数理解析研究所講究録
第479巻 1983年 121-133

Foliation 上の Dynamical System

東大 理　田村 一郎
(Itiro TAMURA)

多様体Mに零点のない C^r ベクトル場 X $(r \geqq 1)$ が与えられたとき，Xの軌道はMの1次元 C^r 葉層$\mathcal{F}$ をなす。Mが閉じた2次元多様体ならば M はトーラス T^2 であって，この場合の$\mathcal{F}$の構造は具体的に知られている。しかし，Mが3次元以上の場合には，閉多様体であっても，$\mathcal{F}$したがってそれを定めるXを具体性をもってとらえることはむずかしい。

以下，M^3を閉じた3次元 C^∞ 多様体とし，XをM^3上の零点のない C^r ベクトル場 $(r \geqq 2)$，$\mathcal{F}$をXの軌道のなす1次元 C^r 葉層とする。

XをM^3上に幾何学的な議論が行える形で与えるには，どのような方法がありうるであろうか？　最も簡単なものとして，M^3 が閉曲面上の S^1 バンドルの全空間であって，$\mathcal{F}$の葉がファイバーの場合がある。このように$\mathcal{F}$そのものがはっきりと定められているときに，Milnor-Wood [1] は

$\mathcal{F}$に横断的なM^3の余次元1のC^r葉層$\mathcal{F}'$の存在を研究している。一般に，$\mathcal{F}$と$\mathcal{F}'$をM^3の1次元および余次元1のC^r葉層とするとき，$\mathcal{F}$と$\mathcal{F}'$が横断的であるとは，M^3の各点xにおいてxを通る$\mathcal{F}$の葉と$\mathcal{F}'$の葉のxにおける接ベクトルによって，xにおけるM^3の接ベクトル空間が生成されることである。閉曲面上のS^1バンドルの場合，$\mathcal{F}'$の存在は閉曲面とS^1バンドルのEuler数によって定められる。このことを逆に見れば$\mathcal{F}'$の存在がバンドルのEuler数を規制しているということである。

バンドルのEuler類はもっとも古典的な特性類として極めて重要な意味をもつ。M^3におけるC^r葉層$\mathcal{F}$を上述のS^1バンドルのファイバーの集合の一般化と考えて，$\mathcal{F}$に対してEuler類を拡張することが出来ればそれは数学的内容のあるものになるであろう。しかし，一般の$\mathcal{F}$には底空間というものがうまく定義できないから，S^1バンドルにおけるように切断を構成するときの障害類を考えるのは正しいとは思えない。$\mathcal{F}$全体の状態を反映させるのには，切断の代りに横断的な余次元1のC^r葉層をとるのが適切であり自然である。

ここでHopfバンドルがきめる$\mathcal{F}$の摂動によってえられるC^r葉層に横断的な余次元1の葉層としてReeb葉層がえられることを注意しよう。それぞれの理論の出発点となった

この二つの概念がここで結びつけられるのは興味あることである。

S^1 バンドルのファイバーとして $\mathcal{F}$ が与えられるというのは，M^3 に相互の関係のはっきりした1次元部分多様体の族があって，これで $\mathcal{F}$ が定められるということで，このようなもののもう一つの例として閉曲面上の Seifert バンドルがあり，この場合についても Eisenbud-Hirsch-Neumann [2] によって横断的葉層の存在が研究されている。

横断的葉層の存在問題について精密な議論を行うためには，1次元 C^r 葉層 $\mathcal{F}$ の構造に関してあらかじめ知識が与えられていることが必要である。

ここでもう1次元自由度を上げて，M^3 に相互の関係のはっきりした2次元部分多様体の族があって，1次元 C^r 葉層 $\mathcal{F}$ の一つの葉はその一つの部分多様体上にあるというような場合を考えることができる。このような2次元部分多様体の族の例として，S^1 上のトーラス・バンドルと M^3 の余次元1の C^r 葉層とがある。

1982年7月に京大数理研で行われた研究集会「力学系の理論とその周辺」での講演「Foliation 上の non-singular flow」において，ソリッド・トーラス $S^1\times D^2$ の Reeb 葉層として2次元部分多様体の族が与えられているとき，一つ

