数理解析研究所講究録
第 478 巻 1983 年 104-116

社会的選択に関するChichilnisky の考察について

成城大 経済　松江 広文
Hirofumi Matsue

選好順序を考えた社会的選択の理論については、[1], [4], [5], [6] が扱っている。一方、social aggregation rule が Pareto condition を満たすという条件の下で、Chichilnisky が [2] で同じ問題を扱ったので、これを紹介する。数学的に冗長な部分と、あいまいな部分があったので、配列を変え、幾分わかり易い形に書き直した。写像度を用いる部分があるが、[3] を参考にされたい。

1. 記号と定義

① choice space $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を考える。ただし、X は closed unit ball $B^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ に C^2-diffeomorphic とする。

② utility C^2-function $u: X \to \mathbb{R}$ を考える。ただし

$$(\mathrm{grad}\ u)_x = \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)_x, \cdots, \left(\frac{\partial u}{\partial x_{n+1}}\right)_x \right) \neq 0, \text{ for } \forall x \in X$$

とする。

③ $p(x) = \dfrac{(\mathrm{grad}\ u)_x}{\|(\mathrm{grad}\ u)_x\|}$ とおくと. $p : X \longrightarrow S^n$ である。

この p を preference という。(図1. 参照)

④ $P = \{ p\ ;\ \text{preference} \}$ とし. これに C^1-sup norm で topology を入れる。

⑤ k-voters ($k \geqq 2$) を考え.

$$P^k = \{ (p_1, p_2, \cdots, p_k)\ ;\ p_i \in P \}$$

とする。P^k の元 $(p_1, p_2, \cdots, p_k)$ を profile という。

⑥ continuous map $\phi : P^k \longrightarrow P$ を, social aggregation rule という。

定義1. rule ϕ が Pareto condition を満たす。(図1.〜3.)

$\underset{def.}{\Longleftrightarrow}$ $\phi(p_1, p_2, \cdots, p_k) = p$ の時. $\forall x \in X$ に対して.

inner products

$$p_1(x)\cdot(y-x) \geqq 0, \cdots, p_k(x)\cdot(y-x) \geqq 0$$

$$\Longrightarrow p(x)\cdot(y-x) \geqq 0 .$$

定義2. rule ϕ が weak positive association condition を満たす。

$\underset{def.}{\Longleftrightarrow}$ $\exists i \in \{1, 2, \cdots, k\}$, $\exists (p_1, p_2, \cdots, p_k) \in P^k$

s.t. $\phi(p_1, \cdots, p_i, \cdots, p_k) = -p_i$

$$\Longrightarrow \phi(-p_i, \cdots, -p_i, \overset{i\text{-th}}{p_i}, -p_i, \cdots, -p_i) \neq p_i .$$

⑦ Pareto rule が weak positive association condition を満たすとき、W-Pareto rule という。

定義3. rule ϕ が unanimity である。

$\underset{def.}{\Longleftrightarrow}$ $\forall p \in P$ に対して、$\phi(p, p, \cdots, p) = p$ である。

$$\left(\begin{array}{l}\text{すなわち、} D = \{(p, p, \cdots, p) ; p \in P\} \text{ とお} \\ \text{き、} in_D : \begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & D \subset P^k \\ \psi & & \psi \\ p & \longmapsto & (p, p, \cdots, p) \end{array} \\ \text{とおくと、} \phi \circ in_D = id_P, (P \text{上の恒等写像}) \\ \text{である。}\end{array}\right)$$

注意. Pareto rule は unanimity である。(後に証明)

定義4. preference p が linear である。

$\underset{def.}{\Longleftrightarrow}$ p が X 上の linear utility function により induce される。

注意. u が linear utility function であるとは、

ある $(a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ を選んで

$u(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n+1}x_{n+1}$, $\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in X$

と書けることである。

この時、$p(x) = (\mathrm{grad}\, u)_x = (a_1, a_2, \cdots, a_{n+1})$ である。

定義5. aggregation rule ϕ_d が dictatorial で、dictator d をもつ。

$\underset{def.}{\Longleftrightarrow}$ ϕ_d は d-th coordinate への projection である。

$$\left[\begin{array}{l} \text{すなわち．} \forall(p_1,\cdots,p_\alpha,\cdots,p_k)\in P^k \text{に対し} \\ \phi_\alpha(p_1,\cdots,p_\alpha,\cdots,p_k)=p_\alpha \ \text{である。} \end{array}\right]$$

