

## Ozawa leaf invariants and leaf

北大理 鈴木治夫 ( Haruo Suzuki )

### § 1 序

境界をもたないパラコンパクト・ハウスドルフ  $C^\infty$ -多様体  $M$  上の余次元  $k$  の  $C^\infty$ -葉層を考へ、その一つの葉を  $L$  とする。葉の法ベクトル束  $\nu(\mathcal{L})$  上の Bott 接続  $[B]$  とリーマン接続とのアッフォイン結合から  $\nu(\mathcal{L}) \times \mathbb{R}$  上の接続が定まるが、その曲率行列によつて各奇数次 Chern 多項式  $c_i$  に対し、葉不変量  $\bar{h}_i(\mathcal{L}, L; M) \in H_{DR}^{2i-1}(M)$  が構成される。この概念の起りは G. Reeb [R] によるもので、その後 B. Reinhart [Ri] や R. Goldman [G] によつて発展させられた。

$\{X_1, \dots, X_k\}$  が  $M$  の接ベクトルの  $\mathbb{R}$ -frame field で、余次元  $k$  の葉層  $\mathcal{L}$  に横断的と反り、 $\mathcal{L} \subset \tilde{\mathcal{L}}$  ( $\mathcal{L}$  の葉は  $\tilde{\mathcal{L}}$  の葉に含まれる) とする。また各  $X_i$  は  $\mathcal{L}$  を保ち、 $X_1, \dots, X_k$  は  $\mathcal{L}$  を法とするリーマン環をなすものとする。

定理 1. 上の仮定の下で  $\mathcal{L}$  と  $X_1, \dots, X_k$  と  $\mathcal{L}$  によつて定ま

る葉層,  $L$  を  $\Sigma$  の葉,  $L'$  を  $\Sigma'$  の葉で  $L \subset L'$  と仮定するとし,  
その包含写像  $j: L \rightarrow L'$  とする. このとき,

$$R_i(\Sigma, L; M) = \begin{cases} j^* R_i(\Sigma', L'; M) & 1 \leq i \leq q-k \\ 0 & i > q-k. \end{cases}$$

この結果は筆者による  $\Sigma$  と  $\Sigma'$  の 2 次特性類の間の等式に関する定理 [S] の類似である.

次いで,  $O$  で反  $\mathfrak{h}_1$ -不変量  $E$  もつ巾葉層を構成し, 定理 1 を用いてこの葉層を保つ局所自由, 横断的  $\mathfrak{h}_1$ -群の作用は存在し反  $\mathfrak{h}_1$  ことを示す. また  $H$  を連結単連結  $\mathfrak{h}_1$ -群とすると, 上述の巾葉層を平坦主  $H$ -束にリフトしたものは, 再び定理 1 によって  $O$  で反  $\mathfrak{h}_1$ -不変量  $E$  もつことがいえる.

## §2 葉不変量と横断 $\mathfrak{h}_1$ -frame field

$T(M)$  を  $M$  の接ベクトル束とし,  $F = T(\Sigma)$  を  $\Sigma$  の葉の接ベクトル全体から成る  $T(M)$  の部分ベクトル束とする.  $\Sigma$  の法ベクトル束は  $\nu(\Sigma) = T(M)/F$  と表わされる.  $\nabla^B$  を  $\nu(\Sigma)$  上の  $\Sigma$  の Bott 接続,  $K_B$  をその曲率行列とする.  $c_i$  を  $i$  次 Chern 多項式とする.  $K_B$  は  $\Sigma$  の独立な  $q$  個の定義微分形式のインデックスに含まれる (Bott 消滅定理) から,  $\Sigma$  の葉  $L$  に対し,

$$c_i(K_B)|_L = 0.$$

$\nabla^R$  を  $\mathcal{V}(F)$  上のリーマン接続,  $K_R$  をその曲率行列とする.

