数理解析研究所講究録
第479巻 1983年 163-173

〈問題集〉

本研究集会の最後にProblem Sessionを開いた。以下はその際集った問題を土屋信雄(東工大,理)が清書し、簡単な注と最小限のReference([…]内)を書き加えたものである。紙数の都合等により代表者との相談の上,短縮したり割愛したりした部分もあるが御容赦戴きたい。今後の研究への一助となれば幸いである。(研究代表者 水谷忠良)。

足立正久(京大理)

1. Lagrange foliation (= real polarization)の分類定理をつくれ!

2. Legendre foliation の分類定理をつくれ!

[(説明) (M^{2n}, ω)をsymplectic manifoldとする。M上のcodim. n foliation $\mathcal{F}$がLagrangean foliationとは$\mathcal{F}$の全ての葉LがLagrangean submanifoldであること(i.e., $i: L \to M$に対し$i^*\omega = 0$となること)。

Lagrangean foliation $\mathcal{F}$に対し,$\mathcal{F}$の分類写像 $g: M \to B\Gamma_n$と,$T\mathcal{F}$の分類写像 $h: M \to BO_n$があり,次の2つの図式がホモトピーの意味で可換となる。

(1)
$$\begin{tikzcd} & B\Gamma_n \times BO(n) \arrow[d, "\nu\times 1"] \\ & BO(n)\times BO(n) \arrow[d, "\oplus"] \\ M \arrow[uur, "g\times h"] \arrow[r, "\tau"'] & BO(2n) \end{tikzcd}$$

(2)
$$\begin{tikzcd} & BO(n) \arrow[d, "\sigma"] \\ M \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "J"] \arrow[dr, "\tau"'] & BU(n) \\ & BO(2n) \arrow[u, "\rho"'] \end{tikzcd}$$

この対応は，{M上の Lagrangean foliation の同値類の全体}から{(1)(2)をみたす $(g,h): M \to B\Gamma_n \times BO(n)$ の同値類の全体}への写像を引きおこす。問題1はこの写像が，全単射か？というもの。

問題2は contact structure に適合的な foliation について同様のことを考えよというもの。]

稲葉尚志（千葉大養）

1. S^2 − Cantor set は C^2 安定性をもつか？

注）C^1 安定性をもたないことは，Hirsch の例を modify することにより示される。

注）S^2 −（有限型の集合）は C^2 安定性をもつ。(Cantwell-Conlon)

2. 閉多様体上の余次元1 C^2 葉層構造の真葉 L が，$H^1(L;\mathbb{R})=0$ をみたすなら，ホロノミーをもたないか？

注）$\pi_1(L)$ 有限生成かつ $H^1(L;\mathbb{R})=0$ ならホロノミーを持たない。(Thurston)

三松佳彦（東大理）

Σ_g を種数 g の有符号閉曲面，h を Σ_g の負曲率 Riemann 計量，$S^1\Sigma_g$ を (Σ_g, h) の単位球面バンドル，φ_t をその測地流とする。φ_t は $S^1\Sigma_g$ 上の Anosov 流であり，その不安定葉層構造が存在する。以下これを Anosov 葉層と呼び，$\mathcal{F}_h$ と書く。

Problem 1. h が定負曲率でなくても，Anosov 葉層 $\mathcal{F}_h$ が C^2 級のものがあるか？

Problem 1'. Godbillon－Vey 数は位相不変か？

注1) h が定負曲率であれば $\mathcal{F}_h$ は C^∞ 級。一般には C^1 級であることしか保証されない。（Anosov－Sinai，Hirsch－Palis－Shub）.