定義6．$f, g : Y \longrightarrow Z$ を continuous maps とする。f は <u>homotopic</u> to g である，あるいは，f は g の <u>continuous deformation</u> である。

$\underset{def.}{\Longleftrightarrow}$ continuous map $H : Y\times[0,1] \longrightarrow Z$ が存在し，$\forall y\in Y$ に対し，$H(y,0)=f(y)$ と，$H(y,1)=g(y)$ とを満たす。

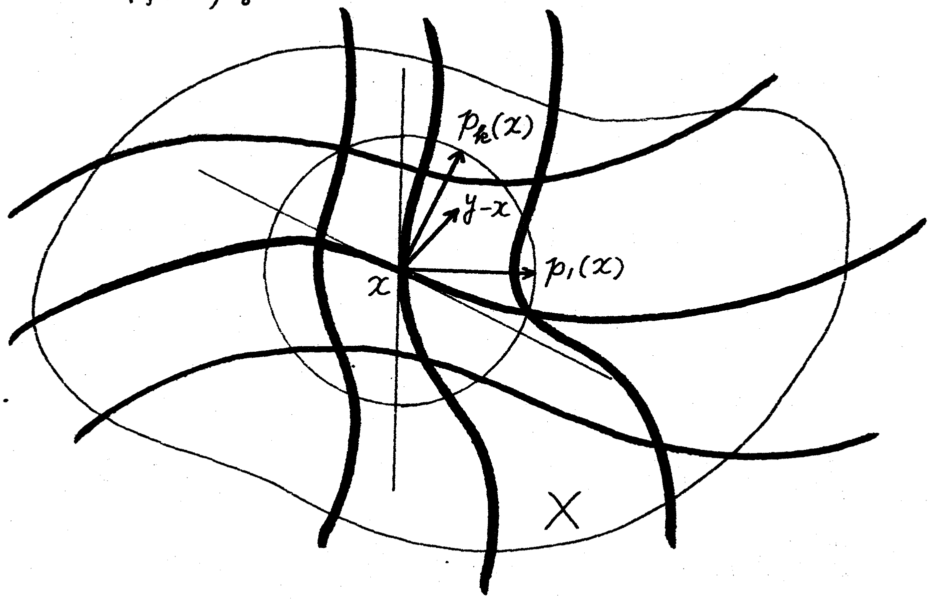

図1.

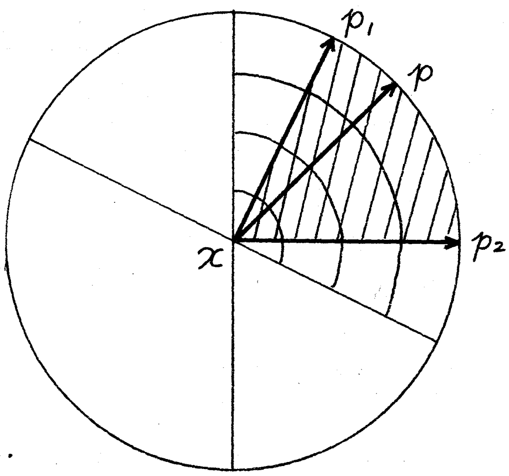

図2.

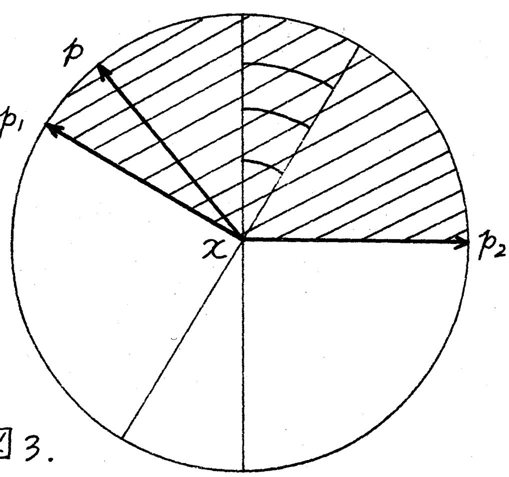

図3.