$\pi: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  を自然射影写像とし,  $\pi^*\mathcal{V}(F) = \mathcal{V}(F) \times \mathbb{R}$  上の接続を

$$\nabla = t\nabla^B + (1-t)\nabla^R \quad (t \in \mathbb{R})$$

によって定めよ. 自明束  $\pi: M \times I \rightarrow M$  の  $I$  上での積分作用素を  $\pi_*$  とかくと,  $K_R$  が歪対称であることから,

$$d(\pi_*(C_i(K)|_{M \times I})) = C_i(K_B) \quad i \text{ 奇数}$$

がいえる. ゆえに

$$d(\pi_*(C_i(K)|_{M \times I})|_L = C_i(K_B)|_L = 0.$$

$E(h_1, h_3, \dots, h_l)$ ,  $l = 2 \lfloor \frac{q+1}{2} \rfloor - 1$  を  $h_1, h_3, \dots, h_l$  によって生成される外積多元環で,  $\deg h_i = 2i-1$  とする. 次数つき多元環の準同形写像  $\alpha_{F, L; M}: E(h_1, h_3, \dots, h_l) \rightarrow H_{DR}^*(M)$  が

$$\alpha_{F, L; M}(h_i) = [\pi_*(C_i(K)|_{M \times I})|_L] \in H_{DR}^{2i-1}(L)$$

$$i = 1, 3, \dots, l$$

によって定義される. 右辺は  $\nabla^B, \nabla^R$  のとり方によらないで,  $F$  と  $L$  だけで一意に定まり, 葉層の横断写像に関する自然性をもつことがいえる.  $\rho_i(F, L; M) = \alpha_{F, L; M}(h_i)$  とおき, これを  $h_i$ -葉不変量とよびこゝに置く.

$\Gamma(F)$  は束  $F$  の  $C^\infty$ -sections 全体の加群を表わすものとする.  $Y \in \Gamma(T(M))$  とし, 任意の  $Z \in \Gamma(F)$  に対して

$$[Y, Z] \in \Gamma(F)$$

と仮定するとき、 $\mathcal{F}$  は 可保 という。  $C(M) \ni M$  上の  $C^\infty$ -関数全体の加群とする。  $X_1, \dots, X_k \in \Gamma(T(M))$  に対し  $\alpha_{ij}^l \in C(M)$ ,  $Y_{ij} \in \Gamma(F)$ ,  $i, j, l = 1, \dots, k$  が存在し、

$$[X_i, X_j] = \sum_{l=1}^k \alpha_{ij}^l X_l + Y_{ij}$$

と仮定するとき、 $X_1, \dots, X_k$  は 可保法とするリ-環 を定めるという。  $\{X_1, \dots, X_k\}$  が  $\mathcal{F}$  に横断的な  $k$ -frame field で、 $X_1, \dots, X_k$  が  $\mathcal{F}$  を法とするリ-環を定めるならば、各  $X_i$  によって定義される自明直線束を  $\mathcal{F}_i$  とかくとき、部分束

$$F' = \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{F}_i \oplus F \subset T(M)$$

は積分可能である。  $F'$  に対応する葉層を  $\mathcal{F}'$  とかき、 $X_1, \dots, X_k$  と  $\mathcal{F}$  によって定まる葉層という。 あきらかに  $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ 。

### §3 拡大葉層の葉不変量

定理1.  $\mathcal{F}$  は  $M$  上の余次元  $q$  の葉層、 $\{X_1, \dots, X_k\}$  は  $M$  上の余次元  $k$  の葉層  $\mathcal{F}$  に横断的な  $k$ -frame field で  $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$  であるとする。 各  $X_i$  は  $\mathcal{F}$  を保ち、 $X_1, \dots, X_k$  は  $\mathcal{F}$  を法とするリ-環を定めるものとする。  $\mathcal{F}'$  は  $X_1, \dots, X_k$  と  $\mathcal{F}$  によって定まる葉層とし、 $L$  は  $\mathcal{F}$  の葉、 $L'$  は  $\mathcal{F}'$  の葉で  $L \subset L'$  となるものとする。  $j: L \rightarrow L'$  を包含写像とする。 このとき、

$$h_i(\mathcal{F}, L; M) = \begin{cases} j^* h_i(\mathcal{F}', L'; M) & 1 \leq i \leq q-k \\ 0 & i > q-k. \end{cases}$$