注2) Anosov 葉層は全て位相共役（Anosov）。また Anosov 葉層の G－V 数は h が定負曲率のとき極値をとる（三松）.
従って，Problem 1 が正しければ，G－V 数は位相不変でない。

Problem 2 Σ_g 上の flat S^1 バンドルの Euler 数が，G.V. 数に影響を与えるか？ より具体的に，

2a). バンドル $S^1\Sigma_g \to \Sigma_g$ 上の flat structure（＝葉層バンドル）$\mathcal{F}$ で，$|GV(\mathcal{F})| \neq 4\pi^2|\chi(\Sigma_g)|$ となるものがあるか？

2b) 同じ状況下に $|GV(\mathcal{F})| \geqq 4\pi^2|\chi(\Sigma_g)|$ か？

注1) S^1バンドル$E\to\Sigma_g$に flat structure が存在する為の必要十分条件は $|\mathrm{Euler}(E\to\Sigma_g)[\Sigma_g]|\leqq|\chi(\Sigma_g)|$ であること(Milnor-Wood)

2) $|\mathrm{Euler}(E\to\Sigma_g)[\Sigma_g]|\leqq|\chi(\Sigma_g)|-2$ なら，任意の実数値を GV としてとるような flat structure が存在する。(Thurston)

3) $|\mathrm{Euler}(E\to\Sigma_g)[\Sigma_g]|=|\chi(\Sigma_g)|-1$ のときも，flat structure を動かして，GV を連続的に変化させられるが，向きを固定すると，片側には GV をいくらでも動かせるが，任意の実数値をとらせられるかどうかはわからない。

4) $|\mathrm{Euler}(E\to\Sigma_g)[\Sigma_g]|=|\chi(\Sigma_g)|$，即ち $E\approx S^1\Sigma_g$ のときは，知られている flat structure では $GV=\pm 4\pi^2\chi(\Sigma_g)$。

[三松：東京大学修士論文(1981年度)]

水谷忠良(埼玉大理)

1 Godbillon-Vey form が 0 にとれる foliation を characterize せよ。とくにそれは，foliated cobordant to zero か?

cf. All leaves proper with finite compact leaves の almost without holonomy foliation ならば GV form = 0 にとれる。（Sergiescu ; Lille 大学修士論文 1981）またそれは cobordant to zero である。（Mizutani - Morita - Tsuboi）

2, 西森－土屋 foliations（P.A. foliations）は torus 上の foliated S^1 bundle に cobordant になるか？

3, $\forall M^n$, $\chi(M^n) = 0$ に almost without holonomy の foliation が存在するか？

（without holonomy → S^1 上の fiber bundle）

森田茂之（東大教養）

よく知られているように，トーラス上の線形葉層は，その勾配が有理数か否かで様相が一変する。このような現象は葉層構造のように連続変化の自由度の大きいものを扱うときにはさけて通れない。（ホモトピー論的には $\mathbb{R}$ 上のホモトピー論は $\mathbb{Q}$ 上のそれにくらべて格段にむずかしいことに反映する）この現象を 定性理論，特性類，コボルディズム，flat G（= Lie 群，Diff M etc）バンドルの理論との関連のもとに調べよ。

夏目裕子（東工大理）

f, g を $\mathbb{R}^1$ の，原点を保つ，C^∞- orientation preserving diffeomorphisms とする。次の問題は基本的である。

問題　f と g はいつ，原点での germ として共役か？

i.e., C^∞ diffeo. h で $hfh^{-1}=g$ を原点の近傍で，成立させるものが存在するか？

$j_0^\infty f = j_0^\infty g \neq j_0^\infty id$ の時，f と g は共役（Sternberg Takens）．そこで $j_0^\infty f = j_0^\infty g = j_0^\infty id$ の時を考える。さらに，原点の近くでは contraction であり，fixed points は $x \leqq 0$ の部分のみであるものを考える。即ち，$D_\infty^c = \{ f : (\mathbb{R}^1, 0) \to (\mathbb{R}^1, 0)$ C^∞-diffeo $\mid$ $Fix(f) = (-\infty, 0]$, $f(x) \leq x$, $(\forall x)$, $f(x) = x + c$ $(c<0$，定数，$x \geqq 1)\}$ を考える。$D_\infty^c \ni f$ に対し，$\Delta^f(x) = x - f(x)$，$\Delta_0^f(x) = \sup_{0 \leq y \leq x}(y - f(y))$ とおく。$\alpha(f) = \inf\{\alpha \mid \Delta_0^f(x) \underset{(f)}{\leq} \{\Delta^f(x)\}^{1-\alpha}\}$ とする。但し，$\underset{(f)}{\leq}$ とは f のみによる定数をかければ不等号が成立すること。$0 \leqq \alpha(f) \leqq 1$ である。

