数理解析研究所講究録
第 475 巻 1982 年 123-139

有限Chevalley群のGreen多項式

東京理科大 理工 庄司俊明
(Toshiaki Shoji)

1° Gを有限体$\mathbb{F}_q$ ($q = p^f$) 上定義された、連結, reductiveな代数群, Fを$\mathbb{F}_q$に対するGのFrobenius準同型とする。GのF-stableなBorel部分群, F-stableなmaximal torusの対$B_0 \supset T_0$を1つ固定する。GのLie環$\mathfrak{g}$のnilpotent element Aに対し、G/B_0の閉部分多様体, $\mathcal{B}_A = \{ B \in G/B_0 \mid \mathrm{Lie}\, B \ni A \}$を考える。Springer [12], Lusztig [6] により, Weyl群Wのl-adic cohomology群$H^i(\mathcal{B}_A) = H^i(\mathcal{B}_A, \mathbb{Q}_l)$の上への表現 (Springer表現), $r_i : W \longrightarrow GL(H^i(\mathcal{B}_A))$が構成される。此処では, $r_0 = 1_W$ (即ち, A: regularの時, 単位表現) となる様にnormalizeしておく。$A \in \mathfrak{g}^F$に取ると、Fは、$H^i(\mathcal{B}_A)$の上の作用F^*をinduceする。$w \in W = N_G(T_0)/T_0$に対し, T_wをT_0からwによってtwistされたF-stableなmaximal torusとする。その時, GのGreen関数

$Q_{T_w,G}$ を,

$$(1.1) \qquad Q_{T_w,G}(A) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i \mathrm{Tr}(F^* r_i(w^{-1}), H^i(\mathcal{B}_A))$$

によって定義する。$\mathcal{N}$ を $\mathfrak{g}$ の nilpotent variety とすると、$Q_{T_w,G}$ は $\mathcal{N}^F$ 上の類関数である。Green 関数は、$GL_n(\mathbb{F}_q)$ の場合に、Green によって導入されたが、後に、Deligne - Lusztig [3] により、$\mathrm{Tr}(u, R_T(\theta))$,($u \in G^F$, unipotent) として G^F の unipotent class 上の関数として、一般の reductive 群に対して定義された。$R_T(\theta)$ の character value の決定は、G と、G よりも rankの小さい reductive 群達の Green 関数の決定に帰着する。一方,$p \gg 0$, $q \gg 0$ の時,G の unipotent variety と $\mathfrak{g}$ の nilpotent variety の同型により, $Q_{T,G}(A)$ と $Q_{T,G}(u)$ が同一視出来る事が, Kazhdan [5], Springer [12] により示されている。この報告では、Green 関数 (1.1) を計算する一般的な algorism の存在する事を示す。実際, 例外群に対しては, F_4 ([9]), E_6, E_7, E_8 ([11]) の各場合に、最近, computer を使って具体的に計算された。(G_2 は既に [12] で得られている。)

2° $C(A) = Z_G(A)/Z_G^0(A)$ は $H^i(\mathcal{B}_A)$ 上に W と可換な作用を induce する。$\phi \in \widehat{C(A)}$ (irred. character) に対し、

$H^i(\mathcal{B}_A)_\phi$ を $H^i(\mathcal{B}_A)$ の ϕ-isotypic subspace とする。
$d_A = \dim \mathcal{B}_A$ として, top cohomology $H^{2d_A}(\mathcal{B}_A)$ を考える。
$H^{2d_A}(\mathcal{B}_A)_\phi \neq 0$ の時, これを $C(A)\times W$-module として,
$H^{2d_A}(\mathcal{B}_A)_\phi = E_\phi \otimes V_{A,\phi}$ と分解する (E_ϕ は $\phi \in \widehat{C(A)}$ に対応する既約 $C(A)$-module, $V_{A,\phi}$ は W-module)。
W-module $V_{A,\phi}$ の character を $\chi_{A,\phi}$ と表わす。又,

$$\widehat{C(A)}_0 = \{\phi \in \widehat{C(A)} \mid H^{2d_A}(\mathcal{B}_A)_\phi \neq 0\}$$ と置く。