の葉がその一つの部分多様体上にあるような1次元C^r葉層$\mathcal{F}$については，横断的な余次元1のC^r葉層をもつ場合ともたない場合があることを述べた。

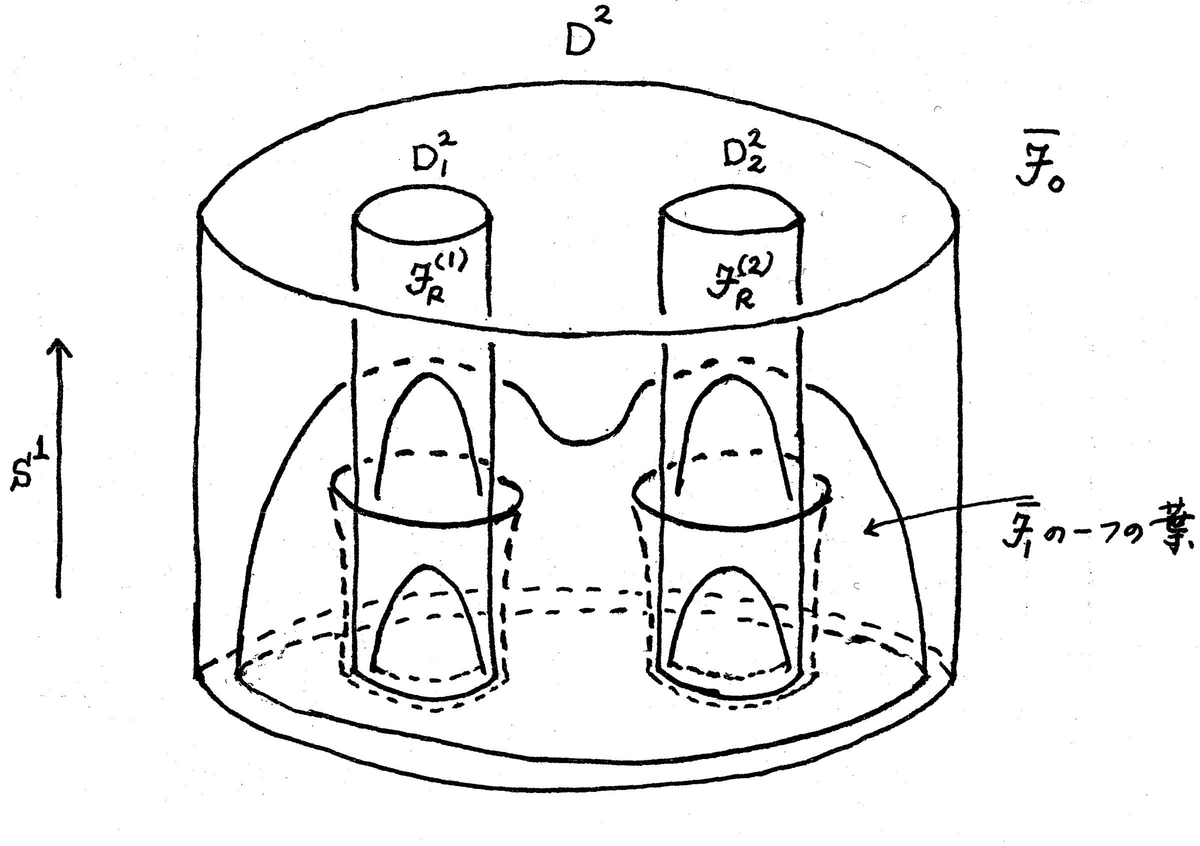
ここでは，3次元球面S^3において2次元部分多様体の族として次のような余次元1のC^∞葉層$\mathcal{F}$をとることにする。