証明  $T(\tilde{\Sigma}) = \tilde{F}$  のホイト = -和分解  $\tilde{F} = F \oplus \tilde{V}$  を用い  
て、法ベクトル束の関係

$$V = \bigoplus_{i=1}^k \xi_i \oplus \tilde{V}, \quad V = \nu(\Sigma), \quad \tilde{V} = \nu(\Sigma')$$

が得られる。  $\tilde{\nabla}$  は  $\tilde{V}$  上の  $\Sigma'$  の Bott 接続,  $\nabla'$  は  $\bigoplus_{i=1}^k \xi_i$  上の大域  
の  $\mathbb{R}$ -frame field に関する自明な接続とし,  $V$  上の接続を,

$$\nabla = \nabla' \oplus \tilde{\nabla}$$

によつて定める。  $\bigoplus_{i=1}^k \xi_i \oplus \tilde{V} \subset T(M)$  は部分ベクトル束であ  
るから,  $s \in \Gamma(\tilde{V})$  はそのまま,  $\Gamma(\bigoplus_{i=1}^k \xi_i \oplus \tilde{V}) \subset \Gamma(T(M))$  の元と  
みなされる。

$\rho: T(M) \rightarrow \tilde{V} = T(M)/F$  を射影写像とする。  $X_i$  は  $\Sigma \Sigma$  係  
から,

$$[X, X_i] \in \Gamma(F) \quad X \in \Gamma(F).$$

ゆゑに

$$\nabla'_X(X_i) = 0 = \rho([X, X_i]) \quad i=1, \dots, k$$

となり, 任意の  $s' \in \Gamma(\bigoplus_{i=1}^k \xi_i) \subset \Gamma(T(M))$  に對して

$$\nabla'_X(s') = \nabla_X(s') = \rho([X, s']).$$

$\tilde{\rho}: T(M) \rightarrow \tilde{V} = T(M)/F'$  を射影写像とすると, 仮定により  $\tilde{F}$   
 $= F \oplus \tilde{V} \subset T(M)$  は積分可能であるから, 任意の  $\tilde{s} \in \Gamma(\tilde{V}) \subset$   
 $\Gamma(T(M))$  および  $X \in \Gamma(F)$  に對して

$$([X, \tilde{s}] \text{ の } \xi_i \text{-成分}) = 0$$

となる。したがつて  $\rho([X, \tilde{s}]) = \tilde{\rho}([X, \tilde{s}])$  が得られ,

$$\begin{aligned}\nabla_X(\tilde{s}) &= \tilde{\nabla}_X(\tilde{s}) = \tilde{P}([X, \tilde{s}]) \\ &= P([X, \tilde{s}]).\end{aligned}$$

任意の  $s \in \Gamma(\bigoplus_{i=1}^k \tilde{\xi}_i \oplus \tilde{V})$  は

$$s = s' \oplus \tilde{s}$$

の形であるから,  $X \in \Gamma(F)$  に対し

$$\begin{aligned}\nabla_X(s) &= \nabla'_X(s') + \tilde{\nabla}_X(\tilde{s}) \\ &= P([X, s']) + P([X, \tilde{s}]) \\ &= P([X, s' + \tilde{s}]) \\ &= P([X, s]).\end{aligned}$$

したがって  $\nabla$  は  $\tilde{V}$  の Bott 接続と取る.

$\{\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{q-k}\} \in \tilde{V}$  の局所  $(q-k)$ -frame section とする.

$\{s_1, \dots, s_q\} = \{\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{q-k}, X_1, \dots, X_k\}$  とおけば, これは  $V$  の局所  $q$ -frame section と取る.  $\tilde{\theta} \in \tilde{V}$  の  $\{\tilde{s}_\lambda\}$  に関する接続行列とする.  $\nabla$  の  $\{s_\mu\}$  に関する接続行列  $\theta$  は

$$\theta = \begin{bmatrix} \tilde{\theta} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる.  $\tilde{\nabla}^0 \in \tilde{V}$  上の定まったリーマン接続とし,  $\tilde{\theta}^0 \in \{\tilde{s}_\lambda\}$  に関する  $\tilde{\nabla}^0$  の接続行列とする.  $V = \bigoplus_{i=1}^k \tilde{\xi}_i \oplus \tilde{V}$  上の接続  $\nabla^0 = \nabla' \oplus \tilde{\nabla}^0$  の  $\{s_\mu\}$  に関する接続行列は