定理 2.1. (Springer [12]) 対応 $(A,\phi) \longmapsto \chi_{A,\phi}$ は, 次の bijection を induce する。

$$\{(A,\phi) \mid A \in \mathcal{N},\ \phi \in \widehat{C(A)}_0\}/G\text{-共役} \xrightarrow{\ \sim\ } \widehat{W}$$

この対応を Springer 対応という。Green 関数の決定には, Springer 対応を具体的に決める事が重要になるが, これは各場合に決定されている。(A_n, Hotta-Springer [4]; 古典群, F_4, 筆者 [7],[8]; E_6, E_7, E_8, Alvis-Lusztig [1], Spaltenstein [10]; G_2, Springer [12])。

3° 以下, 簡単の為, G を split type, p = good とする。
(non split type の場合は, §5 参照. p に対する条件は 落と

せない。）初めに，Green 関数は，G の isogeny によらない事に注意しておく。

定義 3.1. $A\in\mathcal{N}^F$ に対し，A が distinguished とは，

(i) $\mathcal{B}_A$ の全ての既約成分は F-stable

(ii) F は $C(A)$ に trivial に作用する

となるものを言う。

命題 3.2. p: good，G: simple の時，E_8 の唯1つの共役類（D_5+A_1）を除いて，各 $A\in\mathcal{N}^F$ の G-orbit $O(A)$ の中に distinguished な代表元が存在する。E_8 の共役類 D_5+A_1 に対しては，$q\equiv 1\ (4)$ の時，distinguished な元が存在するが，$q\equiv -1\ (4)$ ならば存在しない。

実際，古典群，F_4（[9]）の場合は筆者，E_6, E_7, E_8 に対しては，Spaltenstein（[11]）により確められた。特に，E_8 に於ける例外の存在は，Spaltenstein により初めて見出された。

4° 以下，任意の $A\in\mathcal{N}^F$ に対し，$O(A)$ 中に distinguished な代表元が存在するものとする。（実際，E_8 の例外の場合も，計算においては，殆んど害にならない）。$A\in\mathcal{N}^F$ を

distinguished とする。 $O(A)^F$ の G^F-orbit 達は、$C(A)$ の共役類によって parametrize される（F は $C(A)$ に trivial に作用）ので、対応する各代表元を A_c （$c \in C(A)$, $A = A_1$）と表わす事にする。その時、fixed A に対し、

$(c, w) \longmapsto Q_{T_w}(A_c)$ は $C(A) \times W$ の類関数とみなす事が出来る。そこで、

$$Q_{T_w}(A_c) = \sum_{\phi \in \widehat{C(A)}} \phi(c)\, Q_{A,\phi}(w)$$

と分解する。此処に、

$$Q_{A,\phi}(w) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \operatorname{Tr}(F^* r_i(w^{-1}),\ H^i(\mathcal{B}_A)_\phi)$$

である。又、$x \in N^F$ を固定した時、$Q_{T_w}(x)$ を W の類関数とみて、$Q_{T_w}(x) = Q_x(w)$ と表わす。この時、

定理 4.1. (Borho-Macpherson [2]) $x \in N^F$ に対し、

$$\langle Q_x, \chi_{A,\phi} \rangle_W = \begin{cases} \phi(c)\, q^{d_A} & \text{if } x \underset{G^F}{\sim} A_c \\ 0 & \text{if } x \notin \overline{O(A)} \end{cases}$$

但し、$\overline{O(A)}$ は $O(A)$ の $\mathfrak{g}$ での閉包、$\langle\ ,\ \rangle_W$ は W の類関数としての内積である。

注意 4.2. 実際, Borho-Macpherson Th の corollary として ([2; 6, Cor 1]),

$$H^i(\mathcal{B}_x) = \bigoplus_{(A,\phi)} \left(V_{A,\phi} \otimes \mathcal{H}_x^{i-2d_A}(\overline{O(A)}, {}^{\pi}\mathcal{L}_\phi) \right)$$

