数理解析研究所講究録
第 479 巻 1983 年 134-162

微分同相の群の2次元ホモロジー

東大 理　坪井 俊 (Takashi TSUBOI)

次の定理について述べる。

定理. $2(r+1) \leq n$ 又は $r=1$ のとき

$$H_2(B\overline{\mathrm{Diff}}_c^r \mathbb{R}^n ; \mathbb{Z}) = 0.$$

$2(r+1) \leq n$ 又は $r=1$ のとき、$B\overline{\Gamma}_n^r$ は $n+2$ 連結である。

§1.

M を境界のない n 次元微分多様体とする。M の C^r 微分同相で台がコンパクトなもののなす群を $\mathrm{Diff}_c^r M$ と書く。$\mathrm{Diff}_c^r M$ には C^r 位相を考える。群 $\mathrm{Diff}_c^r M$ に離散位相を入れたものを

$\mathrm{Diff}^r_c M_\delta$ と書く。この時、恒等写像

$$\mathrm{Diff}^r_c M_\delta \longrightarrow \mathrm{Diff}^r_c M$$

は位相群の間の連続な(準)同型で、それぞれの分類空間のあいだの写像

$$B\mathrm{Diff}^r_c M_\delta \longrightarrow B\mathrm{Diff}^r_c M$$

をひきおこす。この写像のホモトピー論的ファイバーを(これも位相群 $\overline{\mathrm{Diff}}^r_c M$ の分類空間となるので) $B\overline{\mathrm{Diff}}^r_c M$ と書く。"微分同相の群のホモロジー"とは $\mathrm{Diff}^r_c M$ 又は $B\mathrm{Diff}^r_c M_\delta$ という空間のホモロジーを指すのが正当であろうが、ここで考えるのは $B\overline{\mathrm{Diff}}^r_c M_\delta$ のホモロジーである。
(位相群 G についてのファイバー空間列

$$G_\delta \to G \to B\overline{G} \to BG_\delta \to BG$$

を考えれば、$B\overline{G}$ の情報から G, BG_δ の情報が得られる。)

$B\overline{\mathrm{Diff}}^r_c M$ と Haefliger の Γ 構造の分類空間 $B\Gamma$ との関係について、次の事が知られている。簡単のため $r \geq 1$ とする。$B\Gamma^r_n$ を余次元 n の C^r-Γ 構造の分類空間とする。$B\Gamma^r_n$ の法束の分類写像 $B\Gamma^r_n \xrightarrow{\nu} BO_n$ のファイバーを $B\overline{\Gamma}^r_n$ と書く。n 次元多様体 M の C^r 微分構造は $B\Gamma^r_n$ 構造だから可換図式

$$\begin{tikzcd} & B\Gamma^r_n \arrow[d, "\nu"] \\ M \arrow[ur] \arrow[r, "\tau"'] & BO_n \end{tikzcd}$$

を得る，$\tau^*\nu$ はM上の$B\Gamma_n^r$束であるが，ここには、写像 $M \longrightarrow B\Gamma_n^r$ により与えられる切断が定まっている。$\Gamma_c \tau^*\nu$ を、この切断とコンパクトな集合上でのみことなる切断 $M \longrightarrow \tau^*\nu$ 全体の空間とする．

定理（Mather-Thurston）．写像 $B\overline{Diff}_c^r M \longrightarrow \Gamma_c \tau^*\nu$ が存在して，整係数ホモロジー群の間の同型をひきおこす。
とくに、$M = \mathbb{R}^n$ の場合、ν のファイバー $B\Gamma_n^r$ について，

$$H_*(B\overline{Diff}_c^r \mathbb{R}^n ; \mathbb{Z}) = H_*(\Omega^n B\Gamma_n^r ; \mathbb{Z})$$

ここで Ω^n は n 重閉道空間である。

この定理により、$B\overline{Diff}_c^r M$，$B\Gamma_n^r$，$B\overline{Diff}_c^r \mathbb{R}^n$ が結びつけられている。$B\overline{Diff}_c^r \mathbb{R}^n$ のホモロジーについては、次のことが知られている。

$H_1(B\overline{Diff}_c^r \mathbb{R}^n ; \mathbb{Z}) = 0 \quad (r \neq n+1)$ [Mather-Thurston]

$H_{n+1}(B\overline{Diff}_c^r \mathbb{R}^n ; \mathbb{Z}) \neq 0 \quad (r \geqq 2)$ [例えば，Godbillon-Vey 不変量による]

$H_i(B\overline{Homeo}_c \mathbb{R}^n ; \mathbb{Z}) = 0 \quad (i \geqq 1)$ [Mather]

これらは，Mather-Thurston の定理により，$B\Gamma_n^r$ は $r \neq n+1$ のとき，$n+1$ 連結（$r = n+1$ のとき，少なくとも n 連結），$r \geqq 2$ のとき，$2n+1$ 連結ではない。$B\Gamma_n^0$ は可縮，と言いかえら

れる。

さて、我々の定理は、$2(r+1)\leq n$ 又は $r=1$ のとき、$H_2(B\overline{\mathrm{Diff}}{}^r_c\,\mathbb{R}^n;\mathbb{Z})=0$ というものである。従って、このとき、$B\overline{\Gamma}{}^r_n$ は $n+2$ 連結になる。

§2.

我々の定理の証明は、$H_i(B\overline{\mathrm{Homeo}_c}\,\mathbb{R}^n;\mathbb{Z})=0$ $(i\geq 1)$ の Mather による証明に近いものである。まず、これについて説明する。

$\mathrm{Homeo}_c\,\mathbb{R}^n$ は可縮である。($f\in\mathrm{Homeo}_c\,\mathbb{R}^n$ に対し、$(H_t(f))(x)=tf(x/t)$ とおくと、$H_1(f)=f$, $H_0(f)=id$ となる連続写像 $H:[0,1]\times\mathrm{Homeo}_c\,\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathrm{Homeo}_c\,\mathbb{R}^n$ を得る。) よって、$B\overline{\mathrm{Homeo}_c}\,\mathbb{R}^n\simeq B\,\mathrm{Homeo}_c\,\mathbb{R}^n_\delta$ となる。$B\,\mathrm{Homeo}_c\,\mathbb{R}^n_\delta$ のホモロジーは次の複体のホモロジーである。$G=\mathrm{Homeo}_c\,\mathbb{R}^n$ として、

$$0\longleftarrow\mathbb{Z}\xleftarrow{\partial}\mathbb{Z}[G]\xleftarrow{\partial}\mathbb{Z}[G\times G]\xleftarrow{\partial}\mathbb{Z}[G\times G\times G]\longleftarrow\cdots.$$

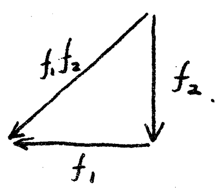
ただし、$\mathbb{Z}[G\times\cdots\times G]$ は $G\times\cdots\times G$ 上の群環、境界 ∂ は $\mathbb{Z}[G\times\cdots\times G]$ の基底に対し次で定まる。

$$\partial(f_1,\cdots,f_n)=(f_2,\cdots f_n)+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i(f_1,\cdots,f_if_{i+1},\cdots,f_n)+(-1)^n(f_1,\cdots,f_{n-1}).$$

すべての1次元鎖は輪体である。

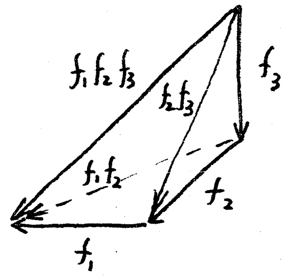
(f_1,f_2) は右図に対応している。

$\partial(f_1,f_2)=(f_2)-(f_1f_2)+(f_1)$.

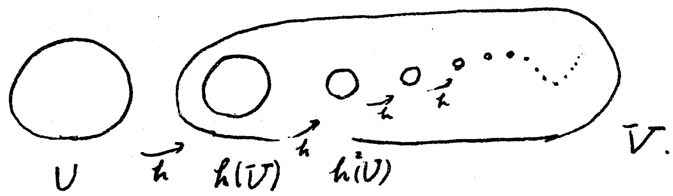


(f_1, f_2, f_3) は右図に対応している。

$\partial(f_1, f_2, f_3) = (f_2, f_3) - (f_1f_2, f_3) + (f_1, f_2f_3) - (f_1, f_2)$



さて、$f \in \mathrm{Homeo}_c R^n$ に対し次の様な構成を考える。まず、$\mathrm{Supp}(f) = Cl\{x : f(x) \neq x\} \subset U$ となる開球体 U をとる。U に対し、$h \in \mathrm{Homeo}_c R^n$ で、$\{h^i(U)\}_{i \geq 0}$ は互いに交わらず、$\mathrm{diam}\, h^i(U) \longrightarrow 0 \quad (i \longrightarrow \infty)$ となるものがとれる。さらに $Cl\{\bigcup_{i \geq 1} h^i(U)\} \subset V$, $U \cap V = \phi$ となる開球体 V があるとしてよい。



