

## Cantwell-Conlon の Generalized Reeb Stability の別証と高次元への拡張

千葉大教養 稲葉尚志 (Takashi Inaba)

余次元 1 の  $C^2$  級葉層構造における真葉の安定性について考察し、Cantwell-Conlon の 2 次元の結果を一般次元に拡張する。以下断わりのない限り  $(C^r)$  葉層構造といえは、 $C^\infty$  葉をもつ横断的向付可能な余次元 1  $(C^r)$  葉層構造のこととする。 ( $0 \leq r \leq \infty$ )

### §1 定義と今迄の結果

1.1 定義  $\mathcal{F}$  を閉  $C^\infty$  多様体  $M$  上の葉層構造とし、各点で  $\mathcal{F}$  に横断的な  $M$  上の次元 1 の葉層構造  $\mathcal{J}$  を 1 つ固定する。 $\mathcal{F}$  の真葉  $L$  が 安定 であるとは、 $L$  の近傍  $N$  と葉層保存同相  $\varphi$  :

$(L \times D^1, \{L \times \{t\}\}_{t \in D^1}, \{\{x\} \times D^1\}_{x \in L}) \rightarrow (N, \mathcal{F}|_N, \mathcal{J}|_N)$   
が存在して、 $\varphi|_{L \times \{0\}} = \text{id}_L$  を満たすことをいう。

1.2 定義  $L$  を境界のない  $C^\infty$  多様体とする。 $L$  が  $C^r$  安定性 をもつとは、 $L$  が閉  $C^\infty$  多様体上の  $C^r$  葉層構造の真葉として実現されていればいつでも定義 1.1 の意味で安定であることを

いう。

真葉の安定性問題の最終目標は、 $L$ が $C^r$ 安定性をもつ為の必要十分条件を $L$ の位相の言葉で表わすことにある。

$L$ が開多様体(=コンパクト葉)の場合には、この問題は Thurston [T] によってほぼ完全に解決されている: 即ち  $L$ が  $C^r$  ( $r \geq 0$ ) 安定性をもつ為には  $H^1(L; \mathbb{R}) = 0$  が必要であり、 $r \geq 1$  なら十分でもある。(  $r = 0$  の時のみ未解決。部分的結果が Plante [P, §8] にある。)

ところが  $L$ が開多様体の場合には、今迄に知られている事は極めて少なく、 $\mathbb{R}^2$ が $C^0$ 安定性をもつ事 [I1] と、 $S^1 \times \mathbb{R}$ が $C^1$ 安定性をもたない事 [Pi] 位であった。最近 Cantwell-Conlon [C-C2] が、ジータス  $O$  で <sup>エンド</sup>端集合が有限型の曲面は $C^2$ 安定性をもつことを示した。これにより、コンパクトの場合と異なり、開多様体の場合には  $C^1$  と  $C^2$  の間に差のあることが判明した。

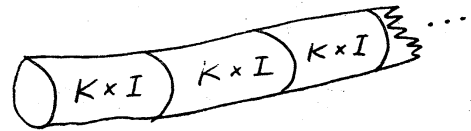
## §2 得られた結果

$W$  を葉  $L$  の部分集合とする時、 $W$  に対する 安定 の定義は、定義 1.1 をそのまま拡張して得られる。

2.1 定義  $M$ ,  $\mathcal{F}$  は定義 1.1 の通りとし、 $L$  を  $\mathcal{F}$  の葉、 $e$  を  $L$  の端(エンド)とする。 $e$  が 安定 とは、 $e$  のある近傍  $W$  が安定であることをいう。

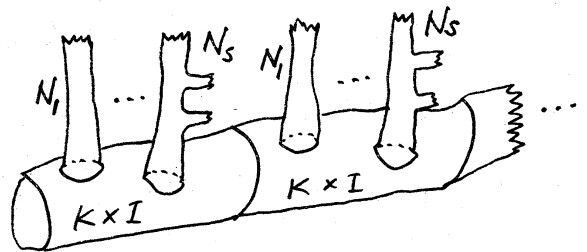
注) 端に関する諸定義については [I2] を参照されたい。

端の族  $\mathcal{E}$  を次の様に帰納的に定義する。  $\mathcal{E} = \bigsqcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{E}_k$  であり、  
 $e \in \mathcal{E}_0$  とは、 $e$  が  $K \times I$  を周期にもつ周期端である事とする。



