数理解析研究所講究録
第 480 巻 1983 年 12-19

代数の無限積と可測基数

筑波大学 数学系 江田勝哉
(Katsuya Eda)

アーベル群(以下群といえばアーベル群)あるいは環の無限積からある種の群あるいは環への準同型写像の表現定理には可測基数が関係することが知られている。ここでは、点、座標の代わりに、可算完備極大フィルター、超積を考えることにより表現定理その他に新しい見方を与え最小の可測基数(Mc)未満において成立が示されていた群の直積に関する定理の多くから基数に関する条件をとり除く手段を示す。但し、証明及び結果の多くは引用文献にゆずる。

Gをスレンダー群([F]の§94), $A_i\ (i\in I)$を群、Iの基数をMc未満とするとき、$\mathrm{Hom}(\prod_{i\in I}A_i, G)\simeq\bigoplus_{i\in I}\mathrm{Hom}(A_i,G)$はスレンダー群についてのJ. Łośによる有名な定理である。少し細かく言えば、$\pi_i:\prod_{i\in I}A_i\to A_i\ (i\in I)$を射影とするとき、すべての準同型写像$h:\prod_{i\in I}A_i\to G$に対して有限コの$i_1,\cdots,i_n\in I$と$h_{i_j}:A_{i_j}\to G\ (1\leq j\leq n)$(準同型写像)があって$h=\sum_{j=1}^{n}h_{i_j}\cdot\pi_{i_j}$が成立する

この定理は次のように拡張される。

定理1.【E_2】Gをスレンダー群、$\mathcal{F}$を$P(I)$上の可算完備極大フィルター全体とするとき、

$\mathrm{Hom}(\prod_{i\in I}A_i, G) \simeq \bigoplus_{F\in\mathcal{F}} \mathrm{Hom}(\prod_{i\in I}A_i/F, G)$ が成立する。

但し、$\prod_{i\in I}A_i/F$ は超積である。

少し細かく言うと、$\pi_F: \prod_{i\in I}A_i \longrightarrow \prod_{i\in I}A_i/F$ を標準的準同型写像とするとき、$h: \prod_{i\in I}A_i \to G$ に対して有限コの$\mathcal{F}$の元 $F_1, \cdots, F_n$ と $h_j: \prod_{i\in I}A_i/F_j \longrightarrow G$ があって $h = \sum_{j=1}^{n} h_j \cdot \pi_{F_j}$ が成立する。

これは、点、座標、射影の代わり可算完備極大フィルター、超積、標準的準同型写像を考えるということによる拡張である。さて無限積を~~定義~~定義域とする準同型写像に関する定理は S.U. Chase によるものがある。それは可算積に関するものであるが、それ及びそのversionは [D-Z], [G-B-W], [I] によりM_c未満の積に拡張されている。それは次のものである。

$|I| < M_c$ として $h: \prod_{i\in I}A_i \longrightarrow \bigoplus_{j\in J}G_j \ (= G)$ とするとある$m>0$ 有限集合$I' \subseteq I$, $J' \subseteq J$ があって

$$h'' m \prod_{i\in I-I'}A_i \subseteq \bigoplus_{j\in J'}G_j + \bigcap_{n\in N} nG \text{ が成立する。}$$

ここで $\prod_{i\in I-I'}A_i$, $\bigoplus_{j\in J'}G_j$ は 自然な意味で $\prod_{i\in I}A_i$, $\bigoplus_{j\in J}G_j$ の部分群とする。

つまり $\prod_{i\in I-I'}A_i$ の元xは、すべての$i\in I'$について $\pi_i(x)=0$

なるものである。そこで点の代わりに可算完備極大フィルターという見方で、これを書き換え次の定理を得る。

定理2 [E_2]. 準同型写像 $h : \prod_{i\in I} A_i \longrightarrow \bigoplus_{j\in J} G_j \ (= G)$ に対してある $m>0$, 有限集合 $J'\subseteq J$ と相異なる可算完備極大フィルター $F_1,\cdots,F_n$ が存在して、

$$h''\, m K_{F_1\cdots F_n} \subseteq \bigoplus_{j\in J'} G_j + \bigcap_{n\in N} nG$$

が成立する。但し、$x\in K_{F_1\cdots F_n} \longleftrightarrow \pi_{F_j}(x)=0$ for $1\le j\le n$.