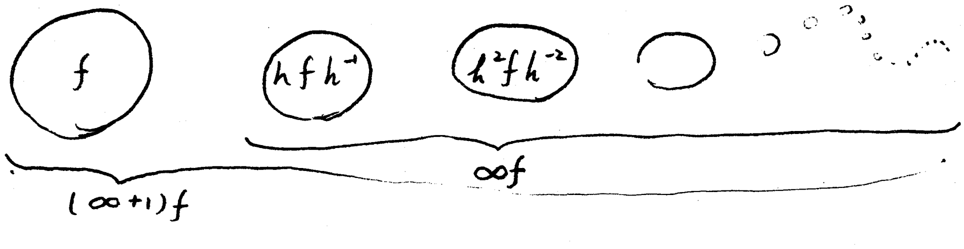
f に対し、$\mathrm{Supp}(h^ifh^{-i}) \subset h^i(U)$ で、

$$| h^i f h^{-i} - id |_{C^0} \leq \mathrm{diam}\, h^i(U)$$

であるから、$\prod_{i=1}^{\infty} h^ifh^{-i}$ が定義され、$\mathrm{Homeo}_c R^n$ の元となる。これを ∞f と書く。一方 $\prod_{i=0}^{\infty} h^ifh^{-i} = (1+\infty)f$ とおくと、次が成立する。

$$(1+\infty)f = f \cdot (\infty f).$$

$$h((1+\infty)f)h^{-1} = \infty f.$$



$H_i(BHomeo_c \mathbb{R}^n{}_\delta ; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=0 \\ 0 & i \geq 1 \end{cases}$ を i に関する帰納法で示す。$i=0$ は明らかである。$i-1$ まで示されているとする。i 次元輪体 $\sigma = \sum_j a_j (f_1^{(j)}, \cdots, f_i^{(j)})$, $a_j \in \mathbb{Z}$ をとる。ここにあらわれるすべての $f_k^{(j)}$ について、$\mathrm{Supp}\, f_k^{(j)} \subset U$ としてよい。このとき、上の h を使って、i 次元鎖

$$\infty\sigma = \sum_j a_j \, (\infty f_1^{(j)}, \cdots, \infty f_i^{(j)})$$

$$(1+\infty)\sigma = \sum_j a_j \, ((1+\infty) f_1^{(j)}, \cdots, (1+\infty) f_i^{(j)})$$

が定義される。$f \longrightarrow \infty f$ は準同型だから、$\infty\sigma$, $(1+\infty)\sigma$ は輪体となる。さらに、$h((1+\infty)\sigma)h^{-1} = \infty\sigma$ ゆえ、$\infty\sigma$ と $(1+\infty)\sigma$ とはホモローグである。

一方、$W \subset \mathbb{R}^n$ に台をもつ $\mathbb{R}^n$ の同相のなす群を $Homeo_W \mathbb{R}^n$ と書くと、次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccc} Homeo_{U \cup V} \mathbb{R}^n & \searrow & \\ \downarrow \cong & & Homeo_c \mathbb{R}^n \\ Homeo_U \mathbb{R}^n \times Homeo_V \mathbb{R}^n & \nearrow & \end{array}$$

これより、次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} B\, Homeo_{U \cup V} \mathbb{R}^n{}_\delta & \searrow & \\ \downarrow \simeq & & B\, Homeo_c \mathbb{R}^n{}_\delta \\ B\, Homeo_U \mathbb{R}^n_\delta \times B\, Homeo_V \mathbb{R}^n_\delta & \nearrow & \end{array}$$

U, V は開球体としたから、$H_*(BHomeo_U \mathbb{R}^n_\delta) \cong H_*(BHomeo_V \mathbb{R}^n_\delta) \cong H_*(BHomeo_c \mathbb{R}^n_\delta)$ である。よって、帰納法の仮定とKünneth

の公式により、$H_2(BHomeo_U\mathbb{R}^n_\delta \times BHomeo_V\mathbb{R}^n_\delta) \cong H_1(BHomeo_U\mathbb{R}^n_\delta) \oplus H_1(BHomeo_V\mathbb{R}^n_\delta)$ を得る。$(1+\infty)\sigma$ は $BHomeo_{U\cup V}\mathbb{R}^n_\delta$ ので元輪体と考えることも出来る。これのホモロジー類は $H_i(BHomeo_U\mathbb{R}^n_\delta) \oplus H_i(BHomeo_V\mathbb{R}^n_\delta)$ の $\sigma \oplus \infty\sigma$ のホモロジー類にうつされるから、$BHomeo_c\mathbb{R}^n_\delta$ においては、$(1+\infty)\sigma$ と $\sigma+\infty\sigma$ はホモローグになる。$(1+\infty)\sigma$ は $\infty\sigma$ とホモローグであったから σ は零にホモローグである。これで、$BHomeo_c\mathbb{R}^n_\delta$ が非輪状であることが示せた。

§3.

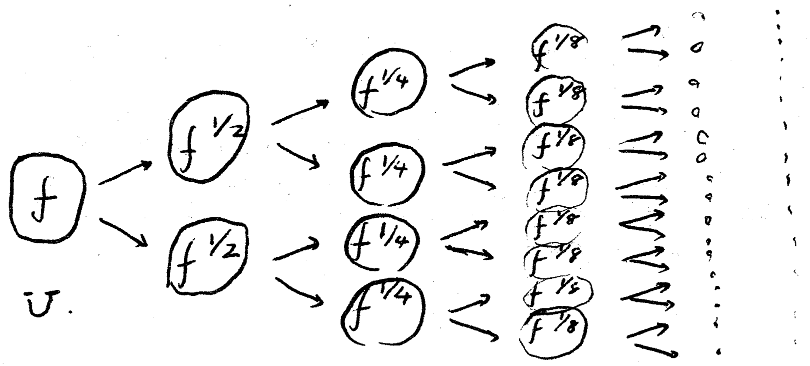
前節の証明では、f から ∞f, $(1+\infty)f$ を構成し、輪体 σ から輪体 $\infty\sigma$, $(1+\infty)\sigma$ を構成できることが本質的である。前節の証明はそのままでは微分同相の群には適用できない。実際、$h^i f h^{-i} - id$ の C^1 ノルムは、ほとんど一定で、∞f は $f \neq id$ のとき C^1 位相では収束しない。無限に繰り返すことと微分可能なものに収束することを両立させるために、次の様なことを考える。

前節の ∞f の構成では、$\{id, h, h^2, \cdots\} \cong \mathbb{Z}_+$ の元による共役が登場したが、これを $\overset{N}{*}\mathbb{Z}_+ = \overbrace{\mathbb{Z}_+ * \cdots * \mathbb{Z}_+}^{N}$ に置き換える。すなわち、開球体 U, 準同型 $\Phi: \overset{N}{*}\mathbb{Z}_+ \longrightarrow Diff^r_c\mathbb{R}^n$ で $\Phi(\lambda)(U)$, $\lambda \in \overset{N}{*}\mathbb{Z}_+$ が互いに交わらないものが存在したとする。U に台をもつ微分同相の群の一径数部分群 $\{f^t;\ t\in\mathbb{R}\}$

を考える。このとき $\Phi(\lambda) f^{N-l(\lambda)} \Phi(\lambda)^{-1}$ は $\Phi(\lambda)(U)$ に台をもつ。ここで $l(\lambda)$ は λ の語の長さである。もしも、$\Phi(\lambda) f^{N-l(\lambda)} \Phi(\lambda)^{-1} - id$ の C^r ノルムが $l(\lambda) \to \infty$ のときに零に近づけば、

$$F = \prod_{\lambda \in \overset{N}{\ast} \mathbb{Z}_+} \Phi(\lambda) f^{N-l(\lambda)} \Phi(\lambda)^{-1}$$

は C^r となる。



N=2.

この F については

$$F^{1/N} = \prod_{\lambda \in \overset{N}{\ast} \mathbb{Z}_+} \Phi(\lambda) f^{N-l(\lambda)-1} \Phi(\lambda)^{-1},$$

$\Lambda = \overset{N}{\ast} \mathbb{Z}_+$ の生成元を記号 $1, \cdots, N$ とするとき、$1 \le i \le N$ に対し

$$\Phi(i) F^{1/N} \Phi(i)^{-1} = \prod_{\lambda \in i\Lambda} \Phi(\lambda) f^{N-l(\lambda)} \Phi(\lambda)^{-1}$$

が成立し、

$$F = f^{1} \prod_{i=1}^{N} \Phi(i) F^{1/N} \Phi(i)^{-1}$$

となる。これは F が前節の ${}^{\infty}f$ と同じような性質を持っていることを示している。

この構成は次元の高い輪体に対しても拡張され得る。開球体 U, 準同型 $\Phi : \overset{N^m}{*} \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathrm{Diff}_c^r R^n$ で、$\Phi(\lambda)(U)$, $\lambda \in \Lambda = \overset{N^m}{*} \mathbb{Z}_+$ が互いに交わらず、U, $\overline{\bigcup_{\lambda \in i\Lambda} \Phi(\lambda)(U)}$, $i = 1, \cdots, N^m$ が互いに交わらない開球体に含まれている、というものが存在したとする。$\{f^t ; t \in R\}$ を U に台をもつ一径数部分群とする。T^m 上の葉層 R^n 束で $\pi_1(T^m)$ の生成元に対応するホロノミーが $f^{t(1)}, \cdots, f^{t(m)}$ で与えられるものを考える。これは $B\mathrm{Diff}_c^r R^n_\delta$ の m 次元ホモロジー類 $\{f^{t(1)}, \cdots, f^{t(m)}\}$ を定める。

$$F^{t(i)} = \prod_{\lambda \in \Lambda = \overset{N^m}{*} \mathbb{Z}_+} \Phi(\lambda) f^{t(i) N^{-\ell(\lambda)}} \Phi(\lambda)^{-1}$$