但し、 $K$  はその基本群が収じれ元を法として  $\mathbb{Z}$  が  $\{1\}$  であるような連結閉多様体である。(簡単の為、以下、下線部の性質を  $(*)$  で表わす。)

$\mathcal{E}_{k-1}$  まで定義されたとする。  $e \in \mathcal{E}_k$  とは、 $e$  が次の様にして構成される時にいう。  $K$  は  $(*)$  を満たす多様体であり、 $B_1, \dots, B_s$  は  $K \times \text{Int} I$  の互いに交わらないコンパクト余次元 0 部分多様体であって、 $\partial B_i$



$(i=1, \dots, s)$  が  $(*)$  を満たすものとする。更に  $N_i$  ( $i=1, \dots, s$ ) を、ある端

$e_i \in \mathcal{E}_{k_i}$  ( $0 \leq k_i \leq k-1$  かつ  $1 \leq \exists i \leq s$  s.t.  $k_i = k-1$ ) の周期近傍であり、 $\partial N_i = \partial B_i$  (diffeo) を満たすものとする。  
 このとき  $e$  は  $(K \times I - \bigcup_{i=1}^s B_i) \cup_{\cup} (\bigcup_{i=1}^s N_i)$  を周期にもつ周期端である。

本稿の主結果は次である。

2.2 定理  $L$  を閉多様体上の余次元 1  $C^2$  葉層構造の真葉とし、 $e$  を  $L$  の端であって  $\mathcal{E}$  に属するものとするれば、 $e$  は安定である。

この定理から高次元開多様体の安定性に関する結果が直ちに得られる。即ち

2.3 定理  $L$  を閉多様体上の余次元 1  $C^2$  葉層構造の真葉とし、その端は全て  $\mathcal{E}$  に属するとする。このとき  $L$  のホロノミー群が自明であれば、 $L$  は安定である。

2.4 定理  $L$  は開多様体であり、その端は全て  $\mathcal{E}$  に属するとし、更に  $L$  の核 (=  $L$  から全ての端の周期近傍を取り去った残りのコンパクトな部分)  $N$  が  $K^1(N, \partial N; \mathbb{R}) = 0$  を満たすとする。このとき  $L$  は  $C^2$  安定性をもつ。

但し、 $K^1(N, \partial N; \mathbb{R}) = \text{Ker}(i^*: H^1(N; \mathbb{R}) \rightarrow H^1(\partial N; \mathbb{R}))$

注) ジーナス 0 で端集合が有限型の曲面は定理 2.4 の仮定を満たすので、定理 2.4 は Cantwell-Conlon の定理の高次元化となっている。しかも、その証明は、2次元特有の性質を使う彼らの方法とは異なる新証明である。

端の族  $\mathcal{E}$  の定義の際、性質 (\*) の中に基本群に関する条件があったが、この条件は外すことができない。実際、例えば

2.5 命題  $T^2 \times \mathbb{R}$  は  $C^2$  安定性をもたない。

## §3 準備

$M$  を  $n$  次元閉  $C^\infty$  多様体とし、 $\mathcal{F}$  を  $M$  上の葉層構造とする。 $\mathcal{F}$  に横断的な次元 1 の葉層構造  $\mathcal{J}$  を固定する。 $M$  上の 葉層座標近傍  $(W, \varphi)$  とは、 $M$  の部分集合  $W$  と葉層保存微分同相  $\varphi: (W, \mathcal{F}|_W, \mathcal{J}|_W) \rightarrow (D^{n-1} \times D^1, \{D^{n-1} \times \{x\}\}_{x \in D^1}, \{\{x\} \times D^1\}_{x \in D^{n-1}})$  の対である。

今、葉層座標近傍による  $M$  の有限被覆  $\{(W_i, \varphi_i)\}_{i=1}^m$  で、次の条件を満たすものを固定する。

- i)  $\{\text{Int } W_i\}_{i=1}^m$  は  $M$  の開被覆。
- ii)  $W_i \cap W_j \neq \emptyset$  ならば、ある葉層座標近傍  $(W, \varphi)$  が存在して、 $W_i \cup W_j \subset \text{Int } W$ 。

