L_n(G)| = n$ ならば $L_n(G)$ は部分群となる。</u>

n が素数巾あるいは G が可解群のとき F-予想は正しい。 Frobenius による Frobenius 核の存在定理は F-予想の特別な場合の解決でもある。 その他, Feit, Ferguson, Herzog などによっていろいろな条件のもとで F-予想が正しいことが示されている。 一方 Zemlin は Hall の結果を用いて F-予想が有限単純群の分類に帰着

されることを示している。 よく知られているように有限単純群は次の3系列に分類される。

(1) 交代群 A_n ($n \geq 5$)

(2) Lie 型単純群

(3) 散在型単純群。

Rust は交代群 A_n ($n \geq 5$) および一部の Lie 型単純群に対して $\mathcal{F}$-予想 が正しいことを示した。

さて 散在型単純群 G に対して $\mathcal{F}$-予想 が正しいか否かを考える。

$$f(G, t) = \#\{x \in G \mid \mathrm{order}\, x = t\}$$
$$\mathrm{Ord}(G) = \{\mathrm{order}\, x \mid x \in G\}$$

とおく。 $\mathrm{Ord}(G)$ の部分集合 Ω で次の条件 (α), (β) をみたすものをさがす。

(α) $t \in \Omega$ に対して t の約数で $\mathrm{Ord}(G)$ の元は Ω に属する。

(β) (α) をみたす Ω に対して $\sum_{t \in \Omega} f(G, t)$ は $|G|$ の約数となる。

PASCAL を用いれば F_1 (Fischer-Griess monster) および F_2 (Fischer baby monster) を除く散在型単純群 G に対して (α), (β) をみたす Ω は次のいずれかに限られることがわかる。

(i) $\Omega = \{1\}$

(ii) $\Omega = \mathcal{O}rd(G)$

(iii) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 11\}$, $G = M_{12}$

(iv) $\Omega = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 19\}$, $G = J_1$

(v) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 26, 29\}$,
$G = Rud$,

(vi) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 13, 14, 16, 26, 29\}$.
$G = Rud$.

これらの Ω および G に対して

$$\sum_{t \in \Omega} f(G, t) = \begin{cases} 1, \\ |G|/2, & \text{あるいは} \\ |G|, \end{cases}$$

が成立する。 これは F_1 および F_2 を除くすべての散在型単純群に対して $\mathcal{F}$−予想が正しいことを示している。

位数が 16 桁 以上の散在型単純群 G について計算時間は次の通りです。

G	$\|G\|$ の桁	$\|\mathcal{O}rd(G)\|$	計算時間(秒)
F_1	54	73	26038.73 以上
F_2	34	?	?
$M(24)'$	25	35	7014.96
J_4	20	31	770.88

.1	19	32	680.37
M(23)	19	32	1012.73
F_3	17	25	36.57
LyS	17	28	239.37

F_1 に対しては計算時間と予算の制限がなければこの方法で処理することが可能である。しかし F_2 についてはいくつかの t に対して $f(F_2, t)$ が未知なのでこの方法を適用できない。

Fenchel はすべての Hall 約数 n に対して $\mathcal{F}$-予想が正しければ一般の n に対しても $\mathcal{F}$-予想が正しいことを示している。この結果を使えばいくつかの t に対して $f(G, t)$ が既知ならば $\mathcal{F}$-予想が正しいか否かを手計算で確認できることがある。実際 F_1, F_2 に対しても $\mathcal{F}$-予想が正しいことが容易にわかる。

まとめて次の結果が得られる。

<u>定理</u>　<u>すべての散在型単純群に対して Frobenius 予想は正しい。</u>

参考文献については小論 [1] を参照して下さい。

Reference

[1] H. Yamaki, A conjecture of Frobenius and the sporadic simple groups, To appear in Comm. Algebra.