が C^r 微分同相となったとする。このとき、

$$\{F^{t(1)}, \cdots, F^{t(m)}\} = N^m \{F^{t(1)/N}, \cdots, F^{t(m)/N}\}$$

である。$\Phi(i)\{F^{t(1)/N}, \cdots, F^{t(m)/N}\}\Phi(i)^{-1}$ は $\{F^{t(1)}, \cdots, F^{t(m)}\}$ を $\bigcup_{\lambda \in i\Lambda} \Phi(\lambda)(U)$ に制限したものになっている。$\{f^{t(1)}, \cdots, f^{t(j)}\}$, $j < m$ の形のホモロジー類が零になることが帰納的に示されていれば、Künneth の公式により、

$$\{F^{t(1)}, \cdots, F^{t(m)}\} = \sum_{i=1}^{N^m} \Phi(i)\{F^{t(1)/N}, \cdots, F^{t(m)/N}\}\Phi(i)^{-1} + \{f^{t(1)}, \cdots, f^{t(m)}\}$$

となり、$\{f^{t(1)}, \cdots, f^{t(m)}\} = 0$ が示される。

このような構成には、いくつかの問題点がある。まず、微分同相 f は一径数部分群に入るとはかぎらない。さらに、次

元の高い輪体はもっと複雑である。等。

最初の問題点に対しては、$B\overline{\mathrm{Diff}}{}^r_c\mathbb{R}^n$ は葉層$\mathbb{R}^n$積を分類する空間であり、葉層$\mathbb{R}^n$積には細分が定義できるということにより対処できる。その他の点では、実際に次元が高くなると計算が複雑になり、そのために現在のところ2次元の輪体に対してしか計算できていない。(上のような構成には高い微分可能性は期待できない。$B\overline{\mathrm{Diff}}{}^r_c\mathbb{R}^n$ のm次元輪体に対しては $mr < n+m$ が構成存在の為の条件である。)

§ 4.

$B\overline{\mathrm{Diff}}{}^r_c\mathbb{R}^n$ は次の様にして構成される，$S_*(\mathrm{Diff}^r_c\mathbb{R}^n)$ を $\mathrm{Diff}^r_c\mathbb{R}^n$ の特異単体複体とする。$\Delta^m = \{(t_1, \cdots, t_m) \in \mathbb{R}^m ;\ 1 \geq t_1 \geq \cdots \geq t_m \geq 0\}$ を標準m単体とする。特異m単体 $\sigma : \Delta^m \longrightarrow \mathrm{Diff}^r_c\mathbb{R}^n$，$g \in \mathrm{Diff}^r_c\mathbb{R}^n$ に対し、$\sigma g : \Delta^m \longrightarrow \mathrm{Diff}^r_c\mathbb{R}^n$ を $(\sigma g)(t) = \sigma(t) g$，$t \in \Delta^m$ で定義する。これは $\mathrm{Diff}^r_c\mathbb{R}^n$ の $S_*(\mathrm{Diff}^r_c\mathbb{R}^n)$ 上への右からの作用を定める。この作用は境界作用子と可換で、$S_*(\mathrm{Diff}^r_c\mathbb{R}^n)/\mathrm{Diff}^r_c\mathbb{R}^n$ は半単体複体となる。$S_*(\mathrm{Diff}^r_c\mathbb{R}^n)/\mathrm{Diff}^r_c\mathbb{R}^n$ の実現が $B\overline{\mathrm{Diff}}{}^r_c\mathbb{R}^n$ を与える。今後はこれを $B\overline{\mathrm{Diff}}{}^r_c\mathbb{R}^n$ とする。

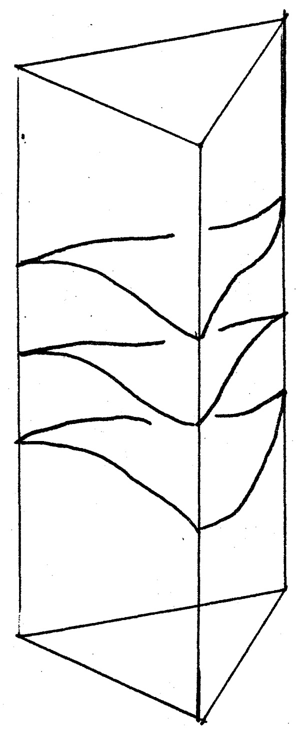
$\mathrm{Diff}^r_c\mathbb{R}^n$ $(1 \leq r < \infty)$ は C^∞ バナッハ多様体の構造をもつ。$S^\infty_*(\mathrm{Diff}^r_c\mathbb{R}^n)$ を C^∞ 特異単体複体とすると $\mathrm{Diff}^r_c\mathbb{R}^n$ は右から

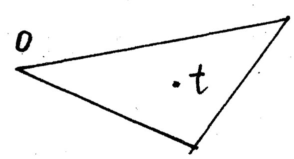
これに作用する。(結合 $(g_1, g_2) \longrightarrow g_1 g_2$ は g_1 に関し C^∞ である。) 実現の間の包含写像

$$|S^\infty_*(\mathrm{Diff}^r_c\mathbb{R}^n)/\mathrm{Diff}^r_c\mathbb{R}^n| \longrightarrow |S_*(\mathrm{Diff}^r_c\mathbb{R}^n)/\mathrm{Diff}^r_c\mathbb{R}^n|$$

はホモトピー同値である。

(C°) 特異 m 単体 $\sigma : \Delta^m \longrightarrow \mathrm{Diff}^r_c\mathbb{R}^n$ は、$(t, x) \in \Delta^m \times \mathbb{R}^n$ を通る葉が $\{(u, \sigma(u)\sigma(t)^{-1}(x)) ; u \in \Delta^m\}$ となる $\Delta^m \times \mathbb{R}^n$ 上の葉層構造 $\mathcal{F}_\sigma$ を定める。$\Delta^m \times \mathbb{R}^n$ 上の葉層構造で $\{t\} \times \mathbb{R}^n$, $t \in \Delta^m$ に横断的なものを Δ^m 上の葉層 $\mathbb{R}^n$ 積という。Δ^m 上の葉層 $\mathbb{R}^n$ 積には上のような σ をとることができる。葉層 $\mathbb{R}^n$ 積の台を $Cl\{x \in \mathbb{R}^n ; \exists t \in \Delta^m, \sigma(t)\sigma(0)^{-1}(x) \neq x\}$ と定義する。K に台をもつ微分同相の群を $\mathrm{Diff}^r_K\mathbb{R}^n$ と書くとき、σ の定める葉層 $\mathbb{R}^n$ 積の台が K に含まれるならば、$\sigma(t)\sigma(0)^{-1}$ は $\mathrm{Diff}^r_K\mathbb{R}^n$ への写像となる。σ と σg ($g \in \mathrm{Diff}^r_c\mathbb{R}^n$) は同じ葉層 $\mathbb{R}^n$ 積に対応していることから、Δ^m 上の台がコンパクトな葉層 $\mathbb{R}^n$ 積と $B\overline{\mathrm{Diff}^r_c\mathbb{R}^n}$ の m 単体は一対一に対応していることがわかる。





$S^{\infty}_{*}(\mathrm{Diff}^r_c \mathbb{R}^n)/\mathrm{Diff}^r_c \mathbb{R}^n$ $(1 \leq r < \infty)$ の元σにはノルムを定義することができる。σに対応する葉層$\mathbb{R}^n$積$\mathcal{F}_\sigma$は、

$$\Delta^m \xrightarrow{(t,x)\text{を通る葉への持ちあげ}} \Delta^m \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{射影}} \mathbb{R}^n$$

の接写像

$$T_t \Delta^m \longrightarrow T_{(t,x)} \Delta^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow T_x \mathbb{R}^n$$

を定める。これは、$X_t : T_t \Delta^m \longrightarrow \mathfrak{X}^r_c \mathbb{R}^n$ を定義する。但し、$\mathfrak{X}^r_c \mathbb{R}^n$ は$\mathbb{R}^n$上の台がコンパクトなベクトル場の全体である。σ或いは$\mathcal{F}_\sigma$のノルムは、$\mathfrak{X}^r_c \mathbb{R}^n$上の$C^r$ノルム$\| \ \|_r$により、

$$\| \mathcal{F}_\sigma \| = \sup_{t \in \Delta^m} \ \sup_{v \in T_t \Delta^m, |v| = 1} \| X_t v \|_r$$

と定義される。

葉層$\mathbb{R}^n$積$\mathcal{F}_\sigma$に対し、$\mathbb{R}^n$のコンパクト集合Kが"$x \in K \Longleftrightarrow \sigma(t)\sigma(0)^{-1}(x) \in K$"という性質をみたしているとする。このとき$\mathcal{F}_\sigma$の$K$への制限$\mathcal{F}_{\sigma|K}$が、

$$(\sigma|K)(t)(x) = \begin{cases} \sigma(t)\sigma(0)^{-1}(x) & x \in K \\ x & x \in \mathbb{R}^n - K \end{cases}$$

により定まる。Kの境界点において、σが平担であれば、$\sigma|K : \Delta^m \longrightarrow \mathrm{Diff}^r_K \mathbb{R}^n$ となる。さらに$\|\mathcal{F}_{\sigma|K}\| \leq \|\mathcal{F}_\sigma\|$である。

一方 $\sigma_i : \Delta^m \longrightarrow \mathrm{Diff}^r_c \mathbb{R}^n$ $(i \in \mathbb{N})$ が、

$$\mathrm{Int\,Supp}\, \mathcal{F}_{\sigma_i} \cap \mathrm{Int\,Supp}\, \mathcal{F}_{\sigma_j} = \phi \quad (i \neq j)$$

