数理解析研究所講究録
第 479 巻 1983 年 93-105

Thurstonの例の葉層同境について

東大理　坪井　俊 (Takashi TSUBOI)

Godbillon-Vey不変量が連続的に変化することを示すためにThurstonにより構成された余次元1葉層構造を考える。ここでは、このような葉層構造が零に同境であるためには、Godbillon-Vey不変量が零であることが必要十分であることを示す。
以下、多様体は向きづけられており、滑らか、また葉層構造は横断的に向きづけられており、余次元1、滑らかであるとする。

§1.

n次元閉多様体上の余次元1葉層$(M_1^n, \mathcal{F}_1)$, $(M_2^n, \mathcal{F}_2)$は次のような$n+1$次元コンパクト多様体上の余次元1葉層$(W^{n+1}, \mathcal{F})$が存在するとき、同境であるという：$\partial W = M_1 \sqcup (-M_2)$, $\mathcal{F}$は∂Wに横断的であり、$\mathcal{F}|M_i = \mathcal{F}_i$ $(i = 1, 2)$。向きづけられているn次元閉多様体上の横断

的に向きづけられている余次元1の葉層構造の同境類の集合は合併に関し加法群となる。この群を$\mathcal{F}\Omega^{\infty}_{n,1}$と書く。

$n=1, 2$については$\mathcal{F}\Omega_{1,1}\cong\mathbb{Z}_2$, $\mathcal{F}\Omega_{2,1}\cong 0$が知られている。後者はMatherの定理、$H_1(\mathrm{Diff}^{\infty}_K R)=0$の帰結である。$n=3$に対し、次の定理がある。

定理(Thurston)。Godbillon-Vey不変量はR上への全射である。 $GV:\mathcal{F}\Omega^{\infty}_{3,1}\twoheadrightarrow R$。

§2.

GVの単射性は未解決の問題で、多くは知られていない。もっとも簡単な葉層構造の一つである、S^3のReeb葉層については、$GV=0$が示せるが、水谷-Sergeraertによって、零に同境であることが示されている。T^3の平面による葉層については、Hermanにより$GV=0$が知られているが、それらのすべてが零に同境であるかどうかは不明である。

以下、Thurstonの上記の定理について説明し、それらは、$GV=0$のとき零に同境であることを示す。

§3.

例をあげる前に、葉層S^1束の定義を述べる。N上の葉層S^1

束とは3つ組 $(M, N, \mathcal{F})$ で、$M \longrightarrow N$ は S^1 束であり、$\mathcal{F}$ は M 上の葉層でファイバーに横断的であるものをいう。N が連結ならば、葉層 S^1 束 $(M, N, \mathcal{F})$ は(全)ホロノミー準同型 $\varphi: \pi_1(N, *) \longrightarrow \mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$ を定める。逆に φ を決めれば、$(M, N, \mathcal{F})$ は定まる。こうして、N 上の葉層 S^1 束の同型類は N から $B\mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)_d$ への写像のホモトピー類と1対1に対応する。ここで、$B\mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)_d$ は Eilenberg-MacLane 空間、$K(\mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)_d, 1)$ である。

Mather の定理により、向きづけられた3次元閉多様体上の各葉層同境類は、葉層 S^1 束の葉層で代表されることが示せる。

§4.

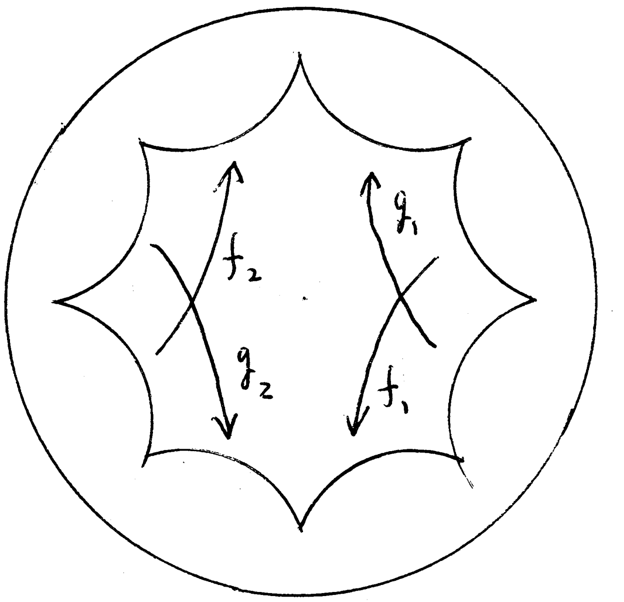
2次元多様体上の葉層 S^1 束に対しては、その GV 不変量を計算する公式をホロノミー準同型の言葉で書くことが出来る。しかし、現状では、GV を実際に計算出来るのは本質的には2通りの場合しかない。

