数理解析研究所講究録
第479巻 1983年 69-76

余次元1の極小葉層について

東北大理　押切　源一（Gen-ichi Oshikiri）

1．D.L.Johnson と L.B.Whitt は［2］で，次のような定理を証明している。

［定理（Theorem 3.1，［2］）］　Mを完備で連結なリーマン多様体で，コンパクトな葉のみからなる余次元1の全測地的葉層をもつものとする。このとき，キリングベクトル場Xが$\mathcal{F}$にMのある点で接すれば，M上到る所Xは$\mathcal{F}$に接する。

この結果，キリングベクトル場が$\mathcal{F}$とその直交方向に分解されること，更に，直交方向には高々一次元しか出てこないことを示している。その応用として，Mの等長変換群のidentity componentについて調べている。ここでは，同様の考察を，少なくとも一つのコンパクトな葉をもつ余次元1の極小葉層について行なう。上の定理は，コンパクトな葉の和集合の上において成立していることがわかる（定理A）。また，キリン

グベクトル場 X がコンパクトな葉 L に横断的な場合は、すべての葉が L に等長的になっていることがわかる（定理B）。この結果、$\mathcal{F}$ に横断的な方向には、高々一次元しかキリングベクトル場が出てこないことがわかる（系）。証明には、Harvey-Lawson [1] にある "geometrically very tight" が本質的な役割をはたす。

以下、出てくるものはすべて C^∞ 級とする。

2．(M, g) を完備で連結な $(n+1)$ 次元リーマン多様体、$\mathcal{F}$ をその上の余次元1の葉層で、M、$\mathcal{F}$ とも向きづけ可能と仮定しておく。N を $\mathcal{F}$ に直交する M 上の単位ベクトル場とし、以上をまとめて $(M, \mathcal{F}, g, N)$ とかくことにする。$\mathcal{F}$ のすべての葉が (M, g) の極小部分多様体になっているとき、$(M, \mathcal{F}, g, N)$ を極小葉層という。このとき、$(M, \mathcal{F}, g, N)$ 上のキリングベクトル場に対して、次が成り立つ。

［定理A］ $(M, \mathcal{F}, g, N)$ を極小葉層とする。$\mathcal{F}$ はコンパクトな葉を持つと仮定する。$C(\mathcal{F})$ で $\mathcal{F}$ のすべてのコンパクトな葉の和を表わすことにする。このとき、キリングベクトル場 X が $C(\mathcal{F})$ のある点で $\mathcal{F}$ に接すれば、X は $C(\mathcal{F})$ 上到る所で $\mathcal{F}$ に接する。

コンパクトでない葉に対しては，必ずしも成立しているとは限らない。Johnson-Whitt [2] は，T^2上でそのような例を作っている。一方，キリングベクトル場がコンパクトな葉に横断的な場合には，次が成り立つ。

［定理B］ $(M, \mathcal{F}, g, N)$ を極小葉層とする。$\mathcal{F}$はコンパクトな葉Lをもつと仮定する。このとき，キリングベクトル場XがLの一点で$\mathcal{F}$に横断的なら，$\mathcal{F}$のすべての葉はコンパクトで，Xの flow によってLへ等長的にうつされる。

$I_0(M, g)$で，リーマン多様体(M, g)の等長変換群の identity component を表わすことにすると；

（系） 定理Aの$(M, \mathcal{F}, g, N)$に対して，

$$\dim I_0(M, g) \leq \min\{\dim I_0(L, g|L) ; L \subset C(\mathcal{F})\} + 1 。$$

この不等式で等号が成り立てば，$\mathcal{F}$のすべての葉はコンパクトで

$$\dim I_0(M, g) = \dim I_0(L, g|L) + 1$$

となる。ここで，Lは$\mathcal{F}$の任意のコンパクトな葉。

$\mathcal{F}$がコンパクトな葉をもたない場合は，必ずしも成り立たない。例えば，$(n+1)$次元ユークリッド空間(R^{n+1}, g_0)でn次元平面からなる全測地的葉層を考えると，

$$\dim I_0(R^{n+1}, g_0) > \dim I_0(L, g_0|L) + 1$$

となる。

3．定理の証明の前に、準備として次の命題を証明しておく。これは，余次元１の極小葉層は，Harvey-Lawson [1] の意味で"geometrically very tight"になっているということを意味している。