この時、 $\varphi_i^{-1}(D^{n-1} \times \{x\})$  を 切片 という。切片鎖とは切片の有限列  $\{P_0, P_1, \dots, P_k\}$  で  $P_{i-1} \cap P_i \neq \emptyset$  ( $i=1, \dots, k$ ) を満たすものをいう。切片輪体とは切片鎖で  $P_k = P_0$  のものをいう。切片鎖 (resp. 切片輪体) が 単純 とは、 $P_i \neq P_j$  ( $i \neq j$ ) (resp.  $P_i \neq P_j$  ( $i \leq j \leq k$ )) の事をいう。切片鎖間には次の様な演算が定義される:  $\mathcal{P} = \{P_0, \dots, P_k\}$ ,  $\mathcal{Q} = \{Q_0, \dots, Q_\ell\}$ ,  $P_k = Q_0$  のとき、 $\mathcal{Q} * \mathcal{P} = \{P_0, \dots, P_k (= Q_0), \dots, Q_\ell\}$ ,  $\mathcal{P}^{-1} = \{P_k, \dots, P_0\}$ 。基本輪体とは、切片輪体であって、 $\mathcal{P}^{-1} * \mathcal{Q} * \mathcal{P}$  の形をしてゐるものをいう。但し  $\mathcal{Q}$  は単純輪体、 $\mathcal{P}$  は単純鎖である。

切片鎖間のホモトピーの概念も定義される ([Ta] 参照)。被覆  $\{(W_i, \varphi_i)\}$  を良くとれば (例えば、各切片が  $M$  のあるリーマン計量から導かれる計量に関して葉の中で測地的凸であるようにとる)、各葉上、切片輪体のホモトピー類のなす群と、普通の意味の基本群とが同型になる。以下被覆はそのようにとってあるものとする。

切片鎖  $P = \{P_0, \dots, P_k\}$ ,  $Q = \{Q_0, \dots, Q_l\}$  に対し、 $Q$  が  $P$  の 部分鎖 であるとは、順序保存単射  $\lambda: \{0, \dots, l\} \rightarrow \{0, \dots, k\}$  が存在して  $Q_i = P_{\lambda(i)}$  ( $i = 0, \dots, l$ ) となる事をいう。同様に、部分輪体 の概念は、円順序保存単射の存在で定義する。次の補題は自明であろう。

3.1 補題 (単純鎖補題) 2切片  $P$  と  $P'$  を結ぶ任意の切片鎖は、 $P$  と  $P'$  を結ぶ単純部分鎖をもつ。

3.2 補題 (単純輪体補題) 零ホモトープでない任意の切片輪体は、零ホモトープでない単純部分輪体をもつ。

#### §4 Hector の一様収束定理

この節では、定理の証明の重要な道具となる Hector の結果を解説する。

$\mathcal{F}$  を閉多様体  $M$  上の  $C^2$  葉層構造とし、 $L$  を  $\mathcal{F}$  の真葉とする。 $U$  を、 $M - L$  の連結成分であって (横断的向きに関する)  $L$

の正の側を含むものとし、 $\hat{U}$ を ( $M$ の任意のリーマン計量から導かれた  $U$ のリーマン計量により定まる距離に関する)  $U$ の完備化とすると、Dippolito [D]により、 $\hat{U} = K \cup A$ と分解される。ここに  $K$ はコンパクト集合であり、 $A$ の各連結成分  $A_i$  ( $i=1, \dots, s$ )は葉層  $I$ -束である。 $K$ を  $\hat{U}$ の核、各  $A_i$ を  $\hat{U}$ の腕と呼ぶ。 $\hat{U}$ の1つの連結成分は  $L$ と同一視できることに注意し、 $L$ と交わる各腕の全ホロノミー準同型を

$$\Phi: \pi_1(L \cap A_i, x_i) \rightarrow \text{Diff}_+^2 I$$

で表わす。(  $x_i$ は基点で、切片  $P_0$ に属するとする。)