をみたすとき、$\sigma = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \sigma_i : \Delta^m \longrightarrow \mathrm{Diff}^r_c \mathbb{R}^n$ が

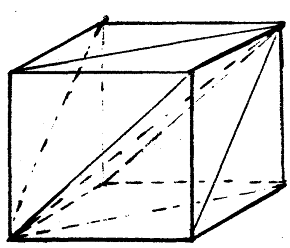
$$(\bigcup \sigma_i)(t)(x) = \begin{cases} \sigma_i(t)\,\sigma_i(0)^{-1}(x) & x \in \mathrm{Supp}\,\mathcal{F}_{\sigma_i} \quad i \in \mathbb{N} \\ x & x \in \mathbb{R}^n - \bigcup \mathrm{Supp}\,\mathcal{F}_{\sigma_i} \end{cases}$$

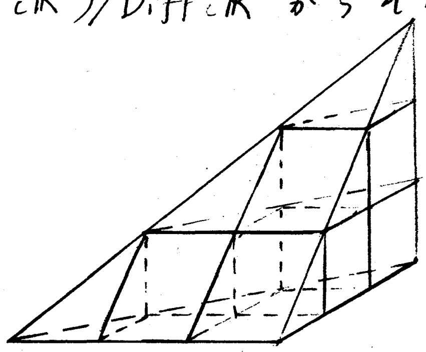
により定まる。$\bigcup \mathrm{Supp}\,\mathcal{F}_{\sigma_i}$ が相対コンパクト、$\|\mathcal{F}_{\sigma_i}\| \to 0$ $(i \to \infty)$ のとき、$\bigcup \sigma_i : \Delta^m \longrightarrow \mathrm{Diff}^r_c \mathbb{R}^n$ となる。有限個の $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ に対しても $\bigcup_{i=1}^{N} \sigma_i$ は同様に定義される。$\bigcup_{i=1}^{N} \sigma_i$ は常に $\mathrm{Diff}^r_c \mathbb{R}^n$ への写像となる。

§ 5.

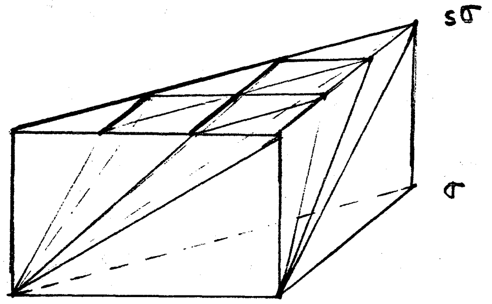
葉層 $\mathbb{R}^r$ 積の細分、ホモトピー等について述べておく。

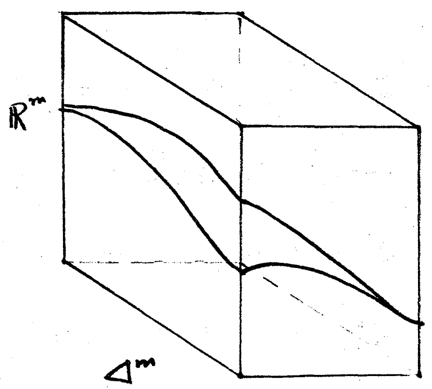
立方体 $[0,1]^m$ は $1, \dots, m$ の置換 $(i_1, \dots, i_m)$ に対応した単体 $\{(t_1, \dots, t_m) \in [0,1]^m ;\ 1 \geq t_{i_1} \geq \dots \geq t_{i_m} \geq 0\}$ に分割される。正整数 N に対し、$\Delta^m = \{(t_1, \dots, t_m) ; 1 \geq t_1 \geq \dots \geq t_m \geq 0\}$ は $t_i = j/N$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, N-1$ なる超平面で切り、さらに得られた小片を立方体の分割の様に分割して、N^m 個の単体に分割される。これに対応して、特異 m 単体 $\sigma : \Delta^m \longrightarrow \mathrm{Diff}^r_c \mathbb{R}^n$ は N^m 個の特異 m 単体の和 $s\sigma$ となる。$s\sigma$ の各単体のノルムは σ のノルムの $1/N$ となる。s は $C_* = S_*(\mathrm{Diff}^r_c \mathbb{R}^n) / \mathrm{Diff}^r_c \mathbb{R}^n$ からそれ自





身への鎖写像を与えるが、これと恒等写像との鎖ホモトピー S が存在する。つまり、$\partial S\sigma + S\partial\sigma = \sigma - s\sigma$ となる。





Δ^m 上の2つの葉層 $\mathbb{R}^n$ 積は $[0,1]\times\Delta^m$ 上の葉層 $\mathbb{R}^n$ 積の $\{0\}\times\Delta^m$, $\{1\}\times\Delta^m$ への制限となっているときホモトープであるといわれる。

$\sigma:\Delta^m\longrightarrow \mathrm{Diff}^r_c\mathbb{R}^n$, $\varphi:[0,1]\longrightarrow \mathrm{Diff}^r_c\mathbb{R}^n$, $\varphi(0)=id$. に対し、$C_\varphi\sigma:[0,1]\times\Delta^m\longrightarrow \mathrm{Diff}^r_c\mathbb{R}^n$ を $C_\varphi\sigma(s,t)=\varphi(s)\sigma(t)$ で定義すると、これは σ と $\varphi(1)\sigma$ との間のホモトピーを与えている。$\mathrm{Supp}\,\varphi(1)\sigma=\varphi(1)(\mathrm{Supp}\,\sigma)$ となる。C_φ は複体 C_* 上で $\varphi(1)$ と id との鎖ホモトピーを与える。

$$\partial C_\varphi\sigma + C_\varphi\partial\sigma = \sigma - \varphi(1)\sigma.$$

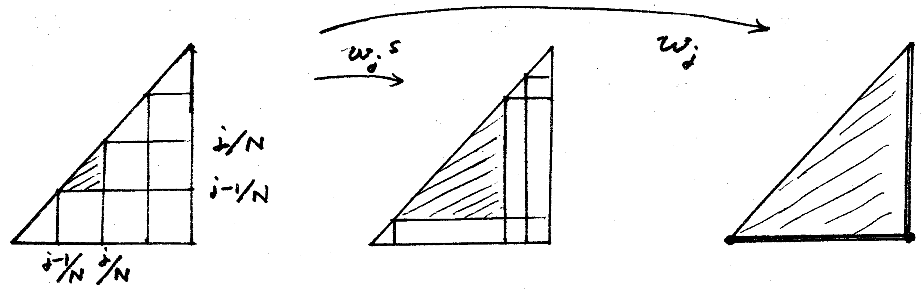
これは、離散群のホモロジーに内部自己同型は自明に作用することに対応している。

次のホモトピーはKünnethの公式に対応している。$\sigma=\bigcup_{j=1}^{N}\sigma_j$
$\sigma_j:\Delta^m\longrightarrow \mathrm{Diff}^r_c\mathbb{R}^n$ $\sigma_j(0)=id$ $(j=1,\cdots,N)$ とする。

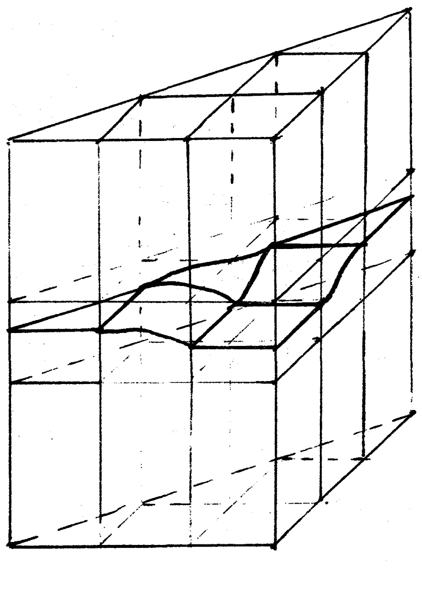
$w_j : \Delta^m \longrightarrow \Delta^m \quad w_j(t_1, \cdots, t_m) = (u_1, \cdots, u_m)$ を

$$u_i = \begin{cases} 0 & , [Nt_i] < j-1 \\ Nt_i - [Nt_i] & , [Nt_i] = j-1 \\ 1 & , [Nt_i] > j-1 \end{cases} \qquad (i=1, \cdots, m)$$

で定義する。$1 \geq t_1 \geq \cdots \geq t_m \geq 0$ から $1 \geq u_1 \geq \cdots \geq u_m \geq 0$ となり、$\Delta^m \longrightarrow \Delta^m$ の写像となっている。w_j は id とホモトープである。ホモトピー $w_j^s(t_1, \cdots, t_m) = (u_1^s, \cdots, u_m^s)$, $s \in [0, 1]$ は $u_i^s = s u_i + (1-s) t_i$ により与えられる。



さて、$\bigcup_{j=1}^{N} \sigma_j \circ w_j$ を考えるとこれは $\sigma = \bigcup_{j=1}^{N} \sigma_j$ とホモトープである。σ_j が C^∞ でも、$\bigcup_{j=1}^{N} \sigma_j w_j$ は $t_i = j/N$ $(i=1, \cdots m, j=1, \cdots, N-1)$ という超平面上で C^∞ でない。そこで、$\bigcup_{j=1}^{N} \sigma_j \circ w_j$ の N 細分 $\tilde{\rho}\sigma = S \bigcup_{j=1}^{N} \sigma_j \circ w_j$ を考える。上のホモトピーが境界作用子と可換であることから $\tilde{\rho}$ と id との間の鎖ホモトピー P が存在する。



$$\partial P\sigma + P\partial\sigma = \sigma - \tilde{\rho}\sigma.$$

$\tilde{\rho}\sigma$ の単体のノルムは $|\sigma|$ 以

下である。次元の低い単体に対して $\bar{p}$ は書きやすい。σ が1次元のとき、$\bar{p}\sigma = \sum \sigma_j$ であり、2次元のとき、

$$\bar{p}\sigma = \sum \sigma_j - \sum_{i<j} \partial_0\sigma_i \times \partial_2\sigma_j$$ と書かれる。

ただし、$\tau_1, \tau_2 : \Delta^1 \longrightarrow \mathrm{Diff}^r_c \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Int\,Supp}\,\bar{\mathcal{F}}_{\tau_1} \cap \mathrm{Int\,Supp}\,\bar{\mathcal{F}}_{\tau_2} = \phi$ に対し、$\tau_1 \times \tau_2 : [0,1]^2 \longrightarrow \mathrm{Diff}^r_c \mathbb{R}^n$ は $(\tau_1 \times \tau_2)(t_1, t_2) = \tau_1(t_1)\tau_1(0)^{-1}\tau_2(t_2)\tau_2(0)^{-1}$ で定まる。

§6.