が成りたつ。但し, $\mathcal{L}_\phi$ は $\phi \in C(\widehat{A})$ により定まる $O(A)$ 上の locally constant sheaf, ${}^{\pi}\mathcal{L}_\phi$ は $\overline{O(A)}$ 上への D.G.M. extension を表わす。 特に, これより; $\langle H^i(\mathcal{B}_x), \chi_{A,\phi} \rangle_W \neq 0 \Rightarrow$ $x \in \overline{O(A)}$, 且つ $i \geq 2d_A$ が容易に分り, A: distinguished (即ち, F は $H^{2d_A}(\mathcal{B}_A)$ 上に q^{d_A} による scalar 倍で作用) を使うと 定理 4.1 が出る。

定理 4.3. $Q_{A,\phi} = 0 \quad \forall \phi \notin C(\widehat{A})_0$

定理 4.3' 任意の i に対し $H^i(\mathcal{B}_A)_\phi = 0 \quad \forall \phi \notin C(\widehat{A})_0$

実際, 定理 4.3' ⇒ 定理 4.3 は明らかであるが, 結果としてこれらは同値になる (注意 7.2)。 定理の証明は, 古典群の場合, $p: \mathcal{B}_A \longrightarrow \mathcal{P}_A$ (但し $\mathcal{P} = G/P$, P は ($P \supset B$) Levi 部分群が同じ type となる様な G の maximal parabolic subgroup, $\mathcal{P}_A$ は $\mathcal{B}_A$ と同様に定義された G/P の閉部分多様体) に対して, "良い" locally trivial な filtration が

存在する事を利用し，$C(\hat{A})_0$ の分類と，G の rank に関する帰納法によって得られる。又，GL_n，$(E_6)_{ad}$，$(E_7)_{ad}$ に対しては，任意の $A \in \mathcal{N}$ に対し，$C(\hat{A}) = C(\hat{A})_0$ となるので，この場合は，明らかである。一方，G_2，F_4，E_8 に対しては，それぞれ唯一つの共役類を除いて $C(\hat{A}) = C(\hat{A})_0$ となる。例外の場合，$|C(\hat{A})_0| = |C(\hat{A})| - 1$ となり，これらは，G_2，F_4，E_8 においてそれぞれ $C(A) \simeq S_3, S_4, S_5$ となる唯1つの class であり，対称群 $C(A)$ の sign character が $C(\hat{A})_0$ に含まれない。これら，G_2，F_4，E_8 に対しては，後に述べる様に（§6），Green 関数の計算の途中で，定理4.3 が確められる。

注意 4.4. $h = \sum_{A \in \mathcal{N}/\sim} C(\hat{A}) - |\hat{W}|$ とおくと，Springer 対応により，$h \geq 0$ であり，上に述べた事から，例外群に対しては，$h \leq 1$ となる。しかし，古典群に対しては，一般に h は十分大きくなり得る。例えば $G = PSp_{2n}$ とすると

n	≤ 5	6	7	8
h	0	1	2	5

となり，$n \to \infty$ の時，$h \to \infty$ となる事が示される。

5° 以下．これらの性質によってGreen関数が決定される事をみる。先ず．次の事実が知られている。([12]).

(5.1) $$Q_{T_w,G}(0) = Q_0(w) = \varepsilon(w)\, q^{-d_0}|G^F|/|T_w^F|$$

但し．ε : W の sign character
$d_0 = \dim G/B$

(5.2) 直交関係

$$\sum_{x\in\mathcal{N}^F}\langle Q_x, \chi\rangle_W Q_x = q^{d_0}\varepsilon\chi\otimes Q_0 \quad \text{for } {}^\forall\chi\in\hat{W}$$

実際，[12] によりGreen関数の直交関係は，

(5.3) $$|G^F|^{-1}\sum_{x\in\mathcal{N}^F} Q_{T_w,G}(x)\, Q_{T_{w'},G}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } w \not\sim w' \\ |W(T_w)^F|/|T_w^F| & \text{if } w=w' \end{cases}$$