4.1 定理 (Hectorの一樣収束定理)  $P_n^{-1} * Q_n * P_n$ を、 $L \cap A_i$ の中の、切片  $P_0$ を基点とする基本輪体とし、 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(P_0, Q_n) = \infty$ とする。(  $d$ は  $M$ のリーマン計量から導かれた  $L$ のリーマン計量により定まる距離) この時  $\Phi(P_n^{-1} * Q_n * P_n)$ は恒等写像に一樣収束する。

Hectorの論文[H]は未発表未完成なので、以下に証明を与えておく。

$R_i = \varphi_i^{-1}(\{0\} \times \hat{D}^1)$ ,  $R = \bigsqcup_{i=1}^m R_i$ とし、適当な向体存埋込みにより  $R$ を  $\mathbb{R}$ の部分集合と見做す。 $\gamma_{ij}: (R_j \text{の一部}) \rightarrow (R_i \text{の一部})$ をホロノミー変換とし、 $\Gamma_0 = \{\gamma_{ij}\}_{i,j=1, \dots, m}$ とする。 $\Gamma_0$ によって生成される  $R$ 上の擬群  $\Gamma$ を予のホロノミー擬群という。

切片鎖  $\mathcal{P}$  は  $\Gamma$  の元を定めるが、これも  $\Phi(\mathcal{P})$  と書く事にする。

$R$  はコンパクトだから、正数  $A, B$  が存在して、任意の  $i, j$  と任意の  $t \in \text{Dom } \gamma_{ij}$  に対して

$$D\gamma_{ij}(t) \geq A, \quad |D^2\gamma_{ij}(t)| \leq B$$

となる。このとき次が成り立つ。

4.2 補題 (Denjoy の不等式)  $f \in \Gamma, J = \text{Dom } f, f = f_k \circ \dots \circ f_1$  ( $f_i \in \Gamma_0$ ),  $z, w \in J$  ならば

$$\left| \log \frac{Df(z)}{Df(w)} \right| \leq \frac{B}{A} \sum_{i=0}^{k-1} |z_i - w_i|$$

但し、 $z_i = f_i \circ \dots \circ f_1(z), z_0 = z, w_i$  についても同様。

4.3 系  $\left| \log \frac{Df(z)}{Df(w)} \right| \leq \frac{B}{A} \sum_{i=0}^{k-1} |J_i|$

但し、 $J_i = f_i \circ \dots \circ f_1(J), J_0 = J, |J_i|$  は  $J_i$  の長さ。

4.4 系  $f(J) = J$  ならば

$$\left| \log Df(z) \right| \leq \frac{B}{A} \sum_{i=0}^{k-1} |J_i|$$

これらの証明については、例えば [C-C 1] を参照のこと。

Hector の一様収束定理の証明

[\*1段]  $\theta = \frac{3BIRI}{A}, \Phi(P_n^{-1} * Q_n * P_n) = h_n, \Phi(P_n) = g_n,$

$\Phi(Q_n) = f_n, I = \text{Dom } g_n, J_n = g_n(I), f_n = f_n^{(k_n)} \circ \dots \circ f_n^{(1)}$

( $f_n^{(i)} \in \Gamma_0$ ),  $g_n = g_n^{(l_n)} \circ \dots \circ g_n^{(1)}$  ( $g_n^{(i)} \in \Gamma_0$ ),  $J_n^{(i)} = f_n^{(i)} \circ \dots \circ f_n^{(1)}(J_n)$



とおく。(4.4)より

$$|\log D(f_n^j)(z)| = \left| \sum_{l=1}^j \log Df_n(f_n^{l-1}(z)) \right| \leq j \frac{B}{A} \sum_{i=0}^{k_n-1} |J_n^{(i)}|$$

$\mathcal{Q}_n$ は単純ゆえ、 $J_n^{(i)} (\subset R)$ たちは互いに交わらない。よって、

$|R| < \infty$ に注意すれば、 $d(P_0, \mathcal{Q}_n) \rightarrow \infty$ の仮定から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{k_n-1} |J_n^{(i)}| = 0$$

