数理解析研究所講究録
第 475 巻 1982 年 156-161

Partial geometric space について

愛媛大 理　木村 浩 (Hiroshi Kimura)
愛媛大 教育　大森博之 (Hiroyuki Ohmori)

$S = (\{A_i\}_{i=-1}^{m}, T)$ が 以下の条件をみたす時, S を m 次元の Partial geometric space といいます。

(i) $A_i \cap A_j = \phi$ $(i \neq j,\ -1 \leq i, j \leq m)$

(ii) $T \subset \prod_{i=-1}^{m} A_i$

(iii) $|A_{-1}| = |A_m| = 1$

(iv) A_i $(-1 \leq i \leq m)$ の任意の元 x_i に対し $x_i = t_i$ となる $(t_{-1}, \cdots, t_i, \cdots, t_m)(\in T)$ が存在する。

(v) $T \ni (y_{-1}, \cdots\cdots, y_m), (z_{-1}, \cdots, z_m)$ で, ある k $(-1 \leq k \leq m)$ に対し $y_k = z_k$ のとき $(y_{-1}, \cdots, y_k, z_{k+1}, \cdots, z_m) \in T$。

(vi) $A_{i-1} \ni x_{i-1}$ と $A_{i+1} \ni x_{i+1}$ が incident の時, x_{i-1}, x_{i+1} に incident な $k(i)$ 個の A_i の元が存在する。ただし $2 \leq k(i) < \infty$,

(vii) $A_i \ni x_i$, $A_j \ni x_j$ の時. x_i と x_j は l intersection $x_l (\in A_l)$ 及び s join $x_s (\in A_s)$ をもつ。

(viii) $m \geqq 2$ とする。$A_i \ni x_i$, $A_{i+1} \ni x_{i+1}$ が $i-1$ intersection x_{i-1} 及び s join x_s ($0 \leqq i \leqq m-2$, $i+2 \leqq s \leqq m$) をもつとき，x_{i-1}, x_{i+1} 両方に incident で x_i と $(i+k)$ join をもつような A_i の元の個数は x_i, x_{i+1} のとり方に無関係に一定でそれを $t(i,s,k)$ で記す。ここに $1 \leqq k \leqq s-i-1$ でかつ $0 \leqq i \leqq m-2$, $i+2 \leqq s \leqq m$ なる i, s に対し $\sum_{k=1}^{s-i-1} t(i,s,k) \geqq 1$.

(注) $A_i \ni x_i$ と $A_j \ni x_j$ が incident とは $t_i = x_i$, $t_j = x_j$ となる $(t_{-1}, \cdots, t_i, \cdots, t_j, \cdots, t_m) \in T$ が存在するとき ($i<j$)，また x_l (x_s) が x_i と x_j の l intersection (s join) とは x_l (x_s) は x_i, x_j 両方に incident で $-1 \leqq l \leqq \min[i,j]$ ($\max[i,j] \leqq s \leqq m$) かつ x_n ($x_{n'}$) が x_i, x_j 両方に incident のとき x_n ($x_{n'}$) は x_l (x_s) に incident のときをいう。ただし $-1 \leqq n \leqq l$ ($s \leqq n' \leqq m$)。
また，$k(i)$ ($0 \leqq i \leqq m-1$) を configuration parameters, $t(i,s,k)$ ($0 \leqq i \leqq m-2$, $i+2 \leqq s \leqq m$ $1 \leqq k \leqq s-i-1$) を geometric parameters という。

この partial geometric space は partial geometry (r, k, t): $\mathfrak{P}$ [1°] の概念の一般化として Miskimins [3°] が導入しました。実際、$A_{-1}=\{\phi\}$, A_0 として $\mathfrak{P}$ の点全体, A_1 として $\mathfrak{P}$ の直線全体, $A_2=\mathfrak{P}$ としまた T を $\mathfrak{P}$ の点及び直線の incidence 関係から導かれる自然なものとする。このとき $S=(\{A_i\}_{i=-1}^{2}, T)$ は $k(0)=k$, $k(1)=r$, $t(0,2,1)=t$ なるパラメーターをもつ 2 次元の partial geometric space である事がわかります。

Partial geometric space の簡単な例として

Example 1. A を要る $m+1$ 点集合 ($m\geq 2$) とし,

$A_{-1}=\{\phi\}$, $A_j=\{B \mid B\subset A, |B|=j+1\}$ $(0\leq j\leq m)$,

$T=\{(t_{-1},\cdots,t_m)\in \prod_{i=-1}^{m} A_i \mid t_i\subset t_{i+1},\ 0\leq i\leq m-1\}$