$$\theta^0 = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}^0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\pi^*V = V \times \mathbb{R}$  上の接続を

$$\nabla^* = t\nabla + (1-t)\nabla^0 \quad (t \in \mathbb{R})$$

によって定める. その  $\{s_\mu\}$  に関する接続行列は,

$$\theta^* = t\theta + (1-t)\theta^0.$$

$\Omega^*$  を  $\nabla^*$  の  $\{s_\mu\}$  に関する曲率行列とする. このとき

$$\Omega^* = d\theta^* - \theta^* \wedge \theta^*.$$

$\nabla^*$  と同様,  $\pi^*\tilde{V} = \tilde{V} \times \mathbb{R}$  上の接続  $\tilde{\nabla}^*$ ,  $\{\tilde{s}_\mu\}$  に関する接続行列  $\tilde{\theta}^*$  および曲率行列  $\tilde{\Omega}^* = d\tilde{\theta}^* - \tilde{\theta}^* \wedge \tilde{\theta}^*$  が得られ,

$$\Omega^* = \begin{bmatrix} \tilde{\Omega}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$I^i(\mathrm{GL}(q; \mathbb{R}))$  は リー環  $\mathfrak{gl}(q; \mathbb{R})$  上の  $i$  次斉次随伴不変多項式全体のベクトル空間とする.  $I^i(\mathrm{GL}(q-k; \mathbb{R}))$  も同様に定義されるが, 自然同対応によってこれは  $I^i(\mathrm{GL}(q; \mathbb{R}))$  の部分空間とみることができる. したがって  $c_i \in I^i(\mathrm{GL}(q; \mathbb{R}))$  に対しても  $c_i(\tilde{\Omega}^*)$   $i \leq q-k$  は定義でき,

$$\begin{aligned} c_i(\Omega^*) &= c_i(\tilde{\Omega}^*) & 1 \leq i \leq q-k \\ &= 0 & i > q-k. \end{aligned}$$

ゆえに  $1 \leq i \leq q-k$  に対しても

$$\begin{aligned} R_i(\mathfrak{g}, L; M) &= [\pi_*(c_i(\Omega^*)|_{M \times I})|_L] \\ &= [\pi_*(c_i(\tilde{\Omega}^*)|_{M \times I})|_L] \\ &= j^*[\pi_*(c_i(\tilde{\Omega}^*)|_{M \times I})|_L] \end{aligned}$$

$$= j^* h_i(\pi, L; M),$$

$i > q - k$  に対しては  $h_i(\pi, L; M) = 0$ . ■

#### §4 巾零葉層

巾零リー群の作用による軌道葉層を巾零葉層という。  $G$  は  $n$  次元連結単連結リー群,  $G_0 < G$  は一様疎部分群すなわち  $K = G/G_0$  がコンパクトであるとす。

定理2. 多様体  $K \times \mathbb{R}$  の上に余次元1の巾零葉層系が存在し,  $K \times \{0\}$  を葉にもち,

$$h_1(\pi, K \times \{0\}; K \times \mathbb{R}) \neq 0.$$

証明 [S2] 参照.

$K \times \mathbb{R}$  上の葉層系は,  $m \geq 1$  に対し  $\mathbb{R}^{m-1}$  上の点葉層との積をとることにより,

$$K \times \mathbb{R}^m = (K \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{m-1}$$

の上の余次元  $m$  葉層に延長される。これを同じ記号で表わすことにする。  $F$  を  $K \times \mathbb{R}$  上の  $\pi$  の接ベクトルから成る  $T(K \times \mathbb{R})$  の部分束,  $V$  を  $K \times \mathbb{R}$  上の  $\pi$  の法ベクトル束,  $V_m$  を  $K \times \mathbb{R}^m$  上の  $\pi$  の法ベクトル束とする。  $\bar{p}: K \times \mathbb{R}^m \rightarrow K \times \mathbb{R}$  を  $K \times \mathbb{R}^m = (K \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{m-1}$  の第一因子への射影写像とし,  $\bar{V} = \bar{p}^* V = V \times \mathbb{R}^{m-1}$  とおく。  $\varepsilon^{m-1} \in K \times \mathbb{R}^m$  上の自明  $(m-1)$  ベクトル束とすると,



$$V_m = \bar{V} \oplus \varepsilon^{m-1}.$$

補題 3.  $h_1(\mathbb{F}, K \times \{0\}; K \times \mathbb{R}^m) = h_1(\mathbb{F}, K \times \{0\}, K \times \mathbb{R})$ .