そこで、 $\delta_n = \text{Max} \left\{ j \mid j \frac{B}{A} \sum_{i=0}^{k_n-1} |J_n^{(i)}| \leq \frac{\theta}{2} \right\}$ とおくと

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \infty$$

$$|\log Df_n^j(z)| \leq \frac{\theta}{2} \quad (\forall z \in J_n, 1 \leq j \leq \delta_n)$$

$h_n^j = g_n^{-1} f_n^j g_n$ だから、 $1 \leq j \leq \delta_n$ に対し

$$\begin{aligned} |\log Dh_n^j(x)| &\leq \left| \log \frac{Dg_n(x)}{Dg_n(h_n^j(x))} \right| + |\log Df_n^j(g_n(x))| \\ &\leq \frac{B}{A} \sum_{i=0}^{k_n-1} |K_n^{(i)}| + \frac{\theta}{2} \quad \left( \because (4.3) \text{ と上の式より。但し} \right. \\ &\leq \frac{\theta}{3} + \frac{\theta}{2} \quad \left( \because P_n \text{ は単純ゆえ} \right. \\ &\leq \theta \quad \left. \sum_{i=0}^{k_n-1} |K_n^{(i)}| \leq |R| \right) \end{aligned}$$

従って  $|\log Dh_n^j(x)| \leq \theta \quad (1 \leq j \leq \delta_n) \dots \star$

[オ2段]  $h_n$ がidに各点収束することを示す。背理法を用いる。今もしも、ある $\hat{x} \in I$ が存在して  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(\hat{x}) \neq \hat{x}$ とする。必要なら部分列をとり、また $h_n$ を $h_n^{-1}$ にとりかえることにより、ある正数 $\eta$ が存在して、すべての自然数 $n$ に対して

$$\hat{x} - h_n(\hat{x}) > \eta$$

としてよい。そこで  $K = [\hat{x} - \eta, \hat{x}]$ とおくと、 $\{h_n^k(K)\}_{k \in \mathbb{N}}$

は互いに交わらないから、特に

$$\sum_{k=1}^{g_n} |h_n^k(K)| < |I|.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \infty$  だから、任意の正数  $\varepsilon$  に対して、ある自然数  $N$  が存在して、

$$n \geq N \Rightarrow 1 \leq k \leq g_n \text{ s.t. } |h_n^k(K)| < \varepsilon$$

となる。今  $\varepsilon = e^{-\theta} |K|$  とすると結論の式は

$$\frac{|h_n^k(K)|}{|K|} < e^{-\theta}$$

と書けるが、これに平均値定理を使うと

$$\exists \xi \in I \text{ s.t. } Dh_n^k(\xi) < e^{-\theta}$$

を得る。これは  $\star$  1 段の  $\star$  に矛盾する。よって証明された。

[ $\star$  3 段]  $h_n$  は、 $\star$  により、 $n$  に関係なくその微分が一樣に  $e^\theta$  で押えられているから、 $I$  上各点収束すれば、一樣収束する。証明終わり。

## §5 定理の証明

(2.2) の証明  $e \in E_k$  とし、 $k$  に関する帰納法で証明する。 $e$  の定義中に現われる周期近傍  $V$  を、 $L$  のある腕に含まれるよう十分小さくとり固定する。 $P_0$  を  $V$  に含まれる切片とし、 $x_0$  を  $P_0$  の点とする。

まず  $k=0$  の場合を扱う。この時  $V$  は  $K \times [0, \infty)$  と微分同

相である。 $V$ が安定であることをいうには、全ホロノミー準同型重:  $\pi(V, x_0) \rightarrow \text{Diff}_+^2 I$  が自明であることを示せばよい。仮定より  $\pi(V, x_0) \cong \pi(K)$  は、ねじれ元を法として、 $\mathbb{Z}$ か $\{1\}$ に同型であるが、 $\text{Diff}_+^2 I$ はねじれ元を持たないので結局ねじれ元は無視してよい。また  $\pi(K) = \{1\}$ の時は、結論は明白である。従って以下は  $\pi(K) \cong \mathbb{Z}$ の場合を考える。