第3節に書いた筋書のうち、葉層$\mathbb{R}^n$積の細分は前節で定義した。我々の定理 $H_2(B\overline{\mathrm{Diff}}^r_c \mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) = 0$ の $2(r+1) \leq n$ の場合の証明では、次の開球体Uと準同型Φをつかう。

補題. 開球体Uと準同型 $\Phi : \overset{n}{\times}(\mathbb{Z}_+ * \mathbb{Z}_+) \longrightarrow P\mathrm{Diff}^\infty_c \mathbb{R}^n$ で次を満たすものがある。(ここで $P\mathrm{Diff}^\infty_c \mathbb{R}^n = \{f^t : [0,1] \longrightarrow \mathrm{Diff}^\infty_c \mathbb{R}^n ; f^0 = id\}$) $\Phi(\lambda)^{-1}(U)$, $\lambda \in \overset{n}{\times}(\mathbb{Z}_+ * \mathbb{Z}_+)$ は互いに交わらない。さらに、$\Phi(\lambda)^{-1}|U$ はアファイン写像 $x \longmapsto Ax + b$ の形で、Aは対角行列$((2+\varepsilon)^{-l_1(\lambda)}, \cdots, (2+\varepsilon)^{-l_n(\lambda)})$ $\varepsilon > 0$, $l_i(\lambda) = l(pr_i(\lambda))$, 但し $pr_j : \overset{n}{\times}(\mathbb{Z}_+ * \mathbb{Z}_+) \longrightarrow \mathbb{Z}_+ * \mathbb{Z}_+$ は第j成分への射影で、lは語の長さ $\mathbb{Z}_+ * \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{Z}_+$ である。

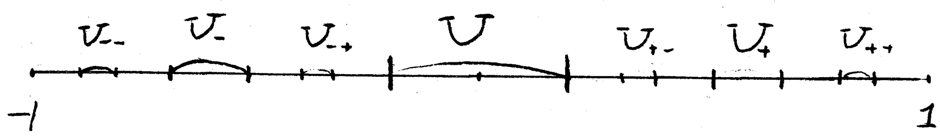
$n = 1$ のときは $-, +$ を $\mathbb{Z}_+ * \mathbb{Z}_+$ の生成元として、

$$\Phi(-)^1 = \frac{x+1}{2+\varepsilon} - 1 \qquad x \in [-1, 1]$$

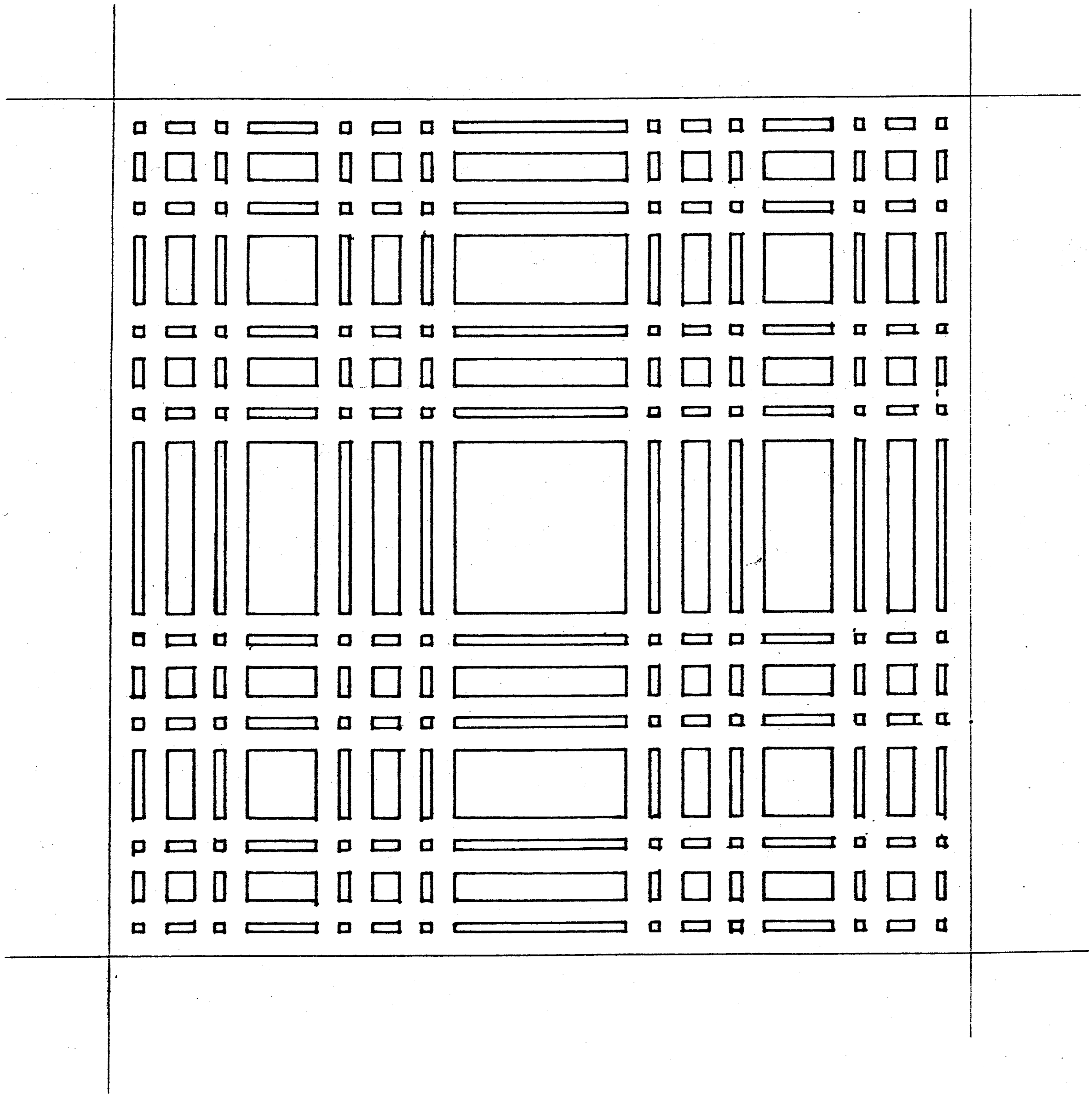
$$\Phi(+)^1 = \frac{x-1}{2+\varepsilon} + 1 \qquad x \in [-1, 1]$$

$$U = \left(\frac{-\varepsilon}{2+\varepsilon}, \frac{+\varepsilon}{2+\varepsilon} \right)$$

である。



$n \geqq 2$ のときにはこれの積作用を考える。



$\{\lambda \in \overset{n}{\times}(\mathbb{Z}_+ * \mathbb{Z}_+) ; l_1(\lambda) = \cdots = l_n(\lambda)\} \cong \overset{2^n}{*} \mathbb{Z}_+$ また

$\{\lambda \in \overset{n}{\times}(\mathbb{Z}_+ * \mathbb{Z}_+) ; l_1(\lambda) = \cdots = l_{[n/2]}(\lambda),\ l_{[n/2]+1}(\lambda) = \cdots = l_{2[n/2]}(\lambda),$

$(l_{2[n/2]+1}(\lambda) = 0$ n が奇数のとき$)\} \cong (\overset{2^{[n/2]}}{*} \mathbb{Z}_+) \times (\overset{2^{[n/2]}}{*} \mathbb{Z}_+)$

だから、Φ から、$\overset{2^n}{*}\mathbb{Z}_+$, $\overset{2}{\times}(\overset{2^{[n/2]}}{*}\mathbb{Z}_+)$ からの準同型を構成できる。

§7.

