

再循環領域をもたない粘性流れ場の接合数値解法

名工大 山辺 春雄

(Yamabe Haruo)

1. まえがき

物体のまわりの粘性流体の流れには通常、再循環領域が伴われる。しかしながら特別な場合には再循環領域をもたないもの、あるいは狭い再循環領域をもつものもある。例えば一板流中に置かれた有限平板のまわりの流れ、無限に広がった静止流体中で回転する軸対称物体のまわりの流れ、球および円柱からの自然対流が取り上げられる。著者はこれらの流れの問題に数値的に取り組むために接合 ADI 法の手続きを提案した。この小論の目的として、 $\gamma >$ 高いレイノルズ数の回転球問題にこれを適用したところを述べ、あわせて関連問題について觸れてみる。

無限に広がった静止（非圧縮、粘性）流体中で球が一つの直径のまわりに定角速度で回転しているとき、流体の粘性によって定常層流が球のまわりに誘起される。その流れは極に

向かって吸い込まれ、球の表面に沿って進み、赤道から離脱して旋回噴流を形成する。レイノルズ数が小さいとき、この流れの問題はストークス近似によって解くことができる⁽¹⁾。レイノルズ数がこれよりやや大きいときはガレルキン法による解も得られている⁽²⁾。他方レイノルズ数が高い場合は先に Howarth が取り上げて以来、研究者達の興味をひくところとなったが、彼等の解析は壁面に沿って発達する境界層が剥離後に発達する旋回噴流に限られ赤道近くでの流れの挙動の解析に乏しい⁽³⁾⁻⁽⁶⁾。

ナビエ・ストークス方程式の数値解法に於て、解法を困難にしているもの、一つは物体近くの強い *shear layer* - 境界層の存在であろう。ところでこの部分は境界層方程式でよく記述される。Davis はこのことに着目して、一柱流中に置かれた放物柱を過ぎる二次元流れの計算に境界層型方程式と補正的な線形常微分方程式との反復解法により、省畧のなしたナビエ・ストークス方程式を解くことを試みた⁽⁷⁾。流れの向きや境界層の性格が場所により大きく変らない場合は、この Davis の技法がそのまま適用できるが、前述の回転球の場合のように流れの向きも境界条件も途中から急に変化する場合はその技法はそのままでは適用し難い。これに対応するため流れの場を分割し、各分領域に於て Davis の手続きを用い

て流れを計算し、しかる後、分割線に沿って解の接合をはかるのが著者の接合ADI法の手続きである。

2. 解法手続きの基礎

領域 $(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < \infty)$ に於て非定常二次元流れの方程式

$$u_t + a u_x + b u_y = \lambda (u_{xx} + u_{yy}) \quad (1)$$

の初期値境界値問題を考える。ここに入は正の定数、 x, y 方向の速度成分 a, b は x, y の既知関数であり、 $a > 0$ 、 $|b| < a$ とする。Davisの与えたADI法の手続きは

$$(\Delta t/2)(u^j - u^{j-1/2}) + a u_x^j + b u_y^j = \lambda (u_{xx}^{j-1/2} + u_{yy}^j) \quad (2a)$$

$$(\Delta t/2)(u^{j+1/2} - u^j) + a u_x^j + b u_y^j = \lambda (u_{xx}^{j+1/2} + u_{yy}^j) \quad (2b)$$

である。解を時刻 $t^{j-1/2}$ から $t^j (= t^{j-1/2} + \Delta t/2)$ に進めるには(2a)を用い、 u_{xx} が既知であるところから、境界層方程式の解法と同様に上流から下流に向かつて解を生成してゆけばよい。また解を t^j から $t^{j+1/2} (= t^j + \Delta t/2)$ へ進めるには(2b)を取り、 u^j が既知であるから、この常微分方程式の境界値問題を解けばよい。この手続きはパラメーター λ が小さいとき特に有効であると思われる。ところで回転球の問題では前述のようにDavisの方法をそのまま適用することは無理である。いま流れが物体にたいたい沿って流れる領域 D_1 とそれに垂直になる領域 D_2 とに流れの場が分けられるものとする

。 D_1 では式(2)がそのまま用いられ、 D_2 では拡散項 u_{xx} と u_{yy} とを入れ替えた次の式が用いられる

$$(\Delta t/2)(u^j - u^{j-1/2}) + a u_x^j + b u_y^j = \lambda(u_{xx}^j + u_{yy}^{j-1/2}) \quad (3a)$$

$$(\Delta t/2)(u^{j+1/2} - u^j) + a u_x^j + b u_y^j = \lambda(u_{xx}^j + u_{yy}^{j+1/2}) \quad (3b)$$