第一には、ホロノミー準同型の像が可換になる場合で、この場合には $GV = 0$ が Herman により示されている。(前にあげた例が、この場合になっていて、そのとき注意したようにこういう葉層がすべて $\mathcal{F}\Omega_{3,1}^\infty$ の中で零かどうかはわかっていない。)

第二に、ホロノミー準同型の像が $PSL(2, R)$ に含まれる

場合である。$PSL(2,\mathbb{R})$ の双曲平面の無限遠円への作用により $PSL(2,\mathbb{R})$ を $\mathrm{Diff}^{\infty}_{+}(S^1)$ の部分群とみなす。この場合には、分類写像が $BPSL(2,\mathbb{R})_d \longrightarrow B\,\mathrm{Diff}^{\infty}_{+}(S^1)_d$ をファクターする。GV≠0となる例は次の様にして作ることができる。

双曲平面 H^2 上に各頂点の角の角度が $\pi/4$ となる正八角形を書く。開円板モデルでは、境界円周に直交する円周が測地線であるから、下図のようになる。そこで、f_1, g_1, f_2, g_2 を $PSL(2,\mathbb{R})$ の元で、下図のように辺を辺に、うつすものとする。



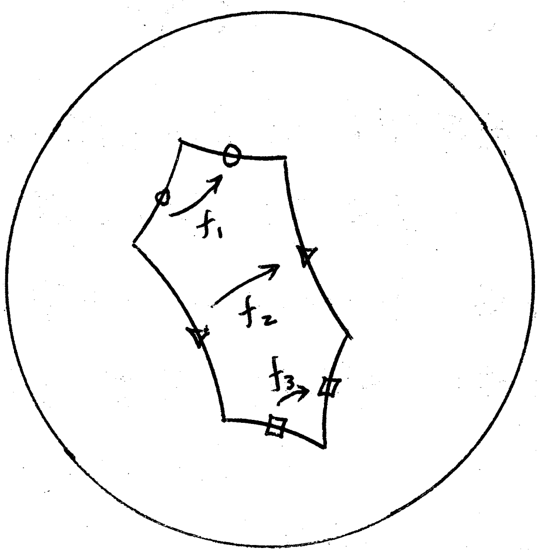
そうすると、$[f_2, g_2][f_1, g_1] = 1$ であることがわかる。よって種数2の向きづけられた閉曲面の基本群から、$PSL(2,\mathbb{R})$ への準同型が、よく知られた基本群の表現の生成元に f_1, g_1, f_2, g_2 を対応させることにより得られる。

これの Godbillon-Vey 不変量が零でないことが計算により確かめられる。Godbillon-Vey 不変量が自明でないことを示したRoussarie の例と呼ばれるものである。

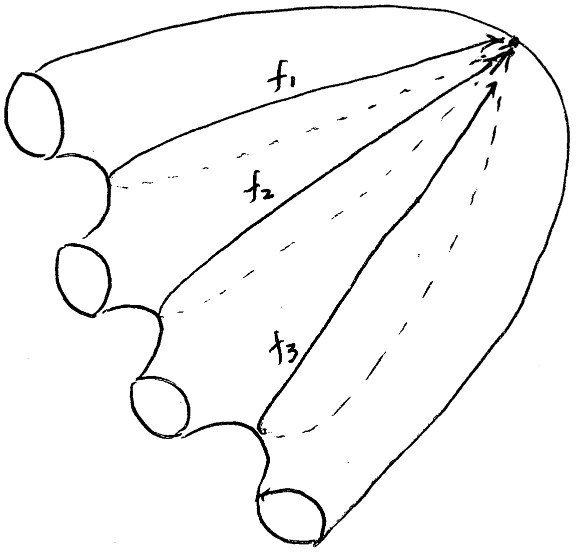
残念ながら、このような構成では Godbillon-Vey 不変量を連続的に変化させることはできない。というのは、もしも、ホロノミー準同型が $PSL(2,\mathbb{R})$ をファクターすると、Godbillon-Vey 類はEuler類の零でない定数倍になってしまうからである。

§5.