と表わされるが，そこで (5.3) の左辺に $\chi(w)$ をかけ，$w\in W$ に対して和を取れば．(5.2) が得られる。さて．$\dim O(A)$ に関して．帰納的にGreen関数が決まる事をみよう。先ず $A=0$ の時．Q_A は (5.1) により与えられる。そこで $\dim O(x) < \dim O(A)$ となる $x\in\mathcal{N}^F$ に対しては．Q_x が既に決まっているものとする。$\chi=\chi_{A,\phi}$ を (5.2) に代入し，定理4.1を使うと，

$$\sum_{X \in \overline{O(A)}^F} \langle Q_X, \chi_{A,\phi} \rangle_W Q_X = q^{d_0} \varepsilon \chi_{A,\phi} \otimes Q_0 ,$$

従って．仮定より，任意の $\phi \in C(\hat{A})_0$ に対して，

$$(5.4) \qquad \sum_{c \in C(A)/\sim} |G^F \cdot A_c| \phi(c) q^{d_A} Q_{A_c} = \text{known value}$$

となる。但し，$G^F \cdot A_c$ は A_c の G^F-orbit を表わすものとする。(5.4) は $C(A)$ の Character に関する直交関係を使って $Q_{A,\phi}$ ($\phi \in C(\hat{A})_0$) に関する $|C(\hat{A})_0|$ 個の連立方程式に変換出来，その係数行列は正則になる事が分る。従ってこれを解いて各 $Q_{A,\phi}$ ($\phi \in C(\hat{A})_0$) が定まる。一方，定理 4.3 により $\phi \notin C(\hat{A})_0$ に対しては $Q_{A,\phi} = 0$ であったから，これから全ての $Q_{A,\phi}$，従って．Q_{A_c} が計算出来る．以上の議論から，Green 関数の決定は．結局 Springer 対応の決定に帰着し，5° の結果により全ての場合に．Green 関数が決定出来る事になる。

6° G_2, F_4, E_8 の場合，定理 4.3 は次の様に示される．$A \in \mathcal{N}^F$ を $|C(\hat{A})_0| = |C(\hat{A})| - 1$ となるものとする。この時．$C(A) \simeq S_3$, S_4, 又は S_5 であり，$|G^F \cdot A_c| = n(c) |G^F| \cdot q^{-a}$，と表わせる。但し，$a = \dim Z_G(A)$, $n(c)$: c の $C(A)$ での共役類

の数である。又 $C(\hat{A})_0$ に含まれないのは $C(A)$ の sign character ε であるので, $Q_{A_c} = Q'_c + \varepsilon(c)Q_\varepsilon$ とおく。即ち, $Q'_c = \sum_{\phi \in C(\hat{A})_0} \phi(c) Q_{A,\phi}$, $Q_\varepsilon = Q_{A,\varepsilon}$ である。この時,
任意の $\chi \in \hat{W}$ に対し,

$$(6.1) \quad \sum_{X \in O(A)^F} \langle Q_X, \chi \rangle_W^2 = \sum_{c \in C(A)/\sim} |G^F A_c| \langle Q'_c, \chi \rangle_W^2 + |O(A)^F| \langle Q_\varepsilon, \chi \rangle_W^2$$

となる。5°の議論から, $\phi \in C(\hat{A})_0$ に対する $Q_{A,\phi}$ は全て分っているとしてよい。従って各 $c \in C(A)$ に対し, Q'_c も全て決まっている。今, $\overline{O(A')} \not\subset \overline{O(A)}$ となる A' を取り, $\overline{O(A')} \supsetneq \overline{O(X)}$ となる全ての $X \in N^F \setminus O(A)^F$ に対して, Q_X が決まっているとする。その時, $Q_{A'_{c'}}$ が次の様に決定される。(5.2) より

$$(6.2) \quad \sum_{X \in N^F} \langle Q_X, \chi \rangle_W^2 = q^{d_0} \langle \varepsilon \chi \otimes Q_0, \chi \rangle_W$$