以下，Tamura-Sato [3] の用語を使う。

S^1に向きを定めておく。D_1^2, D_2^2を$\mathrm{Int}\,D^2$の中に埋め込まれた二つの2次元球体で，$D_1^2 \cap D_2^2 = \phi$であるとする。$S^1 \times D_1^2$，$S^1 \times D_2^2$それぞれに正Reeb葉層$\mathcal{F}_R^{(1)}$，$\mathcal{F}_R^{(2)}$を考える。また，$S^1 \times (D^2 - \mathrm{Int}\,D_1^2 - \mathrm{Int}\,D_2^2)$では，$\{x\} \times (D^2 - \mathrm{Int}\,D_1^2 - \mathrm{Int}\,D_2^2)$ $(x \in S^1)$に対して，それらの$S^1 \times \partial D^2$，$S^1 \times \partial D_1^2$および$S^1 \times \partial D_2^2$の近傍に含まれる部分を，$S^1$の負の方向の回転流により流すことによってえられる余次元1のC^∞葉層$\mathcal{F}_1$を考える。$\mathcal{F}_1$，$\mathcal{F}_R^{(1)}$，$\mathcal{F}_R^{(2)}$を合せたものとしてえられる$S^1 \times D^2$の余次元1のC^∞葉層を$\mathcal{F}_1$とする（第1図）。

$S^3 = (D^2 \times S^1) \cup (S^1 \times D^2)$として，$D^2 \times S^1$ではReeb葉層$\mathcal{F}_R$，$S^1 \times D^2$では$\mathcal{F}_0$となる$S^3$の余次元1の$C^\infty$葉層を$\mathcal{F}$とする。$\mathcal{F}$は横断的に向きづけ可能である。

$\mathcal{F}$の接ベクトル全体$T(\mathcal{F})$，すなわちS^3の接ベクトルで$\mathcal{F}$の葉に接するもの全体はS^3上のR^2バンドル$\tau(\mathcal{F})$の全空間であって，$\tau(\mathcal{F})$は自明なバンドルだから$T(\mathcal{F})$

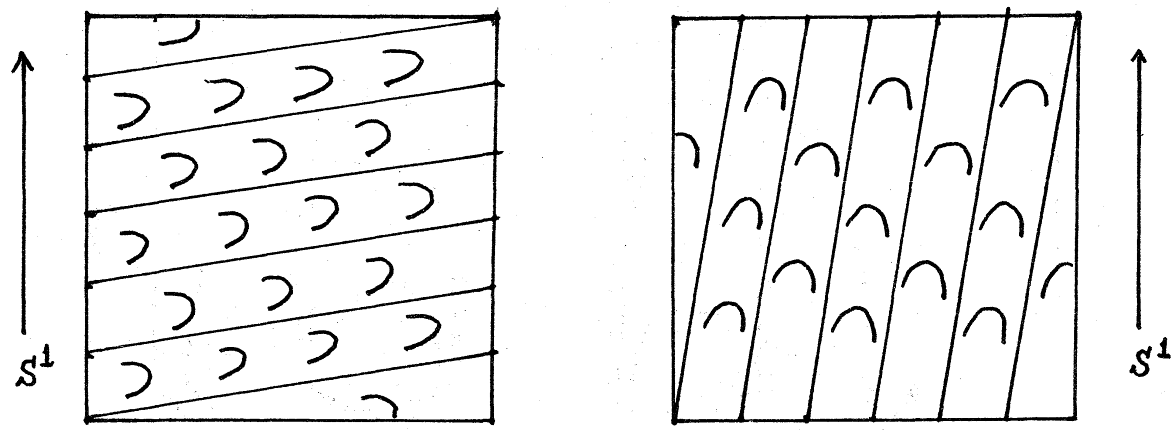


第1図

$=S^3\times R^2$ である。したがって $\mathcal{F}$ に接する S^3 上の零点のないC^∞ ベクトル場 X が存在する。X の軌道のなす1次元 C^∞ 葉層を $\mathcal{F}_1$ とする。

トーラスの1次元 C^∞ 葉層 $\mathcal{F}|(\partial D^2\times S^1)$ は必ずコンパクトな葉をもち，その一つを L_{comp} とするとき，L_{comp} の経度数は1である [3, Proposition 2]. 一方，$\mathcal{F}|(S^1\times D^2)$ を考えることにより，$\mathcal{F}|(S^1\times\partial D^2)$ に関して L_{comp} の経度数が3であることが [3, Proposition 2] の証明と同様に示される。

以上のことから, $\mathcal{F}|(\partial D^2\times S^1)$ と $\mathcal{F}|(S^1\times\partial D^2)$ として考えうるもっとも簡単な場合は, 次図である。それぞれ二つの正