これら二つの領域での解はその接合境界 C 上で関数値とその法線方向導関数値が等しいという接合条件によつて滑らかに接合されねばならぬ。

$$u_1 = u_2 \quad (4)$$

$$(u_x)_1 = (u_x)_2 \quad (5)$$

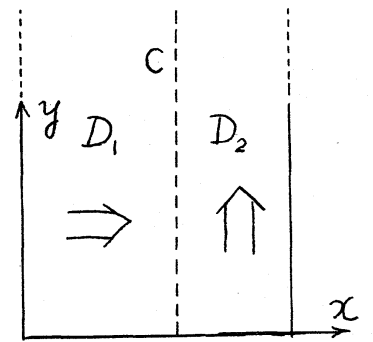


Fig 1

ここに $u_1, (u_x)_1$ は D_1 側の u, u_x の値、 D_2 側のそれらには添字 2 が付せられる。これらの条件をみたす方程式(1)の定常解は次の手順で求められる。すなわち、 D_1 で式(2a)を解いて u^j を求め、接合条件(4)を使用して D_2 で(3a)を解き、そこで u^j を見出す。 D_2 で(3b)を解き $u^{j+1/2}$ を得、接合条件(5)を用いて D_1 で解 $u^{j+1/2}$ を得ることが出来る。たゞしこのように用いられる t は物理的な時間を意味するとは限らず、したがつて u^j は物理的に意味ある過渡解を表わすとは限らない。しかしながら j を充分大きくして $u^j, u^{j+1/2}, u^{j+1}$ の間に実質的な差がなくなれば、それは(1)の定常解を表わすと考えられよう。

3. 回転球問題の定式化

球の中心に原点，回転軸を極軸とする極座標 (r, θ, φ) を取れば，流れの対称性から子午面の $1/4$ 領域のみに着目すればよい。対応する速度成分を u_r, v_θ, v_φ とし流れ関数 ψ ，角運動量関数 Ω を導入する

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \psi_\theta / (r^2 \sin \theta), & v_\theta &= -\psi_r / (r \sin \theta) \\ v_\varphi &= \Omega / (r \sin \theta) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ナビエ・ストークス方程式に於て，流れの軸対称性を考慮し圧力項を消去すれば次の支配方程式が導かれる

$$\Omega_t - (1/r^2 \sin \theta)(\psi_r \Omega_\theta - \psi_\theta \Omega_r) = (1/Re) D^2 \Omega, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \varphi_t + (2\Omega/r^3 \sin^2 \theta)(\Omega_r r \cos \theta - \Omega_\theta \sin \theta) \\ - (1/r^2 \sin \theta)(\psi_r \varphi_\theta - \psi_\theta \varphi_r) + (2/r^3 \sin^2 \theta) \varphi(\psi_r r \cos \theta - \psi_\theta \sin \theta) = (1/Re) D^2 \varphi, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\varphi = D^2 \psi \quad (9)$$

$$D^2 \equiv \partial^2 / \partial r^2 + (1/r^2) \partial^2 / \partial \theta^2 - (1/r^2) \cot \theta \partial / \partial \theta \quad (10)$$

ただし φ は (9) で定義される量であり，(6)-(10) に於てすべての物理量は回転球の半径，角速度，流体密度によって無次元化されているものとする。 Re はレイノルズ数である。流れの軸対称性から Ω, ψ, φ は θ の偶関数であり，軸に沿って $\psi = 0$ と仮定すれば ψ は $\sin^2 \theta$ の因数を φ ， Ω もまた同じ因数をもつ。 Re が適当に大きいときは Ω, ψ, φ はそれぞれ 1,

$1/\sqrt{Re}$, \sqrt{Re} 程度の量と考えられる。これらを勘案して従属変数の変換を行なう。

$$G = \Omega / \sin^2 \theta \quad (11)$$

$$F = (1/\sqrt{Re} \sin^2 \theta) \psi \quad (12)$$

$$H = (\sqrt{Re}/r \sin^2 \theta) \psi \quad (13)$$

Hの式に含まれる $1/r$ は ψ の無限遠での挙動を考慮したものである。式(11)-(13)を式(7)-(9)に代入すれば次の関係が導かれる。

$$G_t = (1/\sqrt{Re}) \{ (H + rH_r)(G_0 \sin \theta + 2G \cos \theta) - rG_r(H_0 \sin \theta + 2H \cos \theta) \} \\ + (1/Re) \{ G_{rr} + (1/r^2)(G_{\theta\theta} + 3G_\theta \cot \theta - 2G) \}, \quad (14)$$