まず、 $V$ 上の零ホモトープでないループの列  $\{l_n\}$  を  $d(x_0, l_n) \geq n$  なるようにとり、それを被覆する任意の切片輪体を  $P_n$  とすれば

$$1) P_n \neq 0 \text{ in } V$$

$$2) d(P_0, P_n) \rightarrow \infty \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)}$$

を満たしている。これに単純輪体補題(3.2)を用いれば、各  $n$  に対して、 $P_n$ の単純部分輪体  $Q_n$  が存在して再び上の性質1) 2)を満たす。 $P_0$ と、 $Q_n$ の1つの切片  $Q_n^{(0)}$ を結ぶ切片鎖を任意にとり、単純鎖補題を用いて単純鎖に直したものを  $R_n$  とする。すると  $\{R_n^{-1} * Q_n * R_n\}$  は  $P_0$ を基点とする基本輪体の列で、 $L$ のある腕に含まれており、しかも  $d(P_0, Q_n) \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ) だから Hector の一様収束定理より、重  $(R_n^{-1} * Q_n * R_n)$  は恒等写像に一様収束する。

ところで今、 $\pi(V, x_0)$ は  $\mathbb{Z}$ と同型と仮定しているから、その生成元を  $\alpha$  とおくと、各  $n$  に対して  $0$  でない整数  $k_n$  が存在

して、 $\mathcal{R}_n^{-1} * \mathcal{Q}_n * \mathcal{R}_n$  のホモトピー一類は  $\alpha^{k_n}$  と書ける。  $f = \overline{\alpha}$  と書けば、 $\overline{\alpha}(\mathcal{R}_n^{-1} * \mathcal{Q}_n * \mathcal{R}_n) = f^{k_n} \rightarrow \text{id} (n \rightarrow \infty)$ 。一般に  $g \in \text{Diff}_+ I$  に対し  $\|g\| \equiv \max_{x \in I} |g(x) - x|$  とおくと

$$0 \leq \|f\| \leq \|f^{k_n}\| \rightarrow 0$$

よって  $\|f\| = 0$ ，即ち  $f = \text{id}$  である。従って  $\overline{\alpha}$  は  $W$  上自明写像である。

次に  $E_{k-1}$  の端に対しては既に証明されたとして、 $e \in E_k$  の場合を考える。 $\pi(V, x_0)$  の部分群  $H$  を、次の集合を含む最小の正規部分群として定義する：

$$\left\{ [P^{-1} * Q * P] \left| \begin{array}{l} W \subset V \text{ は } E_i (i < k) \text{ に属する } V \text{ の端の周} \\ \text{期近傍} \\ Q \text{ は } W \text{ に含まれる切片輪体} \\ P \text{ は } P_0 \text{ と } Q \text{ を結ぶ切片鎖} \end{array} \right. \right\}$$

但し  $[ \ ]$  はホモトピー一類を表わす。

$k=0$  のときと同様の方法で、次の 1) 2) を満たす単純輪体の列  $\{Q_n\}$  が  $V$  上にとれる。

$$1) [Q_n] \neq 0 \in \pi_1(V, x_0)/H \cong \mathbb{Z}$$

$$2) d(P_0, Q_n) \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$$

帰納法の仮定から全ホロノミーは  $H$  上自明であることに注意すれば、 $\overline{\alpha}: \pi_1(V, x_0) \rightarrow \text{Diff}_+^2 I$  は  $\pi_1(V, x_0)/H \cong \mathbb{Z}$  を經由するから、 $k=0$  の場合と同じ議論を用いて  $V$  が安定であることが示される。証明終わり。

(2.3) の証明 各端の周期近傍は (2.2) により安定である。残りのコンパクトな部分は、古典的 Reeb 安定性定理を使えば、ホロノミー群が自明の仮定より、安定である。よって  $L$  は安定である。

(2.4) の証明 各端の周期近傍は (2.2) により安定である。このことから  $\partial N$  上ホロノミー群が自明であることがわかる。この事実と  $K^1(N, \partial N; \mathbb{R}) = 0$  の仮定から、"Thurston による一般化 Reeb 安定性定理" の "相対版" により  $N$  が安定であることが示される。よって  $L$  は安定である。

## §6 $T^2 \times \mathbb{R}$ の非安定性

この節では、(2.5) を示す為に、閉多様体上の  $C^2$  葉層構造で、 $T^2 \times \mathbb{R}$  を非安定な真葉としてもつものを構成する。