$\partial D^2\times S^1$　　　　$S^1\times\partial D^2$

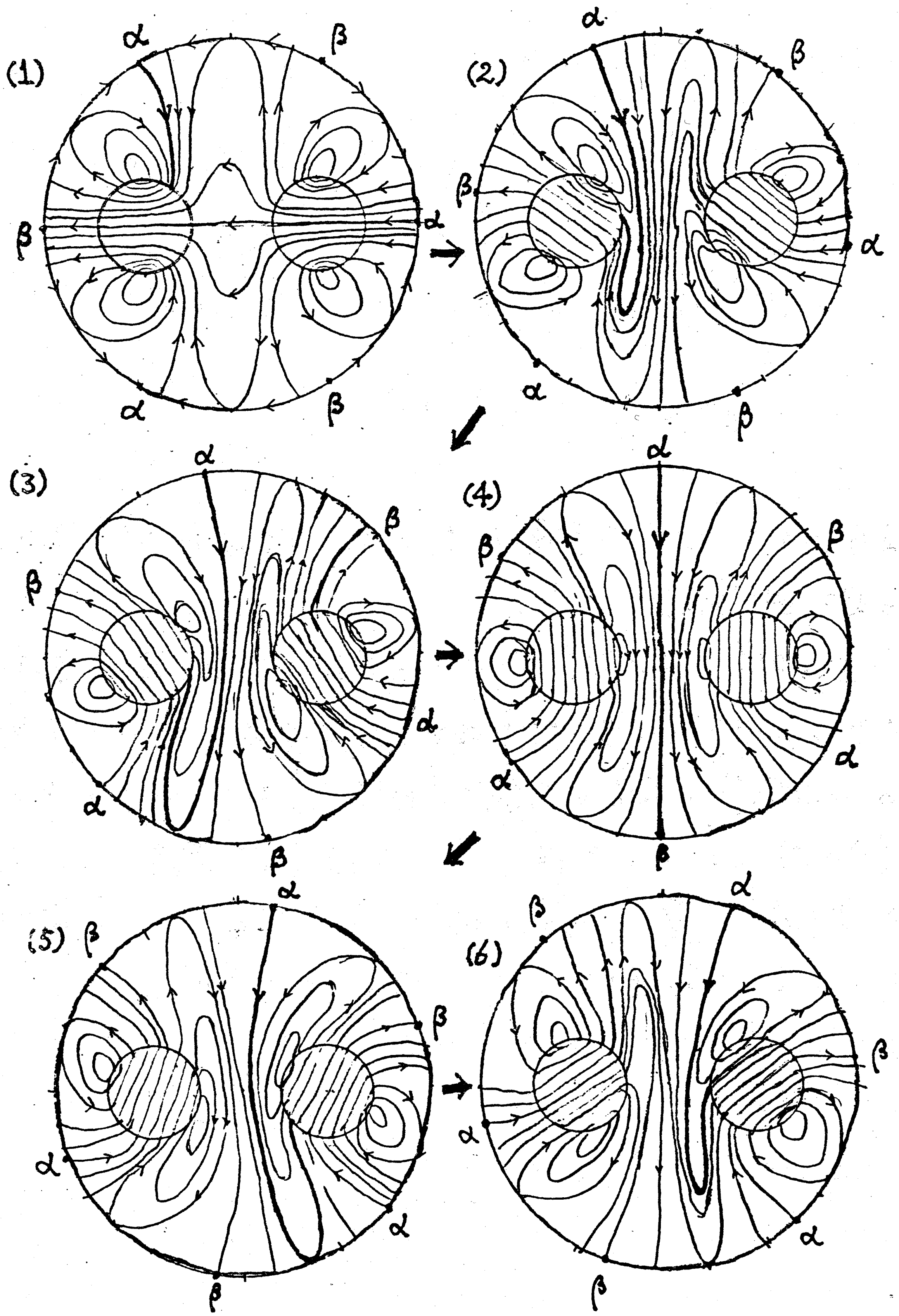
(a)　　　　(b)