2．特別な場合の定理

ここでは，voter の数 $k=2$ で，preference が linear の場合について考える。

$n \geqq 1$ の時，$\mathbb{R}^{n+1}$ 内の単位球を S^n とする。

$\overline{P}=\{p: \text{linear preference}\}$ に対し，$(p_1, p_2) \in \overline{P}^2$ をとると，$p_1(x), p_2(x) \in S^n$ は $x \in X$ のとり方によらない。従って，$(p_1, p_2) \in (S^n)^2 = \overline{P}^2$ と考えてよい。

$\phi : (S^n)^2 \longrightarrow S^n = \overline{P}$ が Pareto condition を満たす時，$p = \phi(p_1, p_2)$ を調べよう。

(i) $p_2 \neq p_1$ かつ，$p_2 \neq -p_1$ の時

$Y_1 = \{y ;\ p_1 \cdot (y-x) \geqq 0$ かつ $p_2 \cdot (y-x) \geqq 0\}$ とおくと，p は，$\forall y \in Y_1$ に対し $p \cdot (y-x) \geqq 0 \quad \cdots (1)$ を満たさなければならない。

p_1, p_2 は1次独立である。p_1, p_2 で張られる平面を $\mathcal{L}(p_1, p_2)$ とすると，$\{y-x ;\ y \in Y_1\} \supset \mathcal{L}(p_1, p_2)^{\perp}$ である。$\forall u \in \mathcal{L}(p_1, p_2)^{\perp}$ をとると，(1)より $p \cdot u \geqq 0$，また，$-u \in \mathcal{L}(p_1, p_2)^{\perp}$ より，$p \cdot (-u) \geqq 0$，従って，$p \cdot u \leqq 0$，ゆえに $p \cdot u = 0$ である。すなわち，$p \in \mathcal{L}(p_1, p_2)$ がわかった。

次に，図2，図3より，$p \in \overset{\frown}{p_1 p_2}$ がいえる。

(ii) $p_2 = p_1$ の時.

$Y_2 = \{ y ; p_1 \cdot (y - x) \geqq 0 \}$ とおくと、p は、$\forall y \in Y_2$ に対し、$p \cdot (y - x) \geqq 0$ を満たす。従って $p = p_1$，すなわち、$\phi(p_1, p_1) = p_1$ である。

注意. $[\, p(x) \cdot (y - x) \geqq 0, \cdots, p(x) \cdot (y - x) \geqq 0$

$\Longrightarrow \phi(p, \cdots, p)(x) \cdot (y - x) \geqq 0 \,]$ より.

上と同様の論法で、$\phi(p, \cdots, p)(x) = p(x)$，$\forall x \in X$，すなわち，$\phi(p, \cdots, p) = p$ がいえる。

従って、Pareto rule は unanimity である。

(iii) $p_2 = -p_1$ の時.

$p_1 \cdot (y - x) \geqq 0$ かつ $-p_1 \cdot (y - x) \geqq 0$ より. $p_1 \cdot (y - x) = 0$ である。$Y_3 = \{ y ; p_1 \cdot (y - x) = 0 \}$ とおくと.

$\{ y - x ; y \in Y_3 \} = \mathcal{L}(p_1)^{\perp}$，従って $p \in \mathcal{L}(p_1)$ である。

すなわち. $p = p_1$ または $p = -p_1$ である。

定理 1. social aggregation rule $\phi : \overline{P}^2 \longrightarrow \overline{P}$ が Pareto condition を満たすならば、ϕ は、ある dictatorial rule に homotopic である。

証明. $p_0 \in \overline{P}$ をかってな linear preference とする。ϕ が Pareto condition を満たすことより.

$$\phi(p_0, -p_0) = p_0 \quad \text{または} \quad \phi(p_0, -p_0) = -p_0$$

である。

$\phi(p_0, -p_0) = p_0$ の場合.