$$F_t = (2/\sqrt{Re} r^3) G (rG_r \cos \theta + G_0 \sin \theta + 2G \cos \theta) \\ + (2/\sqrt{Re} r^2) F (H_0 \sin \theta + 2H \cos \theta) + (1/\sqrt{Re} r^2) \{ (H + rH_r) F_0 \sin \theta \\ - rF_r (H_0 \sin \theta + 2H \cos \theta) \} \\ + (1/Re) \{ F_{rr} + (1/r^2)(F_{\theta\theta} + 3F_\theta \cot \theta - 2F) \}, \quad (15)$$

$$H_t = -(1/r) F + (1/Re) \{ H_{rr} + (2/r) H_r + (1/r^2)(H_{\theta\theta} + 3H_\theta \cot \theta - 2H) \} \quad (16)$$

式(16)の左辺には(14), (15)と均衡上, 仮想的な非定常項が附加されている。境界条件は流れの対称性と壁面でのすべりなしの条件から

$$\theta = 0 : G_\theta = F_\theta = H_\theta = 0, \quad (17)$$

$$\theta = \pi/2 : G_\theta = F_\theta = H_\theta = 0, \quad (18)$$

$$r = 1 : G = 1, H = H_r = 0 \quad (19)$$

無限遠での条件は本来、流速の消失を意味する $H/r = H_r = G/r = 0$ でなければならぬが、ここではストークス近似⁽¹⁾や旋回噴流の境界層近似⁽⁶⁾の結果を参考にして

$$r \rightarrow \infty : G = F = 0, H \rightarrow \text{有限} \quad (20)$$

でおきかえた。

4. 接合ADI法の適用

式(14)-(16)はまとめて次の形に書かれる

$$S_t = A\{S\} + B\{S\} \quad (21)$$

ここに S は G, F, H の列ベクトル表示であり、微分表式 $A\{S\}$, $B\{S\}$ は (14)-(16) の右辺を適当に配分したものである。時間間隔 $2\Delta t$ で t を离散化すれば、 $t = j\Delta t$ ($j = 0, 1/2, 1, \dots$) に対し、(2), (3) に対応する次式を得る

$$(S^{j+1} - S^{j+1/2})/\Delta t = A\{S^{j+1}\} + B\{S^j\} \quad (22a)$$

$$(S^{j+1/2} - S^j)/\Delta t = A\{S^j\} + B\{S^{j+1/2}\} \quad (22b)$$

最初 $A\{S^0\}$ から出発して方程式系(22)を解くごとに肩の添字を1つづつ上げてゆき定常解を得るまで解法を進めてゆく。ここでは既知量の微分操作をいとい(22)に多少の操作を加わえた。(22a)と(22b)の差を取りこれを $j=0$ から $j=J$ まで加算すれば

$$(S^{J+1} + 2Z^{J+1/2})/\Delta t = A\{S^{J+1}\} \quad (23a)$$

同様にして

$$(S^{J+1/2} - 2Z^J) / \Delta t = B \{ S^{J+1/2} \} \quad (23b)$$

$$\text{ここに } Z^{J+1/2} = (1/2)S^0 + \sum_{i=1}^J S^i - \sum_{i=0}^J S^{i+1/2}, \quad (24a)$$

$$Z^J = (1/2)S^0 + \sum_{i=1}^J S^i - \sum_{i=0}^{J-1} S^{i+1/2} \quad (24b)$$

で与えられる。

ところで卓越する流れは図に示されるように回転球に沿う境界層領域(*)と赤道面に沿う噴流領域とに $\theta = \theta_c$ で分けられる。A{S}, B{S}の配