第2図

Reeb 葉層からなっている。コンパクトな葉は二つである。

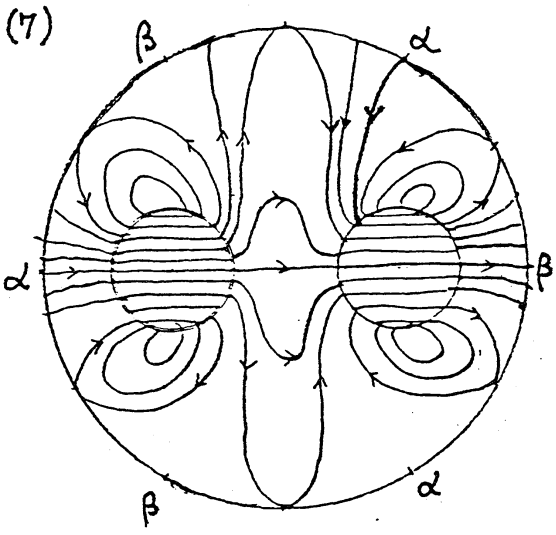
$\mathcal{F}|(\partial D^2\times S^1)$ が第2図 (a) となっているような $\mathcal{F}|(D^2\times S^1)$ は確かに存在する([3] 参照)。一方, $\mathcal{F}|(S^1\times\partial D^2)$ が第2図 (b) となっているような $\mathcal{F}|(S^1\times D^2)$ が存在することを次にみよう。

x_0 を S^1 の一点とし, $\{x_0\}\times D^2$ から回転流によってえられる $\bar{\mathcal{F}}_1$, $\mathcal{F}_R^{(1)}$ および $\mathcal{F}_R^{(2)}$ の葉を $\bar{L}$, $L^{(1)}$ および $L^{(2)}$ とする。$\bar{L}$, $L^{(1)}$, $L^{(2)}$ 上に頁(7)第3図(1)の曲線で与



(7)

(7)



第3図

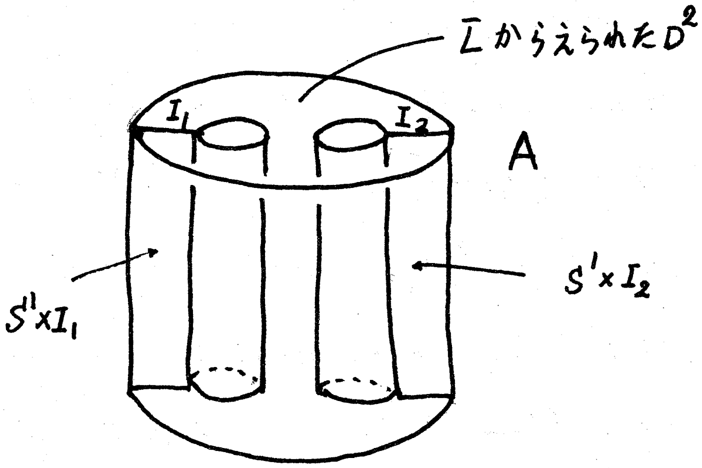
Lcompを表わすのはαとしてよく，(1)～(7)でそれは60°回転している。この回転をつづけて360°まで回転してもとにもどる。

えられる1次元C^∞葉層$\hat{\mathcal{F}}$をとる。第3図はS^1の上方から見た図である。

$S^1\times\partial D_1^2$，$S^1\times\partial D_2^2$にはそれぞれ二つの正Reeb葉層をもちコンパクトな葉の経度数が1，緯度数（コンパクトな葉の$\{*\}\times\partial D_i^2$に関する写像度の絶対値）が3のものをとる（第3図(1)～(7)参照）．この1次元C^∞葉層を$S^1\times D_1^2$と$S^1\times D_2^2$に葉が$\mathcal{F}_0|(S^1\times D_1^2)$と$\mathcal{F}_0|(S^1\times D_2^2)$の葉に含まれるように拡張することができる（[3]参照）。次に，$\{*\}\times D^2$において，$\{*\}\times\partial D^2$と$\{*\}\times\partial D_1^2$とを結ぶ線分$I_1$と，$\{*\}\times\partial D^2$と$\{*\}\times\partial D_2^2$とを結ぶ線分$I_2$を，$\{*\}\times(D^2-\mathrm{Int}\,D_1^2-\mathrm{Int}\,D_2^2)$の中で互いに交わらないようにとる。$S^1\times(D^2-\mathrm{Int}\,D_1^2-\mathrm{Int}\,D_2^2)$を$S^1\times I_1$と$S^1\times I_2$とで切り開き，さらにそれを$\Gamma$を$S^1\times\partial D^2$，$S^1\times\partial D_1^2$，$S^1\times\partial D_2^2$の十