証明  $\nabla^B \in V$  上の  $\mathbb{F}$  の Bott 接続とする.  $X \in \Gamma(T(K \times \mathbb{R}))$  は写像

$$(\mathbb{R}, t_1, \dots, t_m) \mapsto (X(\mathbb{R}, t_1), 0) \in T(K \times \mathbb{R}) \times T(\mathbb{R}^{m-1})$$

によって  $\Gamma(T(K \times \mathbb{R}^m))$  の元と同一視される.  $\bar{s} \in \Gamma(V)$  は  $\Gamma(\bar{V})$  の元と自然に同一視され, これを同一記号  $\bar{s}$  で表わす.

$\Gamma(V_m) = \Gamma(\bar{V} \oplus \varepsilon^{m-1})$  は  $\Gamma(V) \subset \Gamma(\bar{V})$  と  $\mathbb{R}^{m-1}$  の座標接ベクトル場  $Y_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) が定める section  $s_i \in \Gamma(\varepsilon^{m-1})$  によって生成され,  $Y_i$  はまた  $K \times \mathbb{R}^m$  の接ベクトル場とみることができ.

$V_m$  上の接続  $\nabla$  を

$$\nabla_X(\bar{s}) = \nabla_X^B(\bar{s}) \in \Gamma(V) \subset \Gamma(\bar{V})$$

$$\bar{s} \in \Gamma(V) \subset \Gamma(\bar{V}), \quad X \in \Gamma(T(K \times \mathbb{R})) \subset \Gamma(T(K \times \mathbb{R}^m)),$$

$$\nabla_{Y_i}(\bar{s}) = 0 \quad \bar{s} \in \Gamma(V) \subset \Gamma(\bar{V}),$$

$$\nabla_Y(s_i) = 0 \quad Y \in \Gamma(T(K \times \mathbb{R}^m))$$

によって定める.  $p: T(K \times \mathbb{R}^m) \rightarrow V_m = T(K \times \mathbb{R}^m)/\mathbb{F} \times \mathbb{R}^{m-1} = \bar{V} \oplus \varepsilon^{m-1}$  および  $\bar{p}: T(K \times \mathbb{R}) \rightarrow V = T(K \times \mathbb{R})/\mathbb{F}$  を射影写像とすると,  $Y \in \Gamma(T(K \times \mathbb{R})) \subset \Gamma(T(K \times \mathbb{R}^m))$  ならば  $\bar{p}(Y) = p(Y) \in \Gamma(V) \subset \Gamma(\bar{V})$ .  $Z \in \Gamma(T(K \times \mathbb{R}))$  に対して  $\bar{s} = \bar{p}(Z) = p(Z)$  とおけば,  $X \in \Gamma(\mathbb{F}) \subset \Gamma(\mathbb{F} \times \mathbb{R}^{m-1})$  とするとき

$$[X, Z] \in \Gamma(T(K \times \mathbb{R})) \subset \Gamma(T(K \times \mathbb{R}^m))$$

であるから,

$$\nabla_X(\bar{s}) = \nabla_X^B(\bar{s}) = \bar{p}([X, Z]) = p([X, Z]).$$

$s_i = p(Y_i) \in \Gamma(\varepsilon^{m-1}) \subset \Gamma(V_m)$  ( $i=1, \dots, m-1$ ) ならば

$$\nabla_X(s_i) = 0 = p([X, Y_i])$$

であるから,  $\nabla$  は  $V_m$  上の  $K \times \mathbb{R}^m$  にあける  $\mathfrak{g}$  の Bott 接続である.