とし, $S_1=(\{A_i\}_{i=-1}^{m}, T)$ とおくと S_1 は m 次元の Partial geometric space となり, その configuration parameters は $k(i)=2$ $(0\leq i\leq m-1)$, geometric parameters は $t(l, l+2, 1)=2$ $(0\leq l\leq m-2)$ で他の geometric parameters は未定義となる。

Example 2. $PG(m,q)$ を projective geometry とする。

$A_{-1}=\{\phi\}$, $A_j=\{B \mid B$ は $PG(m,q)$ の j 次元部分空間$\}$

$T = \{(t_1, \cdots, t_m) \in \prod_{i=1}^{m} A_i \mid t_i < t_{i+1},\ 0 \leq i \leq m-1\}$

とし, $S_2 = (\{A_i\}_{i=1}^{m}, T)$ とおくと S_2 は m 次元の partial geometric space となり, その configuration parameters は $k(i) = g+1$ $(0 \leq i \leq m-1)$, geometric parameters は $t(l, l+2, 1) = g+1$ $(0 \leq l \leq m-2)$ で他の geometric parameters は未定義となる。

ここで Example 1 と 2 には共通な性質(*)がある事がわかります。

$$(*) \begin{cases} \text{(i)} & k(i) \text{ は } 0 \leq i \leq m-1 \text{ なる } i \text{ に対し一定。} \\ \text{(ii)} & t(i, s, k) = k(i)\text{。ただし } 0 \leq i \leq m-2, \\ & s = i+2,\ k = 1 \text{ で残りの場合は未定義} \end{cases}$$

今回の報告は partial geometric space $S = (\{A_i\}_{i=1}^{n}, T)$ が性質(*)をもつときの S の特徴付けをするのが目的です。即ち

定理　$k(i) = 2$ (Case A) のとき S は S_1 (Example 1) と同値になる。 $k(i) = d+1 > 2$ かつ $m \geq 3$ (Case B) のとき. S は S_2 (Example 2) と同値になる。

定理の証明の概略

1° $A_i \ni x_i, y_i$ が $i-1$ intersection をもつとき，これらは $i+1$ join を有つ。(ただし $0 \leqq i \leqq m-1$.) これは S が性質(*)をもつ事から導かれる。

2° $A_j \ni x_j$, $A_k \ni x_k$ に対し両者は incident とする。今 x_j, x_k 両方に incident な A_i の元の個数を $\phi(i, x_j, x_k)$ で記すと

$$\phi(i, x_j, x_k) = \begin{cases} {}_{k-j}C_{i-j} & (\text{case A}) \\ \prod_{l=1}^{i-j} \dfrac{d^{k-j-l-1}-1}{d^l-1} & (\text{case B}) \end{cases}$$

ただし，$-1 \leqq j < i < k \leqq m$。

このことは $\phi(i, x_j, x_k)$ が x_j, x_k のとり方に無関係である事を示している。よってこれを $\phi(i, j, k)$ で記す。又 $\phi(i, j, k)$ が $-1 \leqq i, j, k \leqq m$ なるすべての値に対して定義出来る事がわかります。

3° $A_i \ni x_i$ $(0 < i \leqq m)$ に対し，x_i と incident な A_0 の元全体を $b(x_i)$ で記す。このとき x_i から $b(x_i)$ への対応は全単射となります。

case A の場合は上の 1°〜3° から容易に証明出来る。従って以下は case B の場合を考えます。

4° A_0 の元を点，A_{m-1} の元をブロックと考えて自然に出来るブロック・デザイン $D = (A_0, A_{m-1})$ は

対称な $2-(v,k,\lambda)$ デザインとなります。ここに、
$v=(d^{m+1}-1)/(d-1)$, $k=(d^{m}-1)/(d-1)$, $\lambda=(d^{m-1}-1)/d-1$

5° x_0, y_0 を D の2点とし、x_0, y_0 を含む D のブロックのすべての intersection の全体を $\langle x_0, y_0\rangle$ とする。
一方 x_0, y_0 を S の A_0 の元とみなした時に、それらの join を x_1 とすると $\langle x_0, y_0\rangle = b(x_1)$ なる事がわかります。この事から Dembowski-Wagner [2°] の結果を用いると、D は PG(m,d) の点及び超平面から構成されたデザインである事がわかります。

6° 最後に $A_i \ni x_i$ $(1\leqq i\leqq m)$ に対し $b(x_i)$ は次元 i の PG(m,d) の部分空間である事が帰納的に証明出来ます。

参考文献

1° R.C. Bose. Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs. Pacific J. Math., 13 (1963)

2° P. Dembowski - A. Wagner. Some characterization of finite projective spaces, Arch. Math., 11 (1960)

3° R.D. Miskimins. Partial geometries of dimension m. Ph.D. Dissertation, Colorado State Univ., Summer, 1978