（命題）$(M, \mathcal{F}, g, N)$を極小葉層とし，$\mathcal{F}$はコンパクトな葉L_0をもつとする。このとき，Mの恒等写像にホモトピックな(M, g)の等長変換fは，L_0を$\mathcal{F}$の葉にうつす。

（証明）$\mathcal{F}$に向きを定めて，向きづけられた$\mathcal{F}$の接空間$T_p\mathcal{F}$を$\vec{\mathcal{F}_p}$で表わす。場合によっては，$\vec{\mathcal{F}_p} \in \wedge^n T_pM$とみることもある。$L \in \mathcal{F}$に対しても$T_pL$を$\vec{L_p}$とかくことにする。$\mathcal{F}$の向きづけられた局所正規直交基底$\{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$をとる。これに対し，$n$-形式$\chi_{\mathcal{F}}$を

$$\chi_{\mathcal{F}}(\eta_1, \cdots, \eta_n) \equiv \det(<\eta_i, \xi_j>)$$

で定義する。但し$<\eta_i, \xi_j> = g(\eta_i, \xi_j)$とする。これは，局所正規直交基底$\{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$のとり方によらず，従って，$M$上の$n$-形式を定める。このとき，次の(1)〜(4)が成り立つ。

(1) $d\chi_{\mathcal{F}} = 0$,

(2) $\eta_p \in \Lambda^n T_p M$ を $p \in M$ における単位 simple vector とするとき，$\chi_{\mathcal{F}}(\eta_p) = 1 \iff \eta_p = \vec{\mathcal{F}}_p$，

(3) $f \in I(M, g)$ より $vol(L_0) = vol(f(L_0))$,

(4) $f \simeq id_M$ より，$[L_0] = [f(L_0)] \in H_n(M; \mathbb{Z})$。

(2)～(4) は定義より明らか。また，(1) は Rummler [5] による。

よって，L_0, $f(L_0)$ を n-current (L_0), $(f(L_0))$ とみたとき，

定義より，$(L_0)(\chi_{\mathcal{F}}) \equiv \int_{L_0} \chi_{\mathcal{F}} = vol(L_0)$，

(2) より，$(f(L_0))(\chi_{\mathcal{F}}) \equiv \int_{f(L_0)} \chi_{\mathcal{F}} \leq vol(f(L_0))$。

(1), (4) によって $(L_0)(\chi_{\mathcal{F}}) = (f(L_0))(\chi_{\mathcal{F}})$ だから，

$$vol(L_0) = \int_{f(L_0)} \chi_{\mathcal{F}} \leq vol(f(L_0)).$$

(3) より，$\chi_{\mathcal{F}}(\overrightarrow{f(L_0)}) = 1$ a.e. on $f(L_0)$。

(2) より，$\overrightarrow{f(L_0)} = \vec{\mathcal{F}}$ on $f(L_0)$。

よって，$f(L_0) \in \mathcal{F}$ となる。 //

4. 以下，定理の証明を与える。

(定理Aの証明) φ_t を X の flow とするとき，命題によって，コンパクトな葉 L に対して，$\varphi_t(L)$ も $\mathcal{F}$ のコンパクトな葉となる。 よって，X がコンパクトな葉 L の一点で L に接すれば，X は L 上到る所で L に接する (cf. Corollary 2, [4])。

また，Xがコンパクトな葉L'にL'の一点で横断的なら，L'上到る所でXはL'に横断的になっている。

今、$L \subset C(\mathcal{F})$ で XはLに接し，$L' \subset C(\mathcal{F})$ でXはL'に横断的とすると，次のようにして矛盾が出る（cf. [2]）。

$\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ を $\gamma(0) \in L$，$\gamma(1) \in L'$ なるLとL'を結ぶM上の最短測地線とする。 $<\dot{\gamma}(1), X> > 0$ としてよい（< 0 なら $-X$ を考えればよい）。 $t > 0$ を十分小さくとると，$\varphi_t(\gamma)$は測地線であって $\varphi_t(\gamma(0)) \in L$ かつ $\varphi_t(\gamma(s)) \in L'$ がある $s < 1$ について成り立つ。 これはγがLとL'の間の最短測地線であることに反する。 //