が成立するので, $\chi = \chi_{A',\phi'}$ を代入して定理4.1と仮定を使う事により, (6.2) から (6.1) の左辺が計算出来る。これから, 任意の $\phi' \in C(\hat{A'}) = C(\hat{A'})_0$ に対して, $\langle Q_\varepsilon, \chi_{A',\phi'} \rangle_W = 0$ となる事が, 計算を実行する事により確められる。すると最早, Q_ε は, $Q_{A'}$ の計算に影響を及ぼさないので, 5°の方法により $Q_{A'_{c'}}$ が計算出来る。以下, 同様の計算

を続ければ，結局 全ての $x \in N^F \setminus O(A)^F$ に対し，Q_x が計算出来，又：$\overline{O(A')} \not\subset \overline{O(A)}$ となる任意の A' に対し，$\langle Q_\varepsilon, \chi_{A',\varphi'} \rangle_W = 0$ が得られる。一方，$\overline{O(A')} \subset \overline{O(A)}$ となる A' に対しては，定理4.1 により，$\langle Q_\varepsilon, \chi_{A',\varphi'} \rangle_W = 0$，従って，$Q_\varepsilon = 0$，$Q_{A_C} = Q'_C$ を得る。

7° 5°の計算から，系として次が出る。

系7.1. p: good，A: distinguished とすると，

$H^{odd}(\mathfrak{B}_A) = 0$，

F^*の$H^{2i}(\mathfrak{B}_A)$への固有値は q^i.

更に，pに独立な多項式 $\sum_{i \geq 0} a_i(w, A) T^i \in \mathbb{Z}[T]$ が存在して，$Q_{T_w, G}(A) = \sum_{i \geq 0} a_i(w, A) q^i$ と表わせる。ここに $w \longmapsto a_i(w, A)$ は，W の character である。

実際，5° の計算（p: goodの時，$C(A)$，$|Z_G(A)^F|$，etc は，係数がpに独立なqの多項式となる）と，$Q_{T_w, G}(A) \in \mathbb{Z}$ とから，$Q_{T_w, G}(A)$ は $\mathbb{Q}$-係数（pに独立）のqの多項式として表わされる。ここで Springer の結果，（F^*の$H^i(\mathfrak{B}_A)$への固有値は，絶対値 $q^{i/2}$）を使うと，$H^{odd}(\mathfrak{B}_A) = 0$，$H^{2i}(\mathfrak{B}_A)$ へのF^*の固有値 $= q^i$ を得る。従って系が出る。

注意 7.2. $H^{odd}(\mathcal{B}_A)=0$ なので，$Q_{A,\phi}$ は $C(A)$-module として，$H^i(\mathcal{B}_A)_\phi$ 達の直和になる。従って，定理4.3 ⇒ 定理4.3′.

系 7.3. V を $\mathcal{N}^F$ の $\bar{\mathbb{Q}}$-valued class function 全体のなすベクトル空間，V_0 を $Q_{T_w,G}$ によって張られる V の部分空間とする。$\mathcal{N}/G$ の distinguished な代表系 α を1組固定し，$I=\{(A,\phi)\mid A\in\alpha\,;\ \phi\in C(\hat{A})_0\}$ と置く。$(A,\phi)\in I$ に対し $F_{A,\phi}\in V$ を

$$F_{A,\phi}(x)=\begin{cases}\phi(c) & \text{if } x\underset{G^F}{\sim}A_c\\ 0 & \text{if } x\notin O(A)^F\end{cases}$$

で定義する。その時，$\{F_{A,\phi}\mid(A,\phi)\in I\}$ は V_0 の基底になる。

筆者の原証明は定理4.1と定理4.3を使ったものだったが Spaltenstein が次の様に定理4.3だけから出る事を指摘した。

$J=\{(A,\phi)\mid A\in\alpha,\ \phi\notin C(\hat{A})_0\}$ とおく。$(A,\psi)\in J$ に対し，$G_{A,\psi}\in V$ を

$$G_{A,\psi}(x)=\begin{cases}\psi(c)|Z_G(A_c)^F|\cdot|Z_{C(A)}(c)|^{-1} & \text{if } x\sim A_c\\ 0 & \text{if } x\notin O(A)^F\end{cases}$$