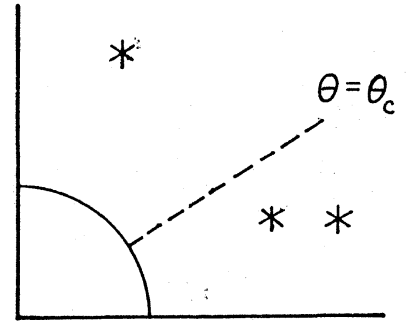


Fig 2

分を記すれば, $A_1\{S\}, A_2\{S\}, \dots, B_3\{S\}$ をそれらの成分として,

$$\left. \begin{aligned} A_1\{S\} &= (1/\sqrt{Re}r^2) \{ (H+rH_r)(G_\theta \sin \theta + 2G \cos \theta) \\ &\quad - rG_r(H_\theta \sin \theta + 2H \cos \theta) \} + (1/Re)G_{rr}, \\ A_2\{S\} &= (2/\sqrt{Re}r^3)G \{ -rG_r \cos \theta + G_\theta \sin \theta + 2G \cos \theta \} \\ &\quad + (2/\sqrt{Re}r^2)F \{ H_\theta \sin \theta + 2H \cos \theta \} + (1/\sqrt{Re}r^2) \{ (H+rH_r)F_\theta \sin \theta \\ &\quad - rF_r(H_\theta \sin \theta + 2H \cos \theta) \} + (1/Re)F_{rr}, \end{aligned} \right\} (25)$$

$$A_3\{S\} = (1/Re) \{ H_{rr} + (2/r)H_r - (Re/r)F \}$$

$$B_1\{S\} = (1/Re r^2)(G_{\theta\theta} + 3G_\theta \cot \theta - 2G)$$

$$B_2\{S\} = (1/Re r^2)(F_{\theta\theta} + 3F_\theta \cot \theta - 2F)$$

$$B_3\{S\} = (1/Re r^2)(H_{\theta\theta} + 3H_\theta \cot \theta - 2H)$$

} (26)

が境界層領域に於て与えられる。噴流領域では*を付けて識別して

$$A_1^*\{S\} = (1/\sqrt{Re}r^2) \{ (H+rH_r)(G_\theta \sin \theta + \dots$$

$$\begin{aligned}
 A_2^*\{S\} = & (2/\sqrt{Re}r^3)G \left(-rG_r \cos\theta + G_\theta \sin\theta + \dots \right. \\
 & \left. \dots + 2H \cos\theta \right) + (1/Re r^2)(G_{\theta\theta} + 3G_\theta \cot\theta), \\
 & \dots - rF_r (H_\theta \sin\theta + 2H \cos\theta) \} \\
 & + (1/Re r^2)(F_{\theta\theta} + 3F_\theta \cot\theta), \\
 A_3^*\{S\} = & (1/Re r^2)(H_{\theta\theta} + 3H_\theta \cot\theta - 2H) - \delta F
 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
 B_1^*\{S\} = & (1/Re)\{G_{rr} - (2/r^2)G\} \\
 B_2^*\{S\} = & (1/Re)\{F_{rr} - (2/r^2)F\} - (2/\sqrt{Re}r^2)G G_r \cos\theta \\
 B_3^*\{S\} = & (1/Re)\{H_{rr} + (2/r)H_r\} - (1-\delta)F
 \end{aligned} \quad (28)$$

ここに $A_3^*\{S\}$ と $B_3^*\{S\}$ に含まれる δ は噴流領域での $J+1/2$ の計算に於て F と H を連立させて解くために必要な項 F を配分するためのものであり、その合理的な形は図のようである。

5. 差分解法

最終的な数値計算は物理面を単位長の正方形領域 ($0 \leq \omega, \rho \leq 1$) に写像し

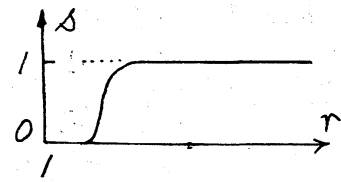


Fig 3

て、その上で行なわれる。写像 $\theta \rightarrow \omega$ は、 k を 1 程度の定数として、

$$\theta = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1}{2}(k+3\omega+1) - \sqrt{\frac{1}{4}(k+3\omega-1)^2 + k(1+\omega)} \right\} \quad (29)$$

$\omega = \omega_c$ は $\theta = \theta_c$ に対応する。写像 $r \rightarrow \rho$ はレイノルズ数が百程度では (30a) に、千程度では (30b) によつた、そこで k は 1 程度の定数である。

$$r = 1/(1-\rho) \quad (30a)$$

$$r = 1 + h(1/\epsilon - \rho^*) \log(1 + \rho) \quad (30b)$$

分配の関数 δ についてもこれに対応し

$$\delta = \rho, \quad (31a)$$

$$\delta = \rho^2 / (1 - 3\sqrt{\rho} + 3\rho^2) \quad (31b)$$

が用いられた。特に $Re = 10^8$ では $h = 3$, $h = 1/4$ と取られた

等間隔に格子で区切り格子長

$$\left. \begin{aligned} \omega_m &= (m-1)\Delta\omega \quad (m=1 \sim M) \\ p_n &= (n-1)\Delta p \quad (n=1 \sim N) \end{aligned} \right\} (32)$$