$\nabla^0 \in \varepsilon^{m-1}$  の  $(m-1)$ -frame section  $\{s_1, \dots, s_{m-1}\}$  に関する

自明な接続とすれば,  $\nabla$  の定義から

$$\nabla = \bar{p}^* \nabla^B \oplus \nabla^0.$$

$\bar{\theta} \in \nabla^B$  の (局所) section  $\bar{s} \in \Gamma(V)$  に関する接続形式とすれば,  $V_m$  の (局所)  $m$ -frame section  $\{\bar{s}, s_1, \dots, s_{m-1}\}$  に関する  $\nabla$  の接続行列は,

$$\theta = \begin{bmatrix} \bar{p}^* \bar{\theta} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

定理 1 の証明と同様の方法により,

$$h_1(\mathfrak{g}, K \times \{0\}; K \times \mathbb{R}^m) = \bar{p}^* h_1(\mathfrak{g}, K \times \{0\}; K \times \mathbb{R}).$$

1 からは  $\bar{p}|_{K \times \{0\}}$  は恒等写像であるから,

$$h_1(\mathfrak{g}, K \times \{0\}; K \times \mathbb{R}^m) = h_1(\mathfrak{g}, K \times \{0\}; K \times \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

定理 1, 2 および補題 3 から,  $K \times \mathbb{R}^m$  の  $\mathfrak{g}$  を保つリー群の作用に関する 2 次の結論が得られる.

定理 4.  $K \times \mathbb{R}^m$  に延長された余次元  $m$  の葉層  $\mathfrak{g}$  に対し, 局所自由横断的  $\mathfrak{g}$  を保つリー群の作用は存在しない.

証明 リー群  $G_1$  が  $K \times \mathbb{R}^m$  の上に局所自由な横断的に作用し、 $\tilde{\omega}$  を保つとする。定理 1 を  $\tilde{\omega}$ ,  $L = K \times \{0\}$ ,  $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}$  および  $G_1$  の作用の下における  $G_1$  のリー環の基底ベクトルの像として定まる  $m$ -frame field  $\{X_1, \dots, X_m\}$  に適用する。この場合  $\tilde{\omega}$  は  $\pi^{-1}$  の葉  $L' = K \times \mathbb{R}^m$  をもつ葉層となるから、

$$h_1(\tilde{\omega}', L'; K \times \mathbb{R}^m) = 0.$$

$j: K \times \{0\} \rightarrow K \times \mathbb{R}^m$  を包含写像とすると、定理 1 から

$$\begin{aligned} h_1(\tilde{\omega}, K \times \{0\}; K \times \mathbb{R}^m) &= j^* h_1(\tilde{\omega}', L'; K \times \mathbb{R}^m) \\ &= 0. \end{aligned}$$

ゆえに補題 3 により

$$h_1(\tilde{\omega}, K \times \{0\}; K \times \mathbb{R}) = 0$$

となり、定理 2 に反する。 ■

### §5 0 でない $h_1$ -不変量をもつ葉層の構成

$G, G_0$  および  $K$  は上に述べたものとする。  $H$  を連結単連結リー群、  $f: G_0 \rightarrow H$  を準同形写像とする。  $f$  から定まる  $G_0$  の  $H$  上の作用により主  $H$ -束  $E = (G \times \mathbb{R}^m) \times_{G_0} H$  が得られる。  $\sigma: (G \times \mathbb{R}^m) \times H \rightarrow E = (G \times \mathbb{R}^m) \times_{G_0} H$  を射影写像とする。  $p_0: G \rightarrow G/G_0 = K$  を射影写像とすると、 $\tilde{\omega}$  は被覆写像  $p_0 \times \text{id}: G \times \mathbb{R}^m \rightarrow K \times \mathbb{R}^m$  に対する  $G \times \mathbb{R}^m$  上の被覆葉層  $\tilde{\omega}$  を定める。  $(G \times \mathbb{R}^m) \times H$  の上の  $G_0$  の対角作用は、余次元  $m + \dim H$

の葉層  $\{\hat{L} \times \{\mathbb{R}\}\} \subset \tilde{\mathcal{F}}$ ,  $\mathbb{R} \in H$  を保つから,  $E$  上の余次元  $m + \dim H$  の葉層  $\bar{\mathcal{F}}$  が得られる. あきらかに  $\bar{L} = \bar{\sigma}(G \times \{0\} \times \{\mathbb{R}\})$  ( $\mathbb{R} \in H$ ) は  $\bar{\mathcal{F}}$  の葉で, その  $h_1$ -不変量について [S1] の section 3 と同様の方法により, 次の結論が得られる.