（定理Bの証明） φ_tをXの flow とする。 $C(\mathcal{F})$ で、$\mathcal{F}$のすべてのコンパクトな葉の和を表わす。 以下，$C(\mathcal{F})$ がMに一致することを示す。

まず，$C(\mathcal{F})$ がMの開集合になることを示す。 Xがコンパクトな葉Lの一点で$\mathcal{F}$に横断的だから、定理Aによって，$C(\mathcal{F})$ のすべての点でXは$\mathcal{F}$に横断的。 各コンパクト葉$L \subset C(\mathcal{F})$ に対して、その適当な近傍はコンパクトな葉 $\varphi_t(L)$，$-\varepsilon < t < \varepsilon$，でおおわれるから，$C(\mathcal{F})$ は開集合となる。

次に，$M - C(\mathcal{F}) \neq \phi$ として矛盾を出す。 $A = M - C(\mathcal{F})$ とおくと上で示したことにより，Aは閉集合となる。 コン

パクトな葉Lに対して $\varphi_t(L)$ もコンパクトな葉となることから $\varphi_t(A)\subset A$ がわかる。Lをコンパクトな葉とすると，Aが閉集合でMが完備であることから，AとLを結ぶ最短測地線 $\gamma:[0,1]\longrightarrow M$ で $\gamma(0)\in A$，$\gamma(1)\in L$ なるものが存在する。$\langle\dot\gamma(1), X\rangle>0$ と仮定してよい。$t>0$ を十分小さくとると，$\varphi_t(\gamma)$ は $\varphi_t(\gamma(0))\in A$ なる測地線であり，しかも，Lとはその内点 $\varphi_t(\gamma(s))$，$s<1$ で交わる。これは，γ がAとLを結ぶ最短測地線であることに矛盾する。よって，$M=C(\mathcal{F})$ が示された。

定理Aによって，XはM上到る所 $\mathcal{F}$ に横断的であるから，各 $p\in M$ に対し，$\{\varphi_t(p)\,;\,t\in(-\infty,\infty)\}$ は $\mathcal{F}$ のすべての葉と交わる。よって，$\mathcal{F}$ のすべての葉は φ_t によってLへ等長的にうつされる。 #

（系の証明） X，YをM上のキリングベクトル場とする。もしXとYが $\mathcal{F}$ のある葉の上で一致すれば，$\mathcal{F}$ の余次元が1であることから，M上でXとYは一致する (Theorem 5.3 [3])。Lをコンパクトな葉とし，$p\in L$ において $X-cY\in T_pL$ がある定数cに対して成り立つとする。$X-cY$ はキリングベクトル場であるから，命題より，$X-cY$ はLに接する。定理Aによって，$X-cY$ は $C(\mathcal{F})$ 上で $\mathcal{F}$ に接する。従っ

て，上の不等式が成り立つ。

次に，等号が成り立っているとすると，コンパクトな葉Lとそれに横断的なキリングベクトル場Xが存在する。従って，定理Bにより $\mathcal{F}$ のすべての葉はコンパクトで，しかも等長的になっている。従って，等式は $\dim I_0(M, g) = \dim I_0(L, g/L) + 1$ となる。//

参考文献

[1] R. Harvey, H.B. Lawson, Calibrated foliations, Amer. J. of Math. 104 (1982), 607-633.

[2] D.L. Johnson, L.B. Whitt, Totally geodesic foliations, J. Differential Geom. 15 (1980), 225-235.

[3] S. Kobayashi, Transformation groups in differential geometry, Ergebnisse der Math., Band 70, Springer-Verlag. 1972.

[4] G. Oshikiri, Jacobi fields and the stability of leaves of codimension-one minimal foliations, Tôhoku Math. J. 34 (1982).

[5] H. Rummler, Quelques notions simples en géométrie riemannienne et leurs applications aux feuilletages compacts, Comment. Math. Helv. 54 (1979), 224-239