を定める。計算手順は整数ステップでは、

先づ境界層領域に於て極軸上 ($\theta = 0$) の S を見出し、次に θ の増す向きに発展系 (23

a) を $\theta = \theta_c$ まで解き、更に噴流領域で発展系

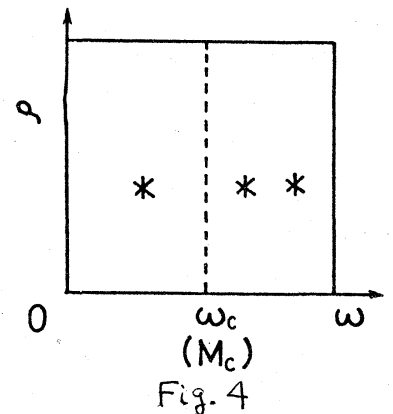
$$(S^{J+1} + 2Z^{J+1/2})/\Delta t = A^* \{S^{J+1}\} \quad (33a)$$

を $r = 1$ および $1 < r < \infty$ で解く。半整数ステップでは常微分系

$$(S^{J+1/2} - 2Z^J)/\Delta t = B^* \{S^{J+1/2}\} \quad (33b)$$

を噴流域で解き、次いで境界層域で常微分系 (23b) を解く。

ここで代表的に境界層領域での (23a) の数値解法の概要を述べてみよう。式 (25) の $A_1 \{S\}$, $A_2 \{S\}$ に由来する方程式は放物形方程式となり、 $A_3 \{S\}$ に由来するそれは線形常微分方程式



となる。前者はクランク・ニコルソンのスキームに準じて点 $(\omega_{m+1/2}, p_n)$ で方程式を評価して离散化近似を行ない、残りの一つは点 (ω_{m+1}, p_n) で中心差分を取って离散化すると、これらから、常套的な表記法を用い、 J を固定して、次の形のバクトル三項差分方程式が導かれる。

$$A^{mn} S_{m+1, n+1} + B^{mn} S_{m+1, n} + C^{mn} S_{m+1, n-1} = D^{mn} \quad (34)$$

A^{mn} などは离散化に由来する係数行列である。ここでは S_{mn} ($n=1 \sim N$) は既知として $S_{m+1, n}$ ($n=1 \sim N$) が求めらるべき値となる。混乱のおそれがない限り、 $S_{m+1, n}$ の第一の添字を落して書けば、 S に課せらる境界条件は

$$G_{i-1} = H_i = -3H_i + 4H_2 - H_3 = 0, \quad (35)$$

$$G_N = F_N = H_N - H_{N-1} = 0 \quad (36)$$

よく知られたトーマスの手続きに従い、漸化式

$$S_{n+1} = \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} S_n \quad (37)$$

を仮定すれば、直ちに

$$\left. \begin{aligned} \alpha^n &= (A^{mn} \beta^{n+1} + B^{mn})^{-1} (D^{mn} - A^{mn} \alpha^{n+1}), \\ \beta^n &= -(A^{mn} \beta^{n+1} + B^{mn})^{-1} C^{mn} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

(36) から

$$\alpha^N = 0, \quad \beta_{ij}^N = 0 \quad (i, j \neq 3), \quad \beta_{33}^N = 1 \quad (39)$$

(35) から、(38) と (39) を通して見出された α^n , β^n を用い

て

$$F_1 = - \frac{\alpha_3^2 + \beta_{31}^3 \alpha_1^2 + \beta_{32}^3 \alpha_2^2 + (\beta_{33}^3 - \kappa) \alpha_3^2}{\beta_{31}^3 \beta_{12}^2 + \beta_{32}^3 \beta_{22}^2 + (\beta_{33}^3 - \kappa) \beta_{32}^2} \quad (80)$$

が与えられ、これより (37) から S_n ($n=1 \sim N$) が生成される。

$M = N = 101$, $\omega_c = 0.5$, $\Delta t = 0.2\sqrt{r}$ あるいは $\Delta t = r^2$ などの仕立を用いて得られた結果が図に示される。

6. あとがき

本解法は singular なある種楕円型方程式の解法を放物型方程式と常微分方程式の反復解法にゆだねようとするものである。流れ場の中で楕円型の性格が著しい所、例えば球の自然対流の上方込み角、では本解法の収束がやゝ困難になる傾向が見られた。また静止流体中で回転する有限平板問題のように支配方程式が特異角を、縁の所で、含む場合は离散化誤差を少なくするために方程式を保存形式で書いた方が望ましいと考えられる。