ここで、$\prod_{i\in I}A_i / K_{F_1\cdots F_n} \simeq \prod_{i\in I}A_i/F_1 \oplus \cdots \oplus \prod_{i\in I}A_i/F_n$ である。

定理1、定理2と同じような考え方を使えるものについては、[E_3] を参照されたい。さてこのような見方は既に位相代数に関しては、明白にではないが知られていたといえる。そのことを少し説明しよう。

Xをチコノフ空間とし、νXをその実コンパクト化とする。すると任意の連続関数fについて、図式

$$\begin{tikzcd} \nu X \arrow[dr, dashed, "\exists! \hat{f}"] & \\ X \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

が成立する。

任意の非自明な環準同型写像 $\varphi : C(X,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して νXの元pが一意的に存在して、$\varphi(f)=\hat{f}(p)$ が成立することはよく知られている。ここでXをディスクリートなIとすれば、νIは$P(I)$上の可算完備極大フィルター全体である。よってここには点から可算完備極大フィルターという図式はある。

何故超積は現われないのであろうか。それは$F\in\mathcal{F}$に対して、$\mathbb{R}^I/F$は$\mathbb{R}$の濃度がM_c未満であるため$\mathbb{R}$と同型となり、又$\mathbb{R}$から$\mathbb{R}$への非自明環準同型写像は、同型写像のみであるので、$\mathbb{R}^I/F$と$\mathbb{R}$を同一視しているためである。実際次のような状況では 超積が環についても現われる。

乗法の単位1をもつ環$R_i\ (i\in I)$ 及びある条件を満たす環R（例えば、$\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$上の多項式環 など）に対して、$\varphi:\prod_{i\in I}R_i\to R$を~~非自明準同~~環準同型写像（但し $\varphi(1)=1$）とする。すると$P(I)$上の可算完備極大フィルターFと環準同型写像$h_F:\prod_{i\in I}R_i/F\to R$が一意に存在して、$\varphi=h_F\cdot\pi_F$が成立する。

ここで、Rの条件とは、乗法の単位1をもち、任意の環準同型写像 $\varphi:\mathbb{Z}^N\to R$（但し$\varphi(1)=1$）について、$n\in N$が一意的に存在して、$\varphi(x)=\varphi(e_n\cdot x)$が成立することである。但し、$e_n(m)=\delta_{mn}$. この条件は群の場合のスレンダー群の定義を環の場合に変形したものである。スレンダー群の特徴付けは Nunke（[F]の§95）によるきれいなものがある。筆者は上記の環の特徴付けを知らない。

問題1） 上記の環の特徴付けをせよ。

さて再び群の場合にもどろう。射影$\pi_i:\prod_{i\in I}A_i\to A_i$が超積への標準的準同型写像に比べ扱いやすいのは、$A_i$が$\prod_{i\in I}A_i$の

直和因子となるからである。後者の場合一般には$\prod_{i\in I}A_i$の直和因子と見なすことができない。しかし次のような場合それが可能になる。つまりある$\kappa < M_c$があってA_iの濃度がすべてκより小さい場合である。するとIの部分集合JでJの濃度が$2^\kappa (< M_c)$より小さいものがあって、どんな$i\in I$についてもある$j\in J$について$A_i \simeq A_j$が成立する。とくに、$j, j'\in J$ $j\neq j'$なら$A_j \not\simeq A_{j'}$とし、$i\in I_j \longleftrightarrow A_i \simeq A_j$とすれば$\{I_j ; j\in J\}$は$I$の互いに交わらない分割となる。可算完備極大フィルターFについて、$I_j\in F$なるjが一意的に存在することに注意しよう。又そのとき$\prod_{i\in I}A_i/F \simeq A_j$である。そこで$\pi_F$を$\pi_F : \prod_{i\in I}A_i \longrightarrow A_j$とする。次に$\prod_{i\in I}A_i$の部分群$C_j$を

$$x\in C_j \longleftrightarrow \begin{cases} x(i)=0 & \text{for } i\in \bigcup_{k\neq j} I_k \text{ で} \\ x(i)=x(i') & \text{for } i, i'\in I_j \text{ とする。} \end{cases}$$

但し、ここで$i\in I_j$について$A_i = A_j$とみなす。

さて、$\pi_F^* : \prod_{i\in I}A_i \longrightarrow C_j$を

$$\pi_F^*(x)(i) \begin{cases} = \pi_F(x) & i\in I_j \\ = 0 & i\notin I_j \end{cases}$$