ϕ の continuity より、$\forall p \in S^n$ に対し、$\phi(p, -p) = p$.

$$(\because)\quad \begin{array}{ccccc} \overline{P} & \longrightarrow & \overline{P}^2 & \longrightarrow & \{1, -1\} \subset \mathbb{R} \\ \Psi & & \Psi & & \Psi \\ p & \longmapsto & (\phi(p, -p), p) & \longmapsto & \phi(p, -p)\cdot p \end{array}$$

この合成写像が continuous であることと、$\overline{P}$ が connected であることより明らか。

また、$\forall (q_1, q_2) \in \overline{P}^2$ に対し、$\phi(q_1, q_2) \neq -q_1$ である。

$(\because)$ $q_2 \neq q_1, -q_1$ の時、$\phi(q_1, q_2) \in \widehat{q_1 q_2}$

$$\therefore\ \phi(q_1, q_2) \neq -q_1.$$

$q_2 = q_1$ の時、$\phi(q_1, q_1) = q_1 \neq -q_1$.

$q_2 = -q_1$ の時、$\phi(q_1, -q_1) = q_1 \neq -q_1$.

以上より、$H: \overline{P}^2 \times [0, 1] \longrightarrow \overline{P}$ を

$$H((p_1, p_2), t) = \frac{t p_1 + (1-t)\phi(p_1, p_2)}{\| t p_1 + (1-t)\phi(p_1, p_2) \|}$$

と定義する。なお、任意の $x \in X$ に対し、x と、$t p_1 + (1-t)\phi(p_1, p_2)$ との *inner product* を考えれば、grad が $t p_1 + (1-t)\phi(p_1, p_2)$ となる *linear utility function* が定義できる。

この時、$H((p_1, p_2), 0) = \phi(p_1, p_2)$,

$H((p_1, p_2), 1) = p_1 = \phi_1(p_1, p_2)$ である。

$\phi(p_0, -p_0) = -p_0$ の場合も同様に、ϕ は ϕ_2 に *homotopic*

であることがいえる。

従って、Φは、dictator 1 または 2 をもつ dictatorial rule に homotopic であることがわかった。□

3. 一般の場合の定理

2. では、voter の数 $k=2$ で、preference が linear の時、Pareto condition を満たす social aggregation rule は、必ず dictatorial rule に連続変形されることが証明された。以下では、voter の数 $k \geqq 2$ で、preference が linear でなくても、2. と同じ結果が得られることを証明する。

choice space X を考える。

写像 $\lambda : \begin{array}{ccc} S^n & \longrightarrow & P \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ z & \longmapsto & p \end{array}$ は、$\forall x \in X$ に対し、zに、linear utility function $u(x) = z \cdot x$ の linear preference p を対応させる写像とする。λは continuous である。

次に X の元、choice x を 1 つ固定する。

写像 $\Gamma : \begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & S^n \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ p & \longmapsto & p(x) \end{array}$ は continuous である。

このとき、定義より、commutative diagram

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dr, "\Gamma"] & \\ S^n \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[rr, "id_{S^n}"'] & & S^n \end{tikzcd}$$

が成り立つ。すなわち $\Gamma \circ \lambda = id_{S^n}$ である。

$\phi : P^k \longrightarrow P$ をW-Pareto ruleとする。

diagram
$$\begin{tikzcd} P^k \arrow[r, "\phi"] & P \arrow[d, "\Gamma"] \\ (S^n)^k \arrow[u, "\lambda^k"] \arrow[r, "\psi"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & S^n \end{tikzcd}$$
により、ψを定義する。

すなわち、$\psi(z_1,\cdots,z_k)=\Gamma(\phi(\lambda(z_1),\cdots,\lambda(z_k)))$,
$\forall(z_1,\cdots,z_k)\in(S^n)^k$である。$\psi$はcontinuousである。

$z_1, z_2\in S^n$とする。$z_1\neq z_2, -z_2$の時、S^n内でz_1, z_2を通る大円を考える。この大円の、z_1, z_2を結ぶ短かい方の弧を、$C(z_1,z_2)$と書く。(図4.)