$\mathbb{R}^n$ に前節の U, Φ をとり、部分半群 $\overset{2^n}{*}\mathbb{Z}_+$ の生成元の集合を $B = \{\beta\}$ とする。1次元単体 $\sigma : \Delta^1 \longrightarrow \mathrm{Diff}^r_c \mathbb{R}^n$ をとる。$\mathrm{Supp}\, \mathcal{F}_\sigma \subset U$ とする。σ の 2^n 細分 $s\sigma$ をとる。これは 2^n 個の単体の和だから、添え字集合 $\{\beta\}$ により添え字をつける。

$$s\sigma = \sum_\beta s_\beta \sigma.$$

$\Phi(\beta)^{-1} s_\beta \sigma$ は $\Phi(\beta)^{-1}(U)$ に台をもつ。さらに $\Phi(\beta)^{-1} s_\beta \sigma$ を 2^n 細分する。 $s\Phi(\beta(1))^{-1} s_{\beta(1)}\sigma = \sum_{\beta(2)} s_{\beta(2)} \Phi(\beta(1))^{-1} s_{\beta(1)} \sigma$

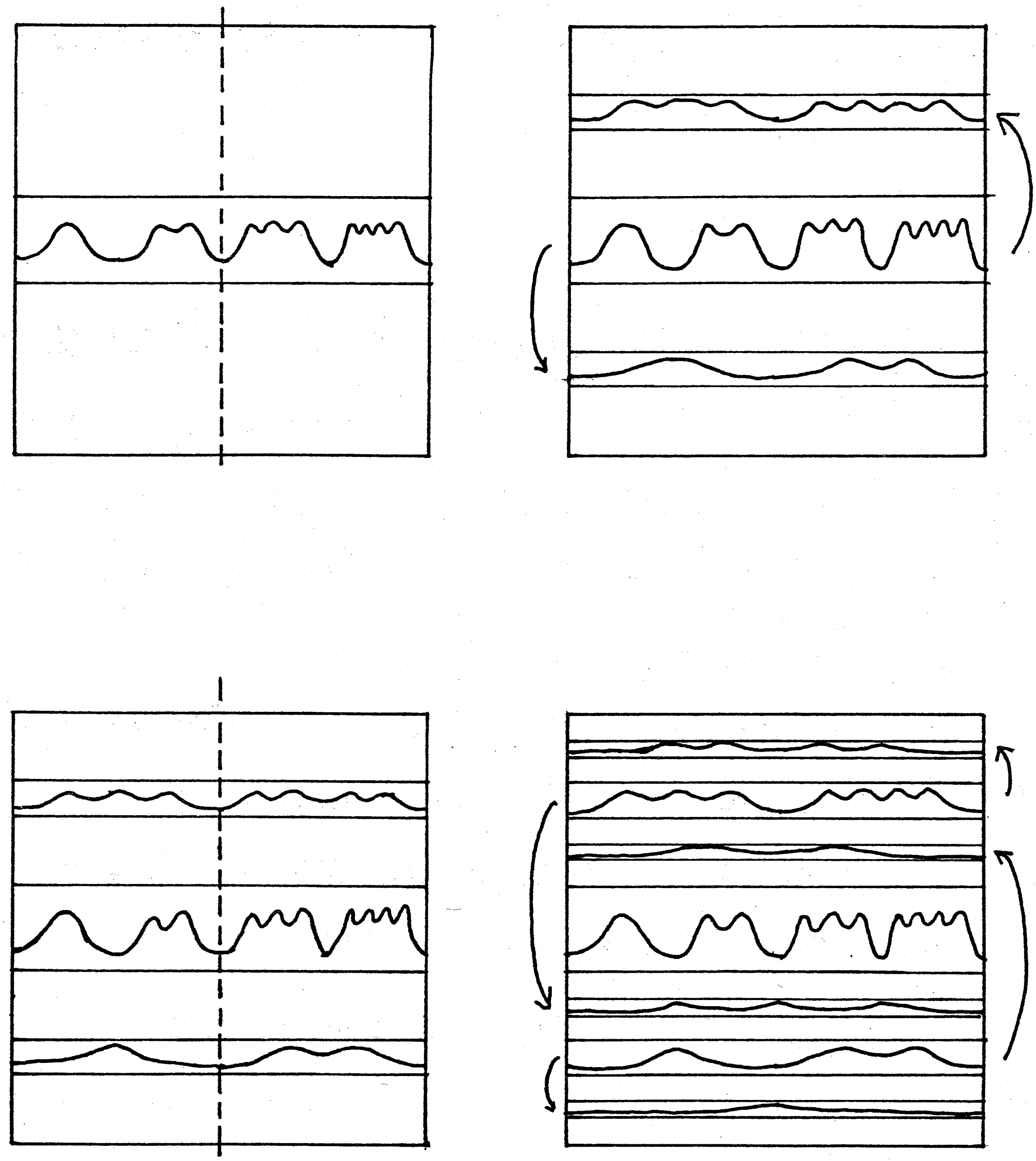
$\Phi(\beta(2))^{-1} s_{\beta(2)} \Phi(\beta(1))^{-1} s_{\beta(1)} \sigma$ は $\Phi(\beta(2)\beta(1))^{-1}(U)$ に台をもつ。以下同様にくりかえし、$\Phi(\beta(k) \cdots \beta(1))^{-1}(U)$ に台をもつ

$$\sigma_{\beta(k)\cdots\beta(1)} = \Phi(\beta(k))^{-1} s_{\beta(k)} \cdots\cdots \Phi(\beta(1))^{-1} s_{\beta(1)} \sigma$$

が得られる。さて、

$$I\sigma = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \sigma_\lambda \qquad \Lambda = \overset{2^n}{*}\mathbb{Z}_+ \quad \text{とおく。}$$

$I\sigma$ は $r-1 < n$, ε が十分小ならば C^r である。なぜならば、s_β はノルムを 2^{-n} 倍し、$\Phi(\beta)^{-1}$ は $(2+\varepsilon)^{r-1}$ 倍するから



である。

このIσに対し、次が成立する。

$$sI\sigma = \sum_{\beta} s_\beta I\sigma$$

$$\Phi(\beta)^1 s_\beta I\sigma = \bigcup_{\lambda\in\beta\Lambda} \sigma_\lambda$$

$$I_\sigma = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \sigma_\lambda = \sigma \cup \bigcup_{\beta\in B}\Big(\bigcup_{\lambda\in\beta\Lambda}\sigma_\lambda\Big).$$

最後の分解に対応する$\bar{p}$をとれば、

$$\bar{p}(I_\sigma) = \sigma + \sum \Phi(\beta)^1 s_\beta I\sigma$$

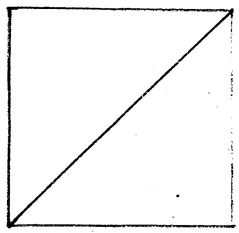
となる。ゆえに

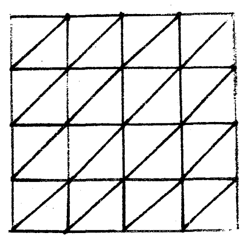
$$\sigma = \partial\Big(SI\sigma + \sum C_{\Phi(\beta)^1} s_\beta I_\sigma - PI\sigma\Big)$$

と書かれる。これはMatherによる $r<n+1$ のとき$H_1(B\overline{\mathrm{Diff}}{}^r_c\mathbb{R}^n)=0$という結果の別証になっている。

σに対しIσを構成する上の方法は高次元鎖に対しても拡張できる。2次元の場合、特異単体$\Delta^2 \longrightarrow \mathrm{Diff}^r_c\mathbb{R}^n$を考えるより特異立方体 $Q:[0,1]^2 \longrightarrow \mathrm{Diff}^r_c\mathbb{R}^n$ を考える方が良い。任意の2次元輪体は、その重心細分において、もとの単体内のもとの頂点の星状複体をとれば、特異立方体の和とホモローグであることがわかる。

$\mathbb{R}^n$に前節のU, Φをとり部分半群 $\big(\overset{2^{[n/2]}}{*}\mathbb{Z}_+\big)\times\big(\overset{2^{[n/2]}}{*}\mathbb{Z}_+\big)$ の第1成分Λ_1，第2成分Λ_2の生成元の集合を$B_1=\{\beta_1\}$, $B_2=\{\beta_2\}$とする。2次元特異立方体$Q:[0,1]^2 \longrightarrow \mathrm{Diff}^r_c\mathbb{R}^n$をとる。Qの台は$U$に含まれているとする。Qの$2^{[n/2]}$細分$sQ$をとる。





sQ は $(2^{[n/2]})^2$ 個の立方体の和になるが、この上の辞書式順序をとり Λ_1, Λ_2 の生成元の集合 B_1, B_2 の積集合 $B_1 \times B_2$ にも辞書式順序をとって、これにより sQ の立方体に添え字をつける。

$$sQ = \sum_{\beta_1 \in \Lambda_1, \beta_2 \in \Lambda_2} s_{\beta_1 \beta_2} Q.$$

$\Phi(\beta_1, \beta_2)^{-1} s_{\beta_1, \beta_2} Q$ は $\Phi(\beta_1, \beta_2)^{-1}(\bar{U})$ に台をもつ。これを細分し、(β_1, β_2) 成分を $\Phi(\beta_1, \beta_2)$ でうつす操作をくりかえすと、

$\Phi(\beta_1(k) \cdots \beta_1(1), \beta_2(k) \cdots \beta_2(1))^{-1}(\bar{U})$ に台をもつ

$$Q_{\beta_1(k) \cdots \beta_1(1), \beta_2(k) \cdots \beta_2(1)} = \Phi(\beta_1(k), \beta_2(k))^{-1} s_{\beta_1(k) \beta_2(k)} \cdots \Phi(\beta_1(1), \beta_2(1))^{-1} s_{\beta_1(1) \beta_2(1)} Q$$

が定まる。

$$I_{12} Q = \bigcup_{\lambda_1 \in \Lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_2, l(\lambda_1) = l(\lambda_2)} Q_{\lambda_1, \lambda_2}$$