α が minimum をとるとき，$\alpha_{min}(f)$，そうでないとき $\alpha_{inf}(f)$ と書く。$A_{\alpha,*} = \{ f \in D_\infty^c \mid \alpha_*(f) = \alpha \}$ $(* = \min$ or $\inf)$ とおく。α_* は次の性質をみたす。

① $0 < m \leq M$ なる定数が存在して，$m(x - f(x)) \leq x - g(x) \leq M(x - f(x))$ をみたせば $\alpha_*(f) = \alpha_*(g)$．

② $\alpha_*(hfh^{-1}) = \alpha_*(f)$

③ $f\circ g = g\circ f \Rightarrow \alpha_*(f) = \alpha_*(g)$

④ $A_{\alpha,*} \neq \phi \quad \forall \alpha \in [0,1]$.

注) これより，互いに共役でないdiffeoは連続の濃度以上あることがわかる。

問題1 $\alpha_*(f) = \alpha_*(g) \neq 1$ のとき f と g は共役か？

注1) $\alpha_* = 1$ の時は反例あり（Sergeraertのrootのないdiffeoの例より）

注2) 次の評価式をみたせば，問題1は正しい。（夏目）

$$|f(x) - g(x)| \underset{(f,g,r)}{\leqq} (x - f(x))^r, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall r \geqq 0, \text{整数}$$

問題2 $\alpha \neq 1$ のとき，$A_{\alpha,*}$ の元でrootを持たないものがあるか？

問題3 $f\circ g = g\circ f$ のとき，f と g は共役か？

問題4（Sergeraert）G_∞^c = {原点で無限にId.と接しているcontracting diffeoのgermの全体} とする。

$BG_\infty^c \sim B\Gamma_1^\infty$ (weak homotopy equivalent) か？

[cf. Natsume Preprint]

西森敏之（北大理）

1 $\Sigma_2 - \mathring{D}^2$ 上のnon-singular vector fieldに対し

て, "rotation number" を定義せよ。

[$\Sigma^2 - \mathring{D}^2$ 上の non-singular vector field はいつ exceptional minimal set をもつか?]

2. Octahedral web を分類せよ。

[octahedral web は, ほぼ分類されている。

T. Nishimori : Octahedral webs on closed manifolds, Tôhoku M. J. 32 (1980) 399-410

T. Nishimori ; Some remarks on octahedral webs, J. J. M. 7 (1981) 169-179]

3. M : parallelizable とするとき, M はいつ multifoliation をもつか?

鈴木治夫 (北大理)

次元 $n>0$ の任意のリー群に対し, 0でない葉不変量 h_i をもつ軌道葉層を構成せよ。

[本文参照]

坪井俊 (東大理)

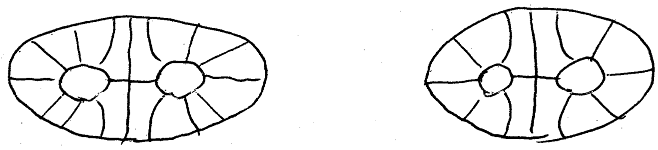
1. $H_2(B\overline{\Gamma}_1^\omega ; \mathbb{Z}) = 0$ か?