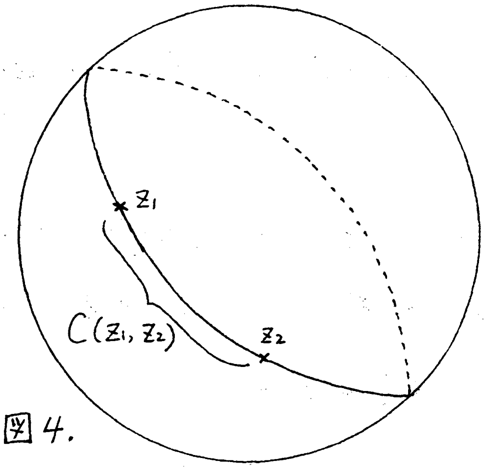

図4.

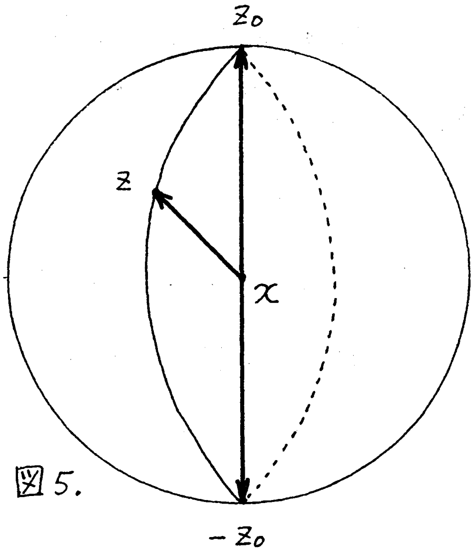

図5.

$z_0\in S^n$を固定する。

$G_i=\{(z_0,\cdots,\overset{i\text{-th}}{z},z_0,\cdots,z_0);\ z\in S^n\}\subset(S^n)^k$とする。

ϕはPareto ruleだから、次のことがいえる。(図5)

$z\neq z_0, -z_0$の時、$\psi(z_0,\cdots,\overset{i\text{-th}}{z},z_0,\cdots,z_0)\in C(z_0,z)$

$z = z_0$ のとき、$\psi(z_0, \cdots, \overset{i\text{-th}}{z_0}, z_0, \cdots, z_0) = z_0$,

$z = -z_0$ のときは次の(イ),(ロ)の場合がある。

$$\psi(z_0, \cdots, \overset{i\text{-th}}{-z_0}, z_0, \cdots, z_0) = z_0 \quad \cdots (イ)$$

or

$$= -z_0 \cdots (ロ)$$

以上のことより、$in_{G_i} : S^n \longrightarrow (S^n)^k$ を、

$in_{G_i}(z) = (z_0, \cdots, \overset{i\text{-th}}{z}, z_0, \cdots, z_0)$ と定義すれば、

(イ)の場合、$\psi \circ in_{G_i} : S^n \longrightarrow S^n$ は onto でない。従って、

$$\deg(\psi \circ in_{G_i}) = 0 \text{ である。}$$

(ロ)の場合、$\psi \circ in_{G_i}$ は id_{S^n} に homotopic。従って、

$$\deg(\psi \circ in_{G_i}) = 1 \text{ である。}$$

$in_{D_S} : S^n \longrightarrow (S^n)^k$ を、

$in_{D_S}(z) = (z, \cdots, z) \in (S^n)^k$ により定義すると、

$\psi \circ in_{D_S} = id_{S^n}$ である。

($\because$) Φ が unanimity であることと、$\Gamma \circ \lambda = id_{S^n}$ であることから明らか。

従って、$\deg(\psi \circ in_{D_S}) = 1$。

$[in_{G_i}], [in_{D_S}] \in \pi_n((S^n)^k) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$ は次のようにあらわせる。

$[in_{G_i}] = (0, \cdots, 0, \overset{i\text{-th}}{1}, 0, \cdots, 0)$,

$[in_{D_S}] = (1, \cdots\cdots\cdots, 1)$.

従って、$\sum_{i=1}^{k}[in_{G_i}] = [in_{D_S}]$ である。

次に、$\psi_*: \pi_n((S^n)^k) \longrightarrow \pi_n(S^n)$ を考えると、

$\sum_{i=1}^{k}\psi_*[in_{G_i}] = \psi_*[in_{D_S}]$. $\therefore \sum_{i=1}^{k}[\psi\circ in_{G_i}] = [\psi\circ in_{D_S}]$,

$\therefore \sum_{i=1}^{k}\deg(\psi\circ in_{G_i}) = \deg(\psi\circ in_{D_S}) = 1$.