分小さい近傍で切り捨てそれにあらためて $\{*\}\times D^2$ の部分集合をつけ加えてえられる2次元球体 D^2 で切り開く。このようにしてえられた D^3 と同相な角のある3次元多様体をAとする（第4図）。

$\tau(\mathfrak{F})$ をAに制限したバンドルは自明であり、∂A 上には $\mathfrak{F}|L$ および $\mathfrak{F}|(S^1\times\partial D^2)$ と上述の $S^1\times\partial D_i^2$ $(i=1,2)$ の1次元 C^∞ 葉層からきまる零点のないベクトル場がある。



第4図

よく知られているホモトピー群に関する結果 $\pi_2(S^1)=0$ によってこのベクトル場はAに拡張され、それの軌道のつくるものとして、$S^1\times(D^2-\mathrm{Int}D_1^2-\mathrm{Int}D_2^2)$ の1次元 C^∞ 葉層をとると、これは $\mathfrak{F}|(S^1\times\partial D^2)$ を拡張したもので、これによって求める $S^1\times D^2$ の1次元 C^∞ 葉層がえられた。

このように存在が示されたが、実際にそのような例を構成してみせたのが第3図である。これは矢野公一君の協力によるものである。横断葉層の存在に関して次の定理が成り立つ。

定理1. 第3図で与えられる、1次元 C^∞ 葉層が $\mathfrak{F}|(S^1\times D^2)$ となるような、S^3 の1次元 C^∞ 葉層 $\mathfrak{F}$ は横断的な

余次元1のC^r葉層$(r\geqq 2)$をもたない。

1次元葉層に対して横断的な余次元1の葉層の非存在をいうのには次の定理が有用である。

定理2. M^3をコンパクトな3次元C^∞多様体とし，$X=\{X(x);x\in M^3\}$をM^3上の零点をもたないC^rベクトル場とする$(r\geqq 2)$。ただし，$\partial M^3\neq\phi$のときはXは∂M^3の各点で∂M^3に接しているものとする。M^3にRiemann計量をきめておく。$\varepsilon>0$が任意に与えられたとき，M^3の閉曲線$f:S^1\to M^3$でXのε近似軌道（すなわち$f(S^1)$の各点xで$f(S^1)$の零でない接ベクトルv_xと$X(x)$とが

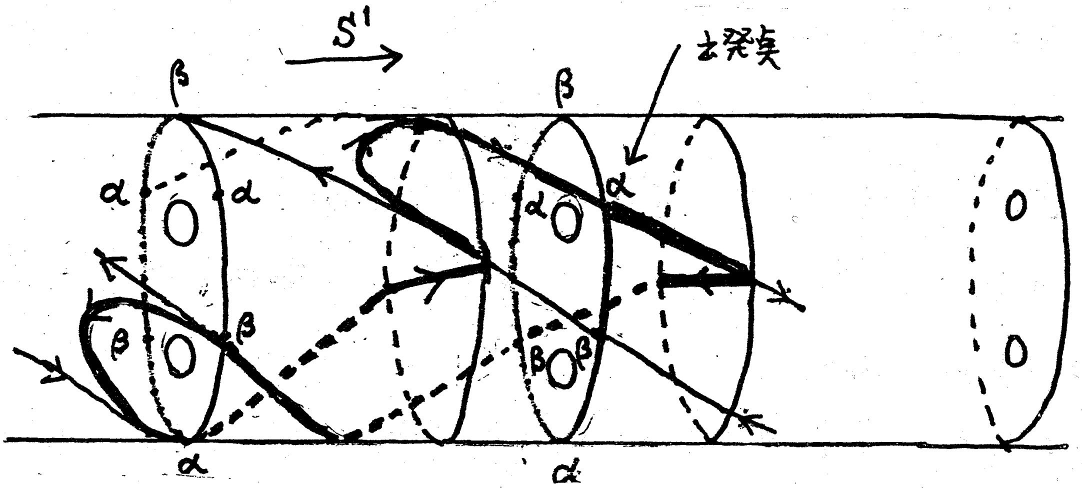
$$(v_x, X(x))\big/|v_x|\cdot|X(x)|>1-\varepsilon$$