定理 5.  $\bar{h}_1(\bar{\mathcal{F}}, \bar{L}; E) \neq 0$ .

証明  $\tilde{\mathcal{F}} = \{\sigma(G \times \mathbb{R}^m \times \{\mathbb{R}\}) \mid \mathbb{R} \in H\}$  は  $E$  上の余次元が  $\dim H = k$  の葉層となり, 定義からあきらかに  $\bar{\mathcal{F}} \subset \tilde{\mathcal{F}}$ . 定理 1 を  $M = E$ ,  $\mathcal{F} = \bar{\mathcal{F}}$ ,  $\tilde{\mathcal{F}}$  および  $H$  の右作用の下における  $H$  のリ-環の基底ベクトルの像として定まる  $\tilde{\mathcal{F}}$  の横断  $k$ -frame field  $\{X_1, \dots, X_k\}$  に適用する. この場合  $\bar{\mathcal{F}}$ ,  $\tilde{\mathcal{F}}$  共に  $H$  の右作用で不変であるから, 各  $X_i$  は  $\bar{\mathcal{F}}$ ,  $\tilde{\mathcal{F}}$  を保つ.  $X_1, \dots, X_k$  と  $\bar{\mathcal{F}}$  とによって定まる葉層を  $\mathcal{F}'$  とかく.  $L' \in \mathcal{F}'$  の葉とし,  $L' \supset \bar{L}$  と仮定すると, 定理 1 により,

$$\bar{h}_1(\bar{\mathcal{F}}, \bar{L}; E) = \bar{h}_1(\mathcal{F}', L'; E).$$

$\varphi: E \rightarrow K \times \mathbb{R}^m$  を束射影写像, すなわち

$$\varphi(\sigma(g, x, \mathbb{R})) = (p_0(g), x)$$

とする.  $\varphi$  は  $\tilde{\mathcal{F}}$  に横断的であり, 葉層に対応する部分ベクトル束の一致から  $\varphi^*(\mathcal{F}') = \tilde{\mathcal{F}}$ .  $h_1(\mathcal{F}', L'; E)$  の定義における Bott 接続およびリーマン接続として,  $\bar{h}_1(\bar{\mathcal{F}}, K \times \{0\}; K \times \mathbb{R}^m)$  の定義におけるこれらの接続の  $\varphi$  による引きもとしてとることができるから,

$$h_1(\overline{\mathfrak{A}}, \overline{L}; E) = \varphi^* h_1(\mathfrak{A}, K \times \{0\}; K \times \mathbb{R}^m).$$

仮定により  $H$  は連結単連結であるから,  $\varphi$  は同形写像

$$\pi_1(E) \xrightarrow{\cong} \pi_1(K \times \mathbb{R}^m)$$

をひきおこし, このことから同形写像

$$\varphi_*: H_1(E; \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} H_1(K \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R})$$

が得られる。

$$\varphi^*: H_{DR}^1(K \times \mathbb{R}^m) \xrightarrow{\cong} H_{DR}^1(E)$$

を得られる。ゆえに上述の式と定理 2 および補題 3 から,

$$h_1(\overline{\mathfrak{A}}, \overline{L}; E) = h_1(\mathfrak{A}, L; E) \neq 0. \quad \blacksquare$$

#### REFERENCES

- [B] R. Bott, Lectures on characteristic classes and foliations, Lecture Notes in Math. 279, Springer-Verlag, Berlin and New York 1976, 294-307.
- [G] R. Goldman, Characteristic classes on the leaves of foliated manifolds, Ph. D. Thesis John Hopkins Univ. 1973.
- [R] G. Reeb, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, Actualités Sci. Indust., Herman, Paris 1952.
- [Ri] B. Reinhart, Holonomy invariants for framed foliations, Technical Report No. 32, Univ. of Maryland 1972.

- [S1] H. Suzuki, Foliation preserving Lie group actions and characteristic classes, Proc. Amer. Math. Soc. 85 (1982), 633-637.
- [S2] H. Suzuki, Leaf invariants of some nilfoliations, Preprint.