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  とし、 $\lambda$  を  $A$  の 1 より小なる固有値とする。  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

を  $\lambda$  に対する  $A$  の固有ベクトルとする。  $c$  を  $\lambda < c < 1$  を満たす数とする。  $\mathcal{C}$  は  $[0, 1]$  上の  $C^\infty$  ベクトル場で、その台が  $[c, 1]$  であるものとし、 $\mathcal{G}_t (t \in \mathbb{R})$  をその生成する流れとする。同相写像  $f: [0, 1] \rightarrow [0, c]$ ,  $g_1, g_2: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  を

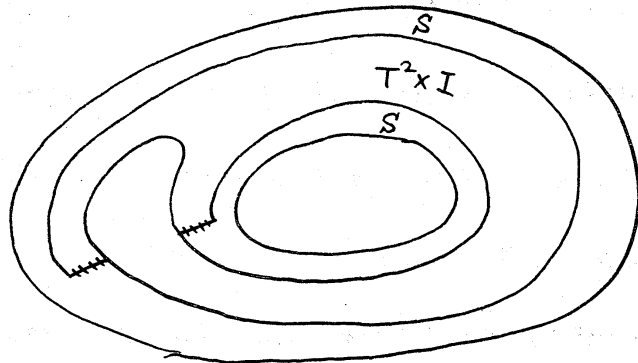
$$f(x) = cx$$

$$g_1(x) = \prod_{n=0}^{\infty} f^n \varphi_{a\lambda^n} f^{-n}(x)$$

$$g_2(x) = \prod_{n=0}^{\infty} f^n \varphi_{b\lambda^n} f^{-n}(x)$$

で定義すると、簡単な計算によりこれらは  $C^2$  級微分同相であることがわかる。

いま、 $E_A$  を  $S^1$  上の  $T^2$  束で、そのモノドロミーが  $A$  であるものとし、 $f, g_1, g_2$  で well-defined に決まる  $E_A$  上の irregular staircase を  $(S, \mathcal{F}_S)$  と書く。(staircase の定義については [N] 参照)  $(S, \mathcal{F}_S)$  のコピー 2 つと  $(T^2 \times I, \mathcal{F}_S|_{W(S)} \times I)$  を下図のように貼り合わせる。(2次元 Reeb 成分の構成と同じ)



結果として  $E_A \times I$  上の  $C^2$  葉層構造子で、 $T^2 \times \mathbb{R}$  を非安定な真葉として持つものが得られる。(弓の谷の境界を通る葉がそれである。) 最後にこのダブルをとれば閉多様体となり我々の目的は達成される。証明終わり。

### 参考文献

[C-C1] J. Cantwell and L. Conlon, Poincaré-Bendixson

- theory for leaves of codimension one, *Trans. Amer. Math. Soc.* 265 (1981), 181 - 209.
- [C-C 2] J. Cantwell and L. Conlon, Reeb stability for noncompact leaves in foliated 3-manifolds, *Proc. Amer. Math. Soc.* 83 (1981), 408 - 410.
- [D] P. Dippolito, Codimension one foliations of closed manifolds, *Ann. of Math.* 107 (1978), 403 - 453.
- [H] G. Hector, preprint.
- [I 1] T. Inaba, On stability of proper leaves of codimension one foliations, *J. Math. Soc. Japan* 29 (1977), 771 - 778.
- [I 2] T. Inaba, Reeb stability for noncompact leaves, to appear.
- [N] T. Nishimori, Ends of leaves of codimension-one foliations, *Tôhoku Math. J.* 31 (1979), 1 - 22.
- [P] J. Plante, Foliations with measure preserving holonomy, *Ann. of Math.* 102 (1975), 327 - 361.
- [Pi] D. Pixton, Nonsmoothable, unstable group actions, *Trans. Amer. Math. Soc.* 229 (1977), 259 - 268.
- [T] W. Thurston, A generalization of the Reeb Stability Theorem, *Topology* 13 (1974), 347 - 352.
- [Ta] I. Tamura, 葉層のトポロジー, 岩波書店, 1976