数理解析研究所