さて、Thurston の例は次の様に構成される。下の図の様な多角形を双曲平面に書く。ここで、同じ印の辺は同じ長さをもつとする。(辺の数は4以上の偶数ならばよいが、ここでは6にした。) f_1, f_2, f_3 を図のように、一つの辺を同じ印をつけた辺に写す $PSL(2,\mathbb{R})$ の元とする。



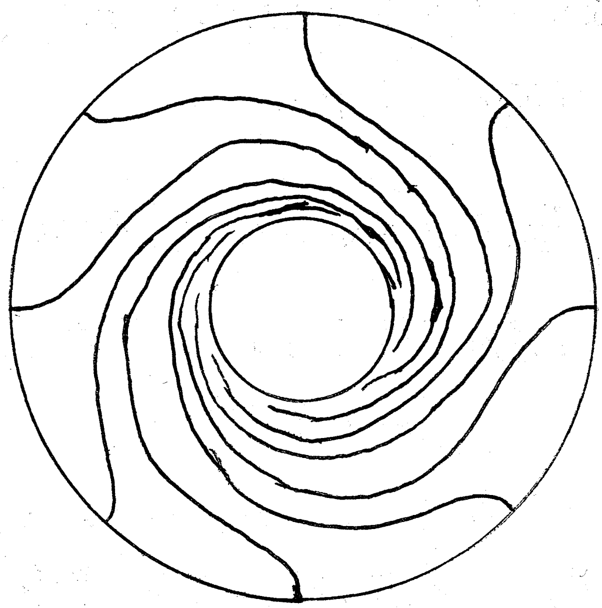
球面から4つの互いに交わらない開円板をのぞいた空間をSとかくと。Sの基本群は3元生成自由群である。ゆえに、この生成元にf_1, f_2, f_3を対応させて、Sの基本群から$PSL(2,\mathbb{R})$への準同型を得るが、ここで、Sの境界の連結成分に対応するホロノミーは、$PSL(2\mathbb{R})$の楕円型の元、すなわち回転に共役な元である。(f_1, $f_1f_2^{-1}$, $f_2f_3^{-1}$, f_3 が固定点をもっていることが容易に確かめられる。)



こうして、S上の葉層S^1束でその全空間の境界が2次元トーラスT^2で直線による葉層をもつものが得られる。

さて、開円環領域 A 上の次のような葉層構造をとる。回転により不変、外境界で横断的、内境界で平担。次の図の様なものになる。$A\times[0,1]$の $A\times\{0\}$ と $A\times\{1\}$ を回転により同一視した空間は、$A\times S^1$ 又は $T^2\times I$ に微分同相となるが、

$A\times[0,1]$の積葉層から定義されるこの空間の葉層は内側の境界で境界に平担に接し、外側の境界で境界に横断的で、直線的葉層を境界上に与えている。この内側の境界にReeb葉層をもった$D^2\times S^1$を貼って出来た葉層を、前につくったS上の葉層S^1束の全空間の境界に、貼って3次元閉多様体上の余次元1葉層を得る。(このような貼りあわせが出来るように$A\times\{0\}$と$A\times\{1\}$を貼る回転をうまくえらんでおく。)



この葉層のGodbillon-Vey不変量は、双曲平面上に書いた多角形の面積に比例することがわかる。この多角形を、辺の長さの関係をかえずに連続的に変形することにより、その面積すなわちGodbillon-Vey不変量を連続的に変えることが出来る。これが、Thurstonの構成である。

§6.