で定義する。V 上の内積を $\langle f,g\rangle_V=\frac{1}{|G^F|}\sum_{x\in\mathcal{N}^F}f(x)g(x)$ で定めると，Springer 対応と，定理4.3により $\{G_{A,\psi}\mid(A,\psi)\in J\}$ は V_0 の直交補空間 $V_0^\perp$ の基底を与える

事が分る。一方，$\phi \in \widehat{C(A)}_0$，$\psi \notin \widehat{C(A)}_0$ に対し，

$\langle F_{A,\phi}, G_{A,\psi} \rangle_V = \langle \phi, \psi \rangle_{C(A)} = 0$ から，$F_{A,\phi}$ は $V_0^{\perp}$ と

直交する事が言える。従って．系7.3が出る。

注意7.4. G^F の unipotent element u に対し，$C(u)$，$\widehat{C(u)}_0$，

I，etc を N^F の場合と同様に定め，$(u,\phi) \in I$ に対し

G^F の class function $F_{u,\phi}$ を

$$F_{u,\phi}(x) = \begin{cases} \phi(c) & \text{if } x \underset{G^F}{\sim} u_c \\ 0 & \text{if } x \notin O(u)^F \end{cases}$$

で定義する。すると系7.3から，$F_{u,\phi}$ は uniform function

になる，即ち，$R_T(\theta)$ の一次結合で表わせる事が分る。これは．

$\phi = 1$ の場合に．Lusztig，ϕ：一般の場合，川中さんにより

予想されていた。

8° G：non split type に対しても．ほぼ同様の議論が

成りたつ。G を ${}^2D_n$ 型とする。F は W にグラフ autom. σ

として作用し，W の σ による拡大 $\widetilde{W} = \langle\sigma\rangle \cdot W$ は．B_n-型

Weyl 群 $W(B_n)$ と同型になる。$\widehat{W}$ の元 $\chi_{A,\phi}$ は n の

partition の pair $(\alpha;\beta)$ (unordered pair) により $\chi_{A,\phi} = \chi_{(\alpha;\beta)}$

と表わされる。$\alpha \neq \beta$ の時 $\chi_{\alpha,\beta} \in \widehat{W}^F$ (F-stable character)

で．$\widetilde{W}$ への拡大は2個存在し，それらは $W(B_n)$ の character

として，ordered pair $(\alpha;\beta)$ により，$\tilde{\chi}_{(\alpha;\beta)}$，$\tilde{\chi}_{(\beta;\alpha)}$ と表わされる。この時．次の補題が成立する。

補題 8.1. 各 $A \in \mathcal{N}^F$ に対し．$O(A)^F$ に次を満たす様な適当な代表元（これを distinguished と呼ぶ）が存在する。即ち．A : distinguished, $\chi_{A,\phi} \in \hat{W}^F$ に対し，

$$\mathrm{Tr}\,(F^* r_{2d_A}(w^{-1}),\ H^{2d_A}(\mathcal{C}_A)_\phi) = \tilde{\chi}_{A,\phi}(w\sigma)\, q^{d_A},$$

但し，$\tilde{\chi}_{A,\phi}$ は $\chi_{A,\phi}$ の拡大で，$\chi_{A,\phi} = \chi_{(\alpha;\beta)}$ とする時，$\tilde{\chi}_{A,\phi} = \tilde{\chi}_{(\alpha;\beta)}$ は辞引式順序に対して $\alpha > \beta$ と取れる。

補題 8.1 により Π の代りに $\tilde{W}$ を考える事により，定理 4.1, 定理 4.3 （の類似）が成立し，§5 と同様な方法で Green 関数が決定できる。即ち，