従って、$\exists^1 d\in\{1,\cdots,k\}$, s.t. $\deg(\psi\circ in_{G_d}) = 1$, また、

$i\neq d$ ならば $\deg(\psi\circ in_{G_i}) = 0$.

すなわち、$\psi\circ in_{G_d}(-z_0) = \psi(z_0,\cdots,z_0,\overset{d\text{-}th}{-z_0},\cdots,z_0) = -z_0$, また、

$i\neq d$ ならば $\psi\circ in_{G_i}(-z_0) = \psi(z_0,\cdots,z_0,\overset{i\text{-}th}{-z_0},\cdots,z_0) = z_0$.

$\forall z\in S^n$ に対し、$\psi(-z,\cdots,-z,\overset{d\text{-}th}{z},-z,\cdots,-z) = z \cdots (\ast)$

が成り立つ。

$(\because)$ $S^n \longrightarrow \{1,-1\}\subset\mathbb{R}$

$z \longmapsto \psi(-z,\cdots,-z,\overset{d\text{-}th}{z},-z,\cdots,-z)\cdot z$

が continuous であることと、S^n が connected であることより明らか。

$\forall(z_1,\cdots,z_d,\cdots,z_k)\in(S^n)^k$ に対し、$\psi(z_1,\cdots,z_d,\cdots,z_k)\neq -z_d$.

$(\because)$ $\exists(z_1,\cdots,z_d,\cdots,z_k)\in(S^n)^k$, s.t. $\psi(z_1,\cdots,z_d,\cdots,z_k) = -z_d$

と仮定すると、Φ が W-Pareto rule であることより

$\psi(-z_d,\cdots,-z_d,z_d,-z_d,\cdots,-z_d)\neq z_d$ となり、$(\ast)$ に反する。

以上のことから、各 $x\in X$ を固定するごとに、

${}^{\exists}d(x) \in \{1, \cdots, k\}$, $\forall(z_1, \cdots, z_{d(x)}, \cdots, z_k) \in (S^n)^k$に対し、
$\psi(z_1, \cdots, z_{d(x)}, \cdots, z_k) \neq -z_{d(x)}$であることがわかる。

ところが、ϕがcontinuousであることと、Xがconnectedであることより、$d(x)$はxのとり方によらない。

従って、${}^{\forall}$profile $(p_1, \cdots, p_d, \cdots, p_k) \in P^k$に対し、
$\phi(p_1, \cdots, p_d, \cdots, p_k)(x) \neq -p_d(x)$, ${}^{\forall}x \in X$である。

homotopyを

$$H((p_1, \cdots, p_k), t)(x) = \frac{tp_d(x) + (1-t)\phi(p_1, \cdots, p_k)(x)}{\| tp_d(x) + (1-t)\phi(p_1, \cdots, p_k)(x) \|}$$

で定義し、各tに対し、
utility functionを$u_t(x) = tu_d(x) + (1-t)u(x)$とする。ただし、
u_dはd番目のvoterのutility functionであり、uはsocial aggregation rule $\phi(p_1, \cdots, p_k)$に対応するutility functionである。

以上より、次の定理が証明された。

定理2. $\phi : P^k \longrightarrow P$をW-Pareto ruleとすれば、$\phi$は、あるdictatoric ruleにhomotopicである。

文　献

[1] Arrow, K. J., <u>Social Choice and Individual Values</u>, Wiley, 1963.

[2] Chichilnisky, G., "The Topological Equivalence of the Pareto Condition and the Existence of a Dictator", <u>Journal of Math. Economics</u>, 9, 1982, p. 223–233.

[3] 松江広文, "写像度について", <u>位相幾何学と経済学</u>(数理解析研究所講究録, 407), 1980, p. 27–38.

[4] 二階堂副包(編), <u>経済の数理</u>. 第5章, 筑摩, 1977.

[5] Sen, A. K., <u>Collective Choice and Social Welfare</u>, Holden-Day, 1970.

[6] Suzumura, K., "Rational Choice, Collective Decision and Social Welfare", <u>位相幾何学と経済学</u>(数理解析研究所講究録, 407), 1980, p. 1–9.