となっているf）でXの閉軌道全体を$C_\gamma\ (\gamma\in\Gamma)$とするとき，$f$は$M^3-\bigcup_{\gamma\in\Gamma}C_\gamma$でinessentialであるものがつねに存在するとき，Xの軌道のなす1次元C^r葉層$\mathcal{F}$は横断的な余次元1のC^r葉層をもたない。

（略証）$f(S^1)$を境界にもつ2次元球体D^2を$M^3-\bigcup_{\gamma\in\Gamma}C_\gamma$にはめ込む。$\mathcal{F}$が横断的な余次元1 C^r葉層$\mathcal{F}'$をもつとすると，$\mathcal{F}'$の葉はD^2に特異点のある1次元葉層を交わりとしてきめるが，Novikovが示したように，そのうちの消失サイクルはReeb葉層の存在を保証し，Reeb葉層に横断的であるものとしてXはそこで閉軌道をもつことになり矛盾

がある。

（定理１の証明）　を近似軌道を第５図の太線のようにとると，これは定理２の性質をもつものである。（第３図も参照）



第５図

第５図は第３図を横にして，$S^1\times D^2$ の被覆空間をとったものである。

ソリッド・トーラス $S^1\times D^2$ の余次元１の C^∞ 葉層 $\mathcal{F}_0$ 上の零点のない C^r ベクトル場 X の軌道としてえられる $S^1\times D^2$ の１次元 C^r 葉層 $\mathcal{F}$ のうち第３図で示したものは，もっとも簡単なものである。一般の $\mathcal{F}$ について，その複雑さの度合は $\mathcal{F}|(S^1\times\partial D^2)$，$\mathcal{F}|(S^1\times\partial D_1^2)$，$\mathcal{F}|(S^1\times\partial D_2^2)$ に含まれる正 Reeb 葉層，負 Reeb 葉層の数で表わされる。この数に関する帰納法によって，一般の $\mathcal{F}$ についても定理２を用いて横

断的葉層の非存在を証明することができると思う。実は、どのような $\mathcal{F}$ も横断的葉層をもたないことが、Nishimori[4] によって、$\mathcal{F}$ の横断的葉層の分類定理を用いる方法で証明されている([3, Theorem 7] 参照)。ここで述べたのは、$\mathcal{F}$ 上の零点をもたない C^r ベクトル場が Morse-Smale の流れに近いものであって閉軌道のある場所がきまっていて、閉軌道をを近似の意味でつなぐ軌道の状況が特徴的であることを云っている。このことから一つの考察として横断的葉層の非存在をいうのである。

ところで、$\mathcal{F}$ を $\mathcal{F}_1$ の一つの葉に制限したものは、R^3 から二点を除いた非コンパクト多様体の1次元葉層で、無限遠で T^2 上の1次元葉層に"収束"するものである。このような1次元葉層を概周期的な末端をもつ1次元葉層ということにする。これはまた、コンパクト化可能な1次元葉層といってもいい。第3図はそのような1次元葉層の分岐あるいはベクトル場の分岐の状態を示すものと見ることができる。2次元多様体上の零点のないベクトル場の分岐について論ずるのは数学的に興味のあることと思う。

以上のことについては、近いうちに論文としてまとめる予定である。

文献

[1] J. Wood, Bundles with totally disconnected structure group, Comm. Math. Helv., 46 (1971), 257–273.

[2] D. Eisenbud, U. Hirsch, W. Neumann, Transverse foliations of Seifert bundles and self homeomorphism of the circle, Comm. Math, Helv., 56 (1981), 638–660.

[3] I. Tamura, A. Sato, On transverse foliations, Publ. Math. I.H.E.S., 54 (1981), 5–35.

[4] T. Nishimori, Existence problem of transverse foliations for some foliated 3-manifolds, Tôhoku Math. Jour., 34 (1982), 179–238.