系 8.2. G : ${}^2D_n$ 型の時，distinguished な A に対し，p に独立な多項式 $\sum_{i\geq 0} a_i(w\sigma, A)T^i \in \mathbb{Z}[T]$ が存在して，$Q_{T_w,G}(A) = \sum_{i\geq 0} a_i(w\sigma, A)q^i$ と表わせる。但し，$\tilde{w} \longmapsto a_i(\tilde{w}, A)$ は $\tilde{W}$ の character である。

G^F：Unitary 群の場合には、既に Hotta-Springer [4] により、Green 函数は Enola の公式によって、$GL_n(\mathbb{F}_q)$ の Green 函数を使って $q \leftrightarrow -q$ の変換で記述できる事が分っていたが、${}^2E_6$ の場合にも、適当な G^F-orbit の代表元を取る事により、Enola の公式の成立する事を Spaltenstein が示した。他の古典群に対しては次の形で Enola の公式が成立する。

定理 8.3. (i) G を type B_n, C_n, D_{2n}, ${}^2D_{2n}$ のいずれかとする。各 distinguished な代表元 $A \in \mathcal{N}^F$ に対し、$c_0 \in C(A)$ が（adjoint 群の中で唯1つ）存在して、

$$Q_{T_w,G}(A_c)(-q) = Q_{T_{ww_0},G}(A_{cc_0})(q) .$$

(ii). D_{2n+1} 型の場合、$G^+ = D_{2n+1}$, $G^- = {}^2D_{2n+1}$ とし、$\{A^+\}$, $\{A^-\}$ を、それぞれ、G^+, G^- に対応する distinguished な代表系（補題 8.1）とする。この時、各 A に対し、$c_0 \in C(A)$ が（adjoint 群の中で唯1つ）存在して、

$$Q_{T_w,G^+}(A_c^+)(-q) = Q_{T_{ww_0},G^-}(A_{cc_0})(q) .$$

但し、$Q_{T_w,G}(A)(T) \in \mathbb{Z}[T]$, w_0 は W の長さ最大の元を表わす。

注意 8.4. $^3D_4$ に関しては、Spaltenstein により、より直接的な方法（Lie 環を使わずに）で、G^F 上の Green 関数が計算されている。

References

1. Alvis, D. and Lusztig, G.: On Springer's correspondence for simple groups of type E_n (n = 6,7,8). To appear in Math. Proc. Camb. Phil. Soc.
2. Borho, W. and Macpherson, R.: Représentations des groupes de Weyl et homologie d'intersection pour les variétés nilpotentes. C.R.Acad. Sci. 292 (1981) n° 15, 707-710.
3. Deligne, P. and Lusztig, G.: Representations of reductive groups over finite fields. Ann. Math. 103 (1976) 103-161.
4. Hotta, R. and Springer, T.A.: A specialization theorem for certain Weyl group representations and an application to the Green polynomials of Unitary groups. Inventiones Math. 41 (1977) 113-127.
5. Kazhdan, D.: Proof of Springer's Hypothesis. Israel J. Math. 28 (1977) 272-286.
6. Lusztig, G.: Green polynomials and singularities of unipotent classes. Advances in Math. 42 (1981) 169-178.
7. Shoji, T.: On the Springer representations of the Weyl groups of classical algebraic groups. Comm. Algebra 7 (1979) 1713-1745, 2027-2033.

8. Shoji, T.: On the Springer representations of Chevalley groups of type F_4. Comm. Algebra 8 (1980) 409-440.

9. Shoji, T.: On the Green polynomials of Chevalley groups of type F_4. Comm. Algebra 10 (1982) 505-543.

10. Spaltenstein, N.: Appendix to the paper of Alvis-Lusztig. To appear in Math. Proc. Camb. Phil. Soc.

11. Spaltenstein, N.: Determination of Green functions. Oberwolfach Tagungsbericht 25/1982. Darstellungstheorie und ℓ-adische Kohomologie.

12. Springer, T.A.: Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups. Inventiones Math. 36 (1976) 173-207.