とすれば$A_j \simeq C_j$であるから$\prod_{i\in I}A_i/F$を直和因子とみなすことができる。$\kappa < M_c$で$F_\alpha (\alpha<\kappa)$が相異なる可算完備極大フィルターとすれば、Iの分割$I_\alpha (\alpha<\kappa)$があって$I_\alpha\in F_\alpha$ $I_\alpha\notin F_\beta$ $(\alpha\neq\beta)$となる。よって上の方法で$\pi_{F_\alpha} (\alpha<\kappa)$を$\prod_{i\in I}A_i$の直和因子への射影と見なすことができる。この方法によっ

ていくつかの定理における"最小の可測基数未満"という条件を落すことができる。([E_1], [E_3], [E_4])

しかし π_F を射影と見なす方法は、$\mathfrak{F}$ の元すべてを問題にする場合及び前記の κ が M_c をこえると通用しない。例えば次のような場合である。今、ある群が $\mathbb{Z}^J$ に同型のとき仮に $\mathbb{Z}$-積と呼ぶことにしよう。I の濃度が M_c 未満のとき、$\mathbb{Z}^I$ の直和因子は $\mathbb{Z}$-積であるというのは、Nunkeの証明したことである。ところで、I の濃度についての条件を落したらどうであろうか。

問題2) 任意の I について、$\mathbb{Z}^I$ の直和因子は $\mathbb{Z}$-積か?

直和因子Aの濃度が M_c 未満である場合、$A \oplus B = \mathbb{Z}^I$ とすれば、上記の方法が使えて、AもBも $\mathbb{Z}$-積である。([E_4])

けれどもこれは部分解にすぎない。

定理1, 2及びそのversionはもっと一般の群についても成立する。とくに可算完備ブール代数の上に構造をもつ群に対して成立する。([E_5]) その応用については、[E_1] 及び [E_5] にある。最後に問題を3つあげ、終りにする。

問題3) 可算完備極大フィルターをもちアトムのない完備ブール代数の存在を可測基数の存在から導けるか?

逆は知られており、又 κ を強コンパクト基数とし、$\mathcal{B}$ を $(\lambda, 2)$-DL $(\lambda < \kappa)$ が成立する完備ブール代数とすれば、可算

完備極大フィルターが$\mathcal{B}$に存在するので強コムパクト基数の存在からは導ける。

問題4) 可算完備極大フィルターをもつアトムのないブール代数の存在を ZFC から導けるか?

これについては、$\mathcal{B}$をアトムの無い(ω, ∞)-DLの成立する完備ブール代数とすれば、$V^{(\mathcal{B})}$で$\check{\mathcal{B}}$はアトムの無い可算完備ブール代数であり、標準的Genericフィルターは$\check{\mathcal{B}}$の可算完備極大フィルターであることが成立している。

問題5) $\mathbb{R}$を実数のなす加法についての位相群とし、$\mathbb{R}^N$を群$\mathbb{R}^N$にボックス位相(つまり開集合$U_n \subseteq \mathbb{R}$について$\prod_{n \in N} U_n$を開集合の基とする。)を入れた位相群とする。"任意の$\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ (φは位相群としての準同型写像)について$i_1, \cdots, i_n \in N$, $a_1 \cdots a_n \in \mathbb{R}$が存在して

$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j\, x(i_j)$" は成立するか?

これは群について $\mathbb{Z}^N \to \mathbb{Z}$ に関する E. Specker の定理の類比である。

参考文献

[D-Z] M. Dugas and B. Zimmermann-Huisgen, Iterated direct sums and products of modules, in L.N. in Math. 874 Springer, 1981, pp. 179-193.

[E1] ~~Oh~~ K. Eda, On a Boolean power of a torsion-free abelian group. J. Algebra to appear.

[E2] K. Eda, A Boolean power and a direct product of abelian groups. Tsukuba. J. Math. to appear.

[E3] K. Eda, Almost-slender groups and Fuchs-44-groups. Comment. Math. Sancti Pauli, to appear.

[E4] K. Eda. A note on a direct power of abelian groups, to appear.

[E5] K. Eda, A generalized direct product of abelian groups and a measurable cardinal, to appear.

[F] L. Fuchs, Infinite abelian groups. II, Academic Press (1973)

[GRW] R. Göbel, -S.V. Richkov - B. Wald ; A general theory of slender groups and Fuchs-44-groups, in L. N in Math. 874 Springer, 1981, pp. 194-201.

[I] A. V. Ivanov, — Вестник Московский университет, Сер. 1. Математика. Том. 6, 1979, стр. 96.