とおく。l は語の長さである。この $I_{12}Q$ は、$r-1 < [n/2]$, ε が十分小のとき L^r となる。$s_{\beta_1 \beta_2}$ はノルムを $2^{-[n/2]}$ 倍し、$\Phi(\beta_1, \beta_2)$ は $(2+\varepsilon)^{r-1}$ 倍するからである。この $I_{12}Q$ に対し：

$$s I_{12} Q = \sum s_{\beta_1 \beta_2} I_{12} Q$$

$$\Phi(\beta_1, \beta_2)^{-1} s_{\beta_1 \beta_2} I_{12} Q = \bigcup_{\lambda_1 \in \beta_1 \Lambda_1, \lambda_2 \in \beta_2 \Lambda_2, l(\lambda_1) = l(\lambda_2)} Q_{\lambda_1, \lambda_2}.$$

$$I_{12} Q = Q \cup \bigcup_{(\beta_1, \beta_2) \in B_1 \times B_2} \Phi(\beta_1, \beta_2)^{-1} s_{\beta_1, \beta_2} I_{12} Q.$$

がいえる。ところが、このことから2次元ホモロジー群が零であると結論を出すことはできない。Qから $I_{12}Q$ を構成するという作用は境界作用子と可換という性質を持たないために、輪体から構成したものが輪体とならないためである。1次元の場合には全ての鎖が輪体でありうまくいったのである。

次の場合にはうまくいくことに注意する。$Q=\tau_1\times\tau_2$, $\tau_1,\tau_2:[0,1]\longrightarrow \mathrm{Diff}^r_c R^n$, $\mathrm{Int\,Supp}\,\tau_1\cap\mathrm{Int\,Supp}\,\tau_2=\phi$. と書かれているとする。但し、$(\tau_1\times\tau_2)(t_1,t_2)=\tau_1(t_1)\tau_1(0)^{-1}\tau_2(t_2)\tau_2(0)^{-1}$。この時 Q は2次元輪体である。細分などによって $Q=\tau_1\times\tau_2$ と書かれているという性質は不変だから、$I_{12}Q$ も2次元輪体となる。このとき、$I_{12}Q=Q\cup\bigcup_{(\beta_1,\beta_2)}\Phi(\beta_1,\beta_2)^2 s_{\beta_1,\beta_2}I_{12}Q$ という分解に対応する P をとると、

$$\partial\left(S(I_{12}Q)+\sum C_{\Phi(\beta_1,\beta_2)^2}s_{\beta_1,\beta_2}I_{12}Q-PI_{12}Q\right)$$
$$=Q+\square$$

となる。ここで $\square$ は $\tau_1\times\tau_2$ で $\mathrm{Supp}\,\tau_1$, $\mathrm{Supp}\,\tau_2$ を含みたがいに交わらない開球体が存在するもののいくつかの和である。このような $\tau_1\times\tau_2$ は $H_2(B\overline{\mathrm{Diff}}{}^r_c R^n;\mathbb{Z})=0$ $(r-1<[n/2]<n)$ により零にホモローグであるから、Q は零にホモローグである。$Q=\partial BQ$ と書ける。

§ 8.

前節の Q, $I_{12}Q$ を標準的に輪体におきかえることを考える。$Q:[0,1]^2 \longrightarrow D_i H^r_c R^n$ に対し、$\partial_1 Q$ を $\partial[0,1]\times[0,1] \to [0,1]^2$ と Q との結合、$\partial_2 Q$ を $[0,1]\times\partial[0,1] \longrightarrow [0,1]^2$ と Q との結合と定義する。$\partial Q = -\partial_1 Q + \partial_2 Q$ となる。$\partial_2 Q$ には Λ_1 を使って前節のように $\partial_2 Q$ を境界とする2次元鎖 $A_1(\partial_2 Q)$ を構成し、$-\partial_1 Q$ には Λ_2 を使って $A_2(\partial_1 Q)$ を構成する。同じようにして、$A_1 \partial_2 I_{12} Q$, $A_2(-\partial_1) I_{12} Q$ を定義して、2次元輪体
$I_{12}Q - A_2(-\partial_1) I_{12} Q - A_1(+\partial_2) I_{12} Q$ の存在から、$Q - A_2(-\partial_1) Q - A_1(+\partial_2) Q$ が零にホモローグであることを示すのである。少し記号の準備が必要である。(A_1, A_2 の存在のためには $r < [\frac{n}{2}]$ 即ち $2(r+1) \le n$ が必要となる。)

s_1 を $[0,1]^2$ を $t_1 = j/2^{[n/2]}$ $j = 1, \cdots, 2^{[n/2]}-1$. で分割するのに対応する細分とする。$t_2$ 方向に細分するのは s_2 と書く。それぞれ,
$$id - s_1 = \partial S_1 + S\partial_2$$
$$id - s_2 = \partial S_2 + S(-\partial_1)$$
をみたす。

$\bar{p}$ は $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ の分割に対応して色々と出てくる。第5節の定義の中で $\bar{p}\sigma = s \cup \sigma_j \cdot w_j = \sum \sigma_j + \square$ となるが $\sum \sigma_j = p\sigma$ とおく. 2次元の場合 $\square = (\bar{p} - p)\sigma$ は $\tau_1 \times \tau_2$ の形の2次元輪体の和である。さて、$\bar{p}$, p, P で $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ の次の分解に対応するものは次の様な添え字をつけて表わす。

$$\Lambda_1 \times \Lambda_2 = \{(e,e)\} \cup \{(\lambda_1,\lambda_2)\,;\,(\lambda_1,\lambda_2) \neq (e\ e)\}, \qquad p_{12}$$

$$\Lambda_1 \times \Lambda_2 = \{(\lambda_1\ \lambda_2)\,;\, l(\lambda_1) = l(\lambda_2)\} \cup \{(\lambda_1,\lambda_2)\,;\, l(\lambda_1) \neq l(\lambda_2)\}. \qquad p_{12}^d$$

$$\Lambda_1 \times \Lambda_2 = \{(e,\lambda_2)\,;\ \lambda_2 \in \Lambda_2\} \cup \{(\lambda_1,\lambda_2)\,;\ \lambda_1 \neq e\} \qquad p_1^d$$

$$\Lambda_1 \times \Lambda_2 = \{(\lambda_1, e)\,;\ \lambda_1 \in \Lambda_1\} \cup \{(\lambda_1,\lambda_2)\,;\ \lambda_2 \neq e\} \qquad p_2^d$$

$$\{(\lambda_1,\lambda_2)\,;\ \lambda_1 \neq e\} = \bigcup_{\beta_1 \in B_1} \{(\lambda_1,\lambda_2)\,;\ \lambda_1 \in \beta_1\Lambda_1,\ \lambda_2 \in \Lambda_2\} \qquad p_1$$

$$\{(\lambda_1,\lambda_2)\,;\ \lambda_2 \neq e\} = \bigcup_{\beta_2 \in B_2} \{(\lambda_1,\lambda_2)\,;\ \lambda_1 \in \Lambda_1,\ \lambda_2 \in \beta_2\Lambda_2\} \qquad p_2$$

$$\{(\lambda_1,\lambda_2)\,;\ \lambda_1 \neq e\} = \{(\lambda_1,\lambda_2)\,;\, l(\lambda_1) = l(\lambda_2)+1\} \cup \{(\lambda_1,\lambda_2)\,;\, l(\lambda_1) \neq l(\lambda_2)+1,\ \lambda_1 \neq e\} \qquad p_{12}^{d1}.$$

また $Q_1 = \bigcup_{\beta_1 \in B_1} Q_{\beta_1 e}$ とおく。$Q_{12} = \bigcup_{\beta_1 \in B_1} \bigcup_{\beta_2 \in B_2} Q_{\beta_1\beta_2}$.

輸体 X, Y, Z に対し、$X \xrightarrow{Z} Y$ とは、

$X - Y = \partial Z$ となることとする。

以上の準備のもとで、次の様子を得る。ただし、

$\tau : [0,1] \longrightarrow \mathrm{Diff}_c^r \mathbb{R}^n$ で τ の台は $\overline{\bigcup_{l(\lambda_1)=l(\lambda_2)} \Phi(\lambda_1,\lambda_2)(U)}$ に

含まれ $r < [\frac{n}{2}]$ とする。

$(2(r+1) \leq n.)$

また I_1 は Λ_1 を使う構成である。$C_{\Phi(\beta_1)^1}$ を C_{β_1} と書く。

$\tau_1 = \bigcup_{\beta_1 \in B_1} \tau_{\beta_1}$.

$$
\begin{tikzcd}
I_1 \tau \arrow[r, "P^{d}_{12} I_1 \tau"] \arrow[d, "S I_1 \tau"] & p^{d}_{12} I_1 \tau = \tau + I_1 \tau_1 \arrow[d, "S\, p^{d}_{12} I_1 \tau"] \\
s\, I_1 \tau \arrow[r, "P^{d}_{12} s\, I_1 \tau"] \arrow[d, "\sum C_{p_1} s_{p_1} I_1 \tau"] & p^{d}_{12} s\, I_1 \tau = s\tau + s\, I_1 \tau_1 \arrow[d, "\sum C_{p_1} p^{d}_{12} s_{p_1} I_1 \tau"] \\
p_1 I_1 \tau_1 \arrow[r, "P^{d1}_{12} p_1 I_1 \tau"] \arrow[d, "-P_1 I_1 \tau_1"] & p^{d1}_{12} p_1 I_1 \tau_1 = p_1 \tau_1 + p_1 I_1 \tau_{11} \arrow[d, "-P_1 p^{d1}_{12} I_1 \tau_1"] \\
I_1 \tau_1 \arrow[r, "P^{d1}_{12} I_1 \tau_1"] \arrow[d, "S I_1 \tau_1"] & p^{d1}_{12} I_1 \tau_1 = \tau_1 + I_1 \tau_{11} \arrow[d, "S\, p^{d1}_{12} I_1 \tau_1"] \\
s\, I_1 \tau_1 \arrow[r, "P^{d1}_{12} I_1 \tau_1"] \arrow[d] & p^{d1}_{12} s\, I_1 \tau_1 = s\tau_1 + s\, I_1 \tau_{11} \arrow[d] \\
\vdots & \vdots
\end{tikzcd}
$$