Facts i) $B\overline{\Gamma}_1^\omega$ は $K(\pi, 1)$ space

ii) $H_1(B\overline{\Gamma}_1^\omega) = 0$ (Haefliger)

iii) $H_1(\mathrm{Diff}_+^{\omega} S^1) = 0$ (Arnold)

iv) $H_2(B\overline{\Gamma}_1^{\omega}; \mathbb{Z})$ の generator は，次のもの



2 pairs of pants with real analytic foliations as above を，境界ではりあわせたもの。

2. $H_2(B\overline{\mathrm{Diff}}_c^r \mathbb{R}^2) = ?$ $r \geq 2$

i) $\mathbb{R}^2$ 上の commuting vector field ξ_1, ξ_2 により生成される写像 $\mathbb{R}^2 \to \overline{\mathrm{Diff}}_c^r \mathbb{R}^2$ は H_2 で 0-map か？

[$\mathbb{R} \to \overline{\mathrm{Diff}}_c^{\infty} \mathbb{R}^n$ は H_* で trivial ; Tsuboi; On the homomorphism $H_*(B\mathbb{R}_d) \to H_*(B\mathrm{Diff}_K^{\infty}(\mathbb{R})_d)$ preprint IHES 1982]

ii) Int supp $f_1 \cap$ Int Supp $f_2 = \phi$ のとき $(f_1, f_2) - (f_2, f_1) \sim 0$ か？

iii) $S^1 \ni \theta$ で parametrize された Σ^2 上の foliated S^1 bundle の family $\mathcal{F}_\theta$ $(\theta \in S^1)$ で定義される codim 2 foliation は cobordant to zero か？

GV : $H_3 B\overline{\Gamma}_1 \to \mathbb{R}$ の injectivity と，foliation が連続的に動くとき cobordism も連続的に動くことを仮定して，iii) が示せるか？

3 G を Lie 群，$\mathfrak{g}$ をその Lie algebra とする。

$H_*(\mathfrak{g}) \simeq H_*(B\overline{G})$ か．（Haefliger）

4 $\mathbb{R}^3$ の standard でない contact structure に transverse な codim. 1 foliation があるか？

［異種接触構造については；D. Bennequin；Entrelacements et équations de Pfaff；preprint］

5 S^2 の，identity に近い commuting diffeo は共通の fixed point をもつか．

土屋信雄　（東工大 理）

M^n を n 次元閉多様体，$\mathcal{F}$ を M 上の，codim 1，C^r 級葉層（$r \geqq 2$），X を $\mathcal{F}$ の例外的極小集合とする。このとき，X の Hausdorff 次元 $> n-1$ か？

大和健二　（阪大 養）

1 conformal foliation，projective foliation 等は，C^∞-foliation と，どのような定性的な違いがあるか？

2 $R\mathcal{F}\Omega^3_2 \xrightarrow{(h_x \cdot x,\ h_x \cdot v)} \mathbb{R}^2$ は同型か？

［本文参照］

矢野公一　（東大理）

1　Seifert予想；　S^3上の任意のC^r flowは閉軌道をもつ。

注）1°　Hopf fibrationのC^0摂動に関して正しい(Seifert)

2°　C^1 flowでは反例がある　(Schweitzer)

3°　J. Harrisonが次をannounceした；　C^2-flowでも反例がある。

2.　3次元多様体はいつReeb componentを含まない，余次元1葉層をもつか。特別の場合として，S^3にknotもしくはlinkが与えられたとき，これらをcoreとするReeb componentをもち，それ以外には，Reeb componentを持たない葉層をS^3に構成できるか。

注）1°　irreducibleで基本群が無限（従って特に$K(\pi,1)$）であることが必要（Novikov, Rosenberg-Roussarie）

2°　irreducibleなgraph manifold（適当に埋め込まれたT^2で切るとsurface×S^1に分解する）に関しては，S^3, $S^1\times D^2$, Lens space，S^2上のsingular fibre 3本のSeifert fibred spaceを除けば，このような葉層をもつ。