これまで述べた構成は次の構成の特別な場合である。

Nを境界∂Nをもつ2次元コンパクト多様体とする。

$f:(N,\partial N)\longrightarrow(BPSL(2,\mathbb{R})_d,\ BPSO(2)_d)$を連続写像とする。ここで$PSO(2)$は回転より成る部分群で、$BPSO(2)_d$は$BPSL(2,\mathbb{R})_d$の部分複体となる。この$f$は、境界上のホロノミーが回転となるような$N$上の葉層$S^1$束と対応しているから前節の構成により3次元閉多様体上の葉層が得られる。よって、次の写像が得られる。

$$\coprod \mathrm{Map}\left[(N,\partial N),(BPSL(2,\mathbb{R})_d,\ BPSO(2)_d)\right]\longrightarrow \mathcal{F}\Omega^{\infty}_{3,1}$$

ここでMapは連続写像全体のなす空間をあらわし、和$\coprod$はすべての向きづけられた2次元コンパクト多様体についてとる。一方この和集合から$(BPSL(2,\mathbb{R})_d,\ BPSO(2)_d)$の2次元ホモロジー群への写像が存在する。整数係数の2次元ホモロジー群は2次元ボルディズム群Ω_2と同型であることに注意しておく。

$$\coprod \mathrm{Map}\left[(N,\partial N),(BPSL(2,\mathbb{R})_d,\ BPSO(2)_d)\right]$$
$$\longrightarrow H_2(BPSL(2,\mathbb{R})_d,\ BPSO(2)_d;\mathbb{Z}).$$

そこで、このH_2が$\mathcal{F}\Omega^{\infty}_{3,1}$とどう関係しているかが問題となる。

§7.

紙面と労力の節約のため $G=PSL(2,\mathbb{R})_d$,（離散位相を d であらわした） $R=PSO(2)_d$ と書く。ここでは、$H_2(BG,BR)$ （$\mathbb{Z}$ 係数）を調べる。（BG,BR）のホモロジー完全系列を一部書いてみる。

$$H_2(BR)\to H_2(BG)\to H_2(BG,BR)\to H_1(BR)\to H_1(BG).$$

ここで $H_1(BG)=G/[G,G]=0$,

$H_1(BR)=R_1\cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ がわかる。

一方、代数的K理論において、$H_2(BG)$ はかなり調べられており、$H_2(BG)$ を Steinberg 記号と呼ばれる生成元とその間の関係式で書くことが出来る。Steinberg 記号により表わされる元がどのような2次元多様体からの写像で代表されるかを調べることにより次の補題を得る。

補題 (Sah-Wagoner). $H_2(BG)=X\oplus Y$. ここで、Y は次元が連続体濃度であるような $\mathbb{Q}$ ベクトル空間で、X は $\mathbb{Z}$ と同型である。さらに、射影 $H_2(BG)\longrightarrow X$ はオイラー類である：

補題。$H_2(BR) \longrightarrow H_2(BG)$ の像は Y に一致する。

これらの補題により、短完全系列

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & H_2(BG, BR) & \longrightarrow & R & \longrightarrow & 0 \\ & & \wr\Vert & & & & \wr\Vert & & \\ & & \mathbb{Z} & & & & \mathbb{R}/\mathbb{Z} & & \end{array}$$

を得る。これにより $H_2(BG, BR) \cong \mathbb{R}$ と予想されるが、実際、Milnor のアルゴリズムといわれる方法で、準同型 $g : H_2(BG, BR) \longrightarrow \mathbb{R}$ を構成でき、次の図式が可換であることがわかるので、g による同型が示される。

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_2(BG, BR) \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & R \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r] & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

§8.