この小論は最近の著者の論文⁽⁸⁾を補足し、あわせて高レイノルズ数の計算結果を追加したものである。

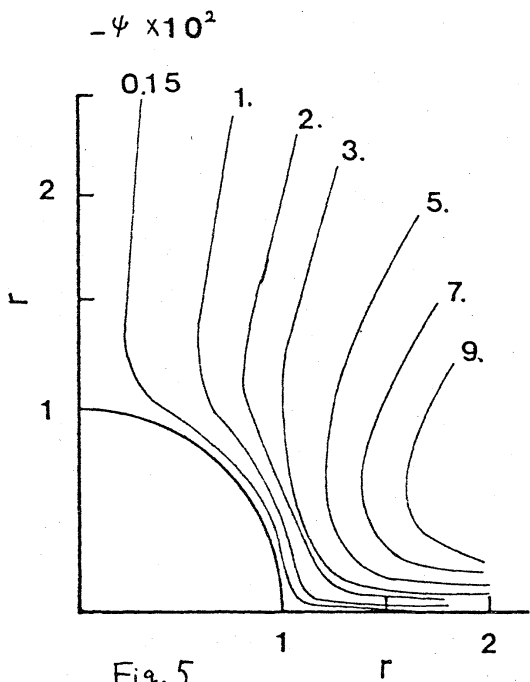


Fig. 5

$Re=100$

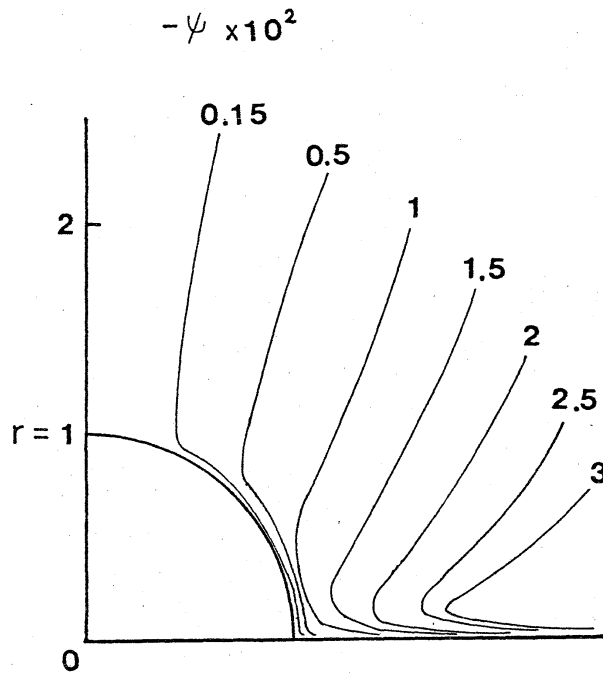


Fig. 7

$Re=2000$

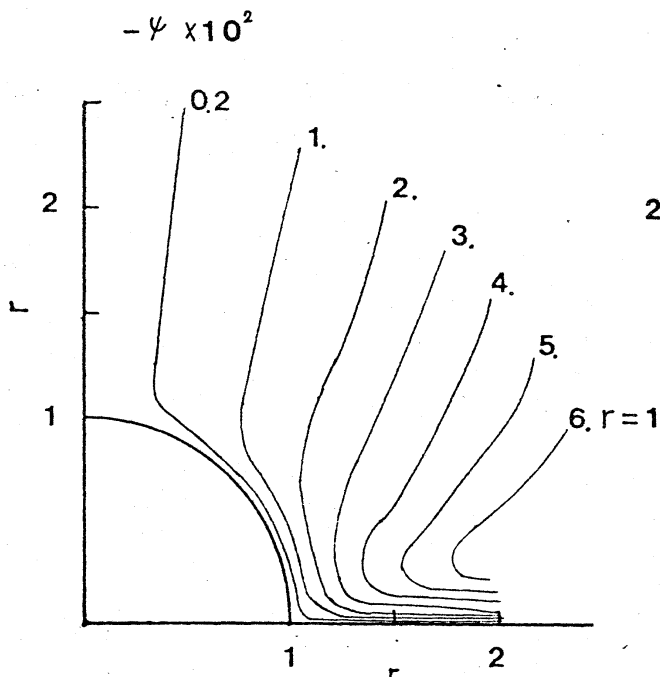


Fig. 6

$Re=400$

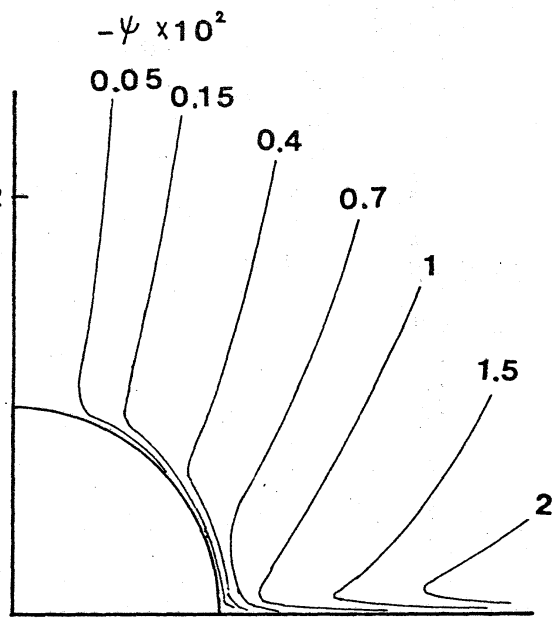


Fig. 8

$Re=5000$

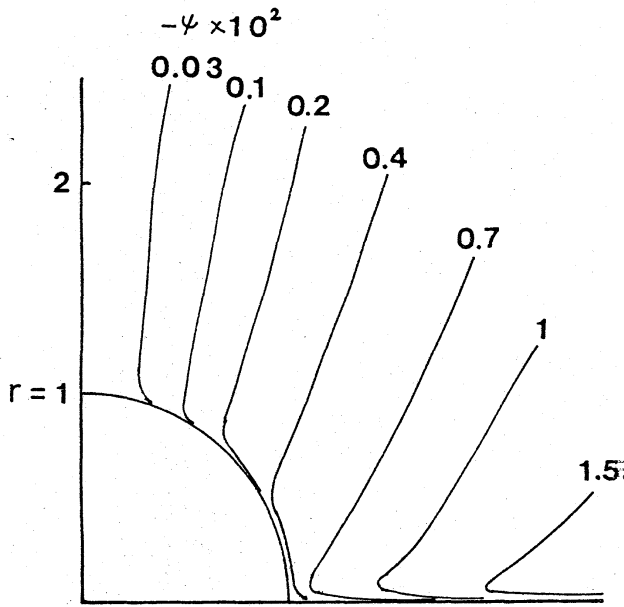


Fig. 9

Re=10000