この梯子を右上から左上へ行き下に3段下がることにより、

$$\tau = \partial(-P_{12}^{d} I_1 \tau + S I_1 \tau + \sum C_{\beta_1} s_{\beta_1} I_1 \tau - P_1 I_1 \tau_1)$$

を得る。これを $\tau = \partial A_1 \tau$ と書く。この A_1 は $2(r+1) \leq n$ の時存在する。同じ方法で、 $s\tau = \partial A_1^s s\tau$, $p_1 \tau_1 = \partial A_1^p (p_1 \tau_1)$, $\tau_1 = \partial A_1' \tau_1$ を得る。

また、梯子の一つの矩形の周囲は、3次元鎖の境界になっている。それぞれ反時計回りに見て上から順に次のものの境界である。

$$P_{12}^{d} S I_1 \tau + B(\bar{p}_{12}^{d} - p_{12}^{d}) S I_1 \tau ,$$

$$-\sum C_{\beta_1} P_{12}^{d} s_{\beta_1} I_1 \tau ,$$

$$P_1 P_{12}^{d1} I_1 \tau_1 + B(\bar{p}_1 - p_1) P_{12}^{d1} I_1 Q_1 .$$

さらに、梯子の左側の4段目より下は右側の1段目より下の一部となっていることに注意すると、

$$S\tau - A_1 \tau + A_1^s s\tau$$

$$\sum C_{\beta_1} s_{\beta_1} \tau - A_1^s s\tau + A_1^p p_1 \tau_1$$

$$-P_1 \tau_1 - A_1^p p_1 \tau_1 + A_1' \tau_1$$

も3次元鎖の境界として書かれることがわかる。

Λ_2 を使っても、同様の梯子を得、$A_2 \cdots$ が定義される。

$I_{12} Q : [0,1]^{\sim} \longrightarrow \mathrm{Diff}_c^r \mathbb{R}^{\sim}$ について構成した

$I_{12} Q - A_2(-\partial_1) I_{12} Q - A_1(+\partial_2) I_{12} Q$ に関して次を得る。

$$I_{12}Q - A_2(-\partial_1)I_{12}Q - A_1(+\partial_2)I_{12}Q$$

$$\Big\downarrow\; S_1 I_{12}Q - P^d_{12} S\, I_1(+\partial_2)I_{12}Q - B(\bar{p}^d_{12} - p^d_{12}) S\, I_1(+\partial_2)I_{12}Q.$$

$$s_1 I_{12}Q - A_2(-\partial_1)s_1 I_{12}Q - A^s_1(+\partial_2)s_1 I_{12}Q$$

$$\Big\downarrow\; \sum C_{\beta_1} s_{\beta_1} I_{12}Q + \sum C_{\beta_1} P^d_{12} s_{\beta_1} I_1(+\partial_2) I_{12}Q - \sum C_{\beta_1} A_2(-\partial_1) s_{\beta_1} I_{12}Q$$

$$p_1 I_{12}Q_1 - A^1_2(-\partial_1)p_1 I_{12}Q_1 - A^p_1(+\partial_2)p_1 I_{12}Q$$

$$\Big\downarrow\; -P_1 I_{12}Q_1 + P_1 A^1_2(-\partial_1)I_{12}Q_1 - P_1 P^{d1}_{12} I_1(+\partial_2)I_{12}Q_1 - B(\bar{p}_1 - p)P^{d1}_{12} I_1(+\partial_2)I_{12}Q_1$$

$$I_{12}Q_1 - A^1_2(-\partial_1)I_{12}Q_1 - A^1_1(+\partial_2)I_{12}Q_1$$

ゆえに、$I_{12}Q - A_2(-\partial_1)I_{12}Q - A_1(+\partial_2)I_{12}Q$ は $I_{12}Q_1 - A^1_2(-\partial_1)I_{12}Q_1 - A^1_1(+\partial_2)I_{12}Q_1$ とホモローグである。同様に、$I_{12}Q_1 - A^1_2(-\partial_1)I_{12}Q_1 - A^1_1(+\partial_2)I_{12}Q_1$ は $I_{12}Q_{12} - A_2(-\partial_1)I_{12}Q_{12} - A_1(+\partial_2)I_{12}Q_{12}$ とホモローグであることが示される。一方、

$$I_{12}Q - A_2(-\partial_1)I_{12}Q - A_1(+\partial_2)I_{12}Q$$

$$\Big\downarrow\; \begin{array}{l} P_{12}I_{12}Q - P^d_1 A_2(-\partial_1)I_{12}Q - P^d_2 A_1(+\partial_2)I_{12}Q \\ + B(\bar{p}_{12} - p_{12})I_{12}Q - B(\bar{p}^d_1 - p^d_1)A_2(-\partial_1)I_{12}Q - B(\bar{p}^d_2 - p^d_2)A_1(+\partial_2)I_{12}Q \end{array}$$

$$p_{12}I_{12}Q - A_2(-\partial_1)p_{12}I_{12}Q - A_1(+\partial_2)p_{12}I_{12}Q$$

により、$I_{12}Q - A_2(-\partial_1)I_{12}Q - A_1(+\partial_2)I_{12}Q$ は
$p_{12}I_{12}Q - A_2(-\partial_1)p_{12}I_{12}Q - A_1(+\partial_2)p_{12}I_{12}Q =$
$Q - A_2(-\partial_1)Q - A_1(+\partial_2)Q + I_{12}Q_{12} - A_2(-\partial_1)I_{12}Q_{12} - A_1(+\partial_2)I_{12}Q_{12}$
とホモローグである。ゆえに $Q - A_2(-\partial_1)Q - A_1(+\partial_2)Q$ は零にホモローグである。

§9.

前節の計算から $2(r+1) \leq n$ のとき、$H_2(B\overline{\mathrm{Diff}}{}^r_c\mathbb{R}^n ; \mathbb{Z}) = 0$ が証明できる。

$Q : [0,1]^2 \longrightarrow \mathrm{Diff}^r_c\mathbb{R}^n$ で、$\max\{t_1, t_2\} = t$ のとき、

$$Q(t_1, t_2) = \tau(t), \quad \tau : [0,1] \longrightarrow \mathrm{Diff}^r_c\mathbb{R}^n$$

c は定値写像

となるものをとる。$\partial_1 Q = \partial_2 Q = \tau - c$ となり、Q は輪体である。しかし、この Q は $C_2(B\overline{\mathrm{Diff}}{}^r_c\mathbb{R}^n)$ においては零である。この Q に対し、$Q - A_2(-\partial_1)Q - A_1(+\partial_2)Q \backsim 0$ ということは、$A_2(\tau - c) - A_1(\tau - c) \backsim 0$ を意味する。

$c^2 : \Delta^2 \longrightarrow \mathrm{Diff}^r_c\mathbb{R}^n$ を定値写像とすると、$A_1(c) - c^2$ は輪体となるが、A_1 の定義により $A_1(c) - c^2 = -\partial \sum C_{p,} c^2$ となることがわかる。$A_2(c) - c^2$ についても同様である。ゆえに $A_2\tau - A_1\tau$ は零にホモローグである。

以上により、U に台をもつ特異立方体のなす複体を $Q_*(B\overline{\mathrm{Diff}}{}^r_U\mathbb{R}^n)$ と書けば、次の図式を得る。

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} & Q_1(B\overline{\mathrm{Diff}}^r_U \mathbb{R}^n) \arrow[l, "0"'] \arrow[d, "i"] \arrow[dr, "A_1"] & Q_2(B\overline{\mathrm{Diff}}^r_U \mathbb{R}^n) \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d, "i"] \arrow[dr, "D"] & Q_3(B\overline{\mathrm{Diff}}^r_U \mathbb{R}^n) \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d, "i"] \\
\mathbb{Z} & C_1(B\overline{\mathrm{Diff}}^r_c \mathbb{R}^n) \arrow[l, "0"'] & C_2(B\overline{\mathrm{Diff}}^r_c \mathbb{R}^n) \arrow[l, "\partial"'] & C_3(B\overline{\mathrm{Diff}}^r_c \mathbb{R}^n) \arrow[l, "\partial"']
\end{tikzcd}
$$

ここで　$i_1 = \partial A_1$

$$i_2 = \partial D + A_1 \partial.$$

ゆえにこの複体の2次元ホモロジーまでに誘導される写像は自明である。$C_2(B\overline{\mathrm{Diff}}^r_c \mathbb{R}^n)$ の2次元輪体は $Q_2(B\overline{\mathrm{Diff}}^r_U \mathbb{R}^n)$ の2次元輪体にホモローグであるから、$H_2(B\overline{\mathrm{Diff}}^r_c \mathbb{R}^n; \mathbb{Z})=0$ となる。

§10.

我々の定理の $r=1$ の場合も同様の構成による証明である。このときは第6節の半群の作用のかわりに、Denjoy-Pixton の $\mathbb{Z}^N$ 作用をつかう。

ここで述べた証明は3次元以上のホモロジーの計算の場合に拡張できるように思われる。