上の補題からは次の様なこともすぐにわかる。

$PSL(2, \mathbb{R})$ にホロノミーをもつ向きづけられた閉曲面 N 上の葉層 S^1 束に対し、$\mathrm{Map}[N, BG]$ の元が対応するが、$\mathrm{Map}[N, BR]$ の $\mathcal{F}\Omega^{\infty}_{3,1}$ における像は零であるから、次の様に $\coprod \mathrm{Map}[N, BG] \longrightarrow \mathcal{F}\Omega^{\infty}_{3,1}$ の写像はファクター

する。ただし和$\coprod$はすべての向きづけられた閉多様体について とる。

$$
\begin{tikzcd}
\coprod \mathrm{map}[N, BG] \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}\Omega^{\infty}_{3,1} \\
H_2(BG) \arrow[r] & X \cong \mathbb{Z} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

このことは、Godbillon-Vey類がEuler類に比例することをよく説明している。さらに、このような葉層に対しては、そのGodbillon-Vey不変量が零であれば零に同境であることを意味している。

§9. (この節は第6節につながっている。)

第6節で定式化したThurstonの例について考える。写像、
$\coprod \mathrm{map}[(N,\partial N),(BG,BR)] \longrightarrow \mathcal{F}\Omega^{\infty}_{3,1}$ が、$H_2(BG,BR)$ をファクターすることを示す。

$f:(N,\partial N)\longrightarrow(BG,BR)$ が $H_2(BG,BR)=\Omega_2(BG,BR)$ の零を代表しているとする。このとき、fにより第6節の方法で定義される葉層が零に同境であることを示したい。このようなfに対し、向きづけられたコンパクト3次元多様体Wと連続写像 $h:W\longrightarrow BG$ で次をみたすものが存在する。
$\partial W = N^2 \underset{\partial N=\partial V}{\cup} V^2$, $h(V) \subset BR_1$, $h|(N,\partial N)=f$.

$h|\partial W$ は $H_2(BG)$ で零を代表しているから $h|\partial W$：$\partial W \longrightarrow BG$ に対応する葉層 S^1 束の葉層は $\mathcal{F}\Omega_{3,1}^{\infty}$ では零である。そこで、f と $h|\partial W$ で定まる葉層の「差」を考えると、これは、$h|(V, \partial V) : (V, \partial V) \longrightarrow BR$ により定まる葉層であることがわかる。しかしこれは、非常に簡単な形をしたほとんどホロノミーをもたない葉層で、水谷－森田－坪井の結果により、零に同境である。

これにより、次の図式を可換にする写像 $t : H_2(BG, BR) \longrightarrow \mathcal{F}\Omega_{3,1}^{\infty}$ が得られた。

$$\begin{array}{ccc} \coprod \mathrm{Map}[(N, \partial N), (BG, BR)] & \longrightarrow & \mathcal{F}\Omega_{3,1}^{\infty} \\ \downarrow & \nearrow_{t} & \\ H_2(BG, BR) & & \end{array}$$

この t が準同型であることは容易にわかる。

§10.

一方、t の像に入るような $\mathcal{F}\Omega_{3,1}^{\infty}$ の元に対しては、その Godbillon-Vey 不変量を計算することが出来る。これは、第7節の同型 g を用いて次のように書かれる。

補題 $GV \circ t = \mathrm{const.}\ g$.

これにより次の定理が証明される。これは、Thurstonの例の葉層のGodbillon-Vey不変量が零ならば、この葉層は零に同境であることを言っている。

定理　$GV \circ t(x) = 0 \Longrightarrow t(x) = 0.$

文献は次の文献を参照して下さい。

T. TSUBOI : *Foliated cobordism classes of certain foliated S^1-bundles over surfaces.*

付録.　γを構成するMilnorのアルゴリズムとは次のものです。$x \in H_2(BG, BR)$はBRが連結だから種数gの曲面から小円板をぬいた$(\Sigma_g - \mathring{D}^2, \partial)$からの写像で代表される。これは準同型$\varphi : \pi_1(\Sigma_g - \mathring{D}^2) \longrightarrow G$で$\varphi[\partial] \in R$となるものである。$\pi_1(\Sigma_g - \mathring{D}^2)$の生成元$a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g$を$[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = \partial$となるようにとる。一方，$(G, R)$に普通の位相を入れ普遍被覆$(\widetilde{G}, \widetilde{R})$をとる。$\varphi(a_i), \varphi(b_i)$の$\widetilde{G}$へのリフト$f_i, h_i$をとり$(i=1, \cdots, g)$ $[f_1, h_1] \cdots [f_g, h_g]$をつくるとこれが$\widetilde{R} \cong \mathbb{R}$の元となり、$x$のみで定まる。これを$\gamma(x)$とかく