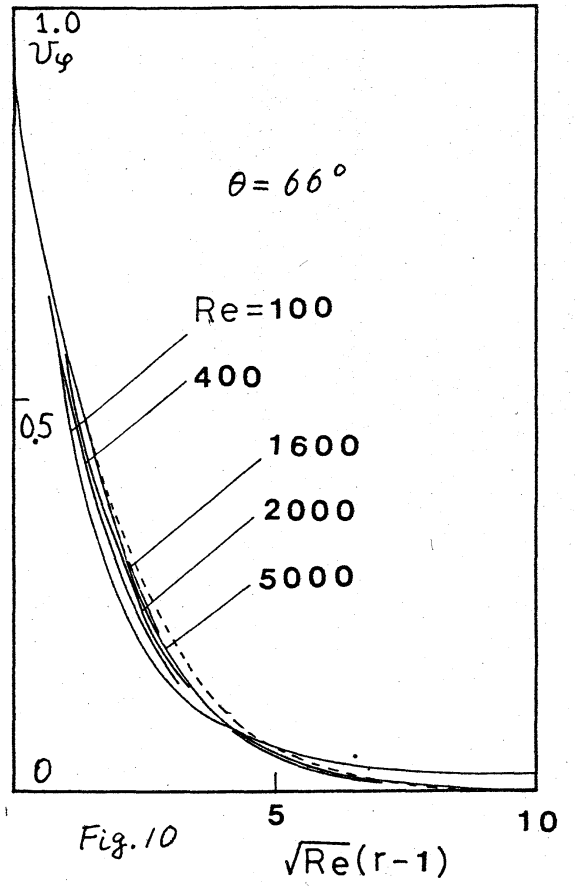


Fig. 10

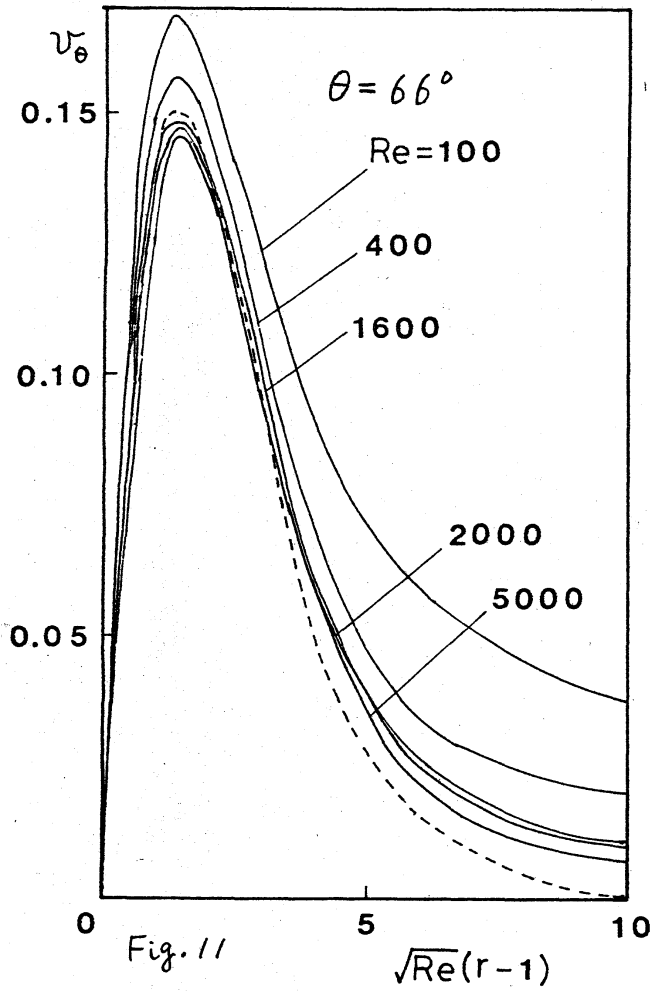


Fig. 11

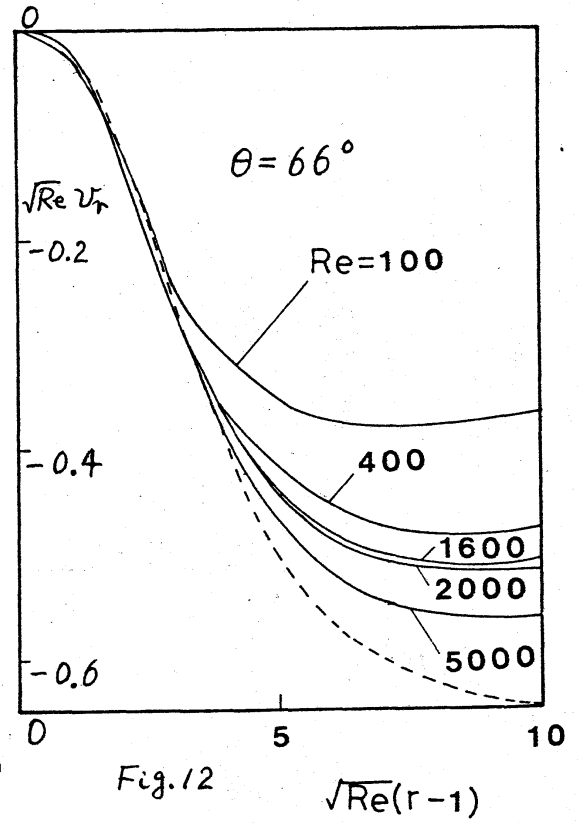


Fig. 12

文献

- (1) H. Takagi, *J. Phys. Soc. Jpn.*,
42 (1977), 319
- (2) S. C. R. Dennis et. al., *J. Fluid
mech*, 101 (1980), 257
- (3) L. Howarth, *Phil. Mag.*, 42
(1951), 1308
- (4) W. H. H. Banks, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 18 (1965)
443
- (5) R. Manohar, *Z. Angew. Math. Phys.*, 18 (1967)
320
- (6) N. Riley, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 15 (1962), 435
- (7) R. T. Davis, *J. Fluid Mech.*, 51 (1972) 417
- (8) 山辺, *機械学会論文集(B)*, 48 (1982) 1282

Re	C_M
100	0.966
400	0.401
1600	0.179
2000	0.155
5000	0.950×10^{-1}
10000	0.668×10^{-1}

Table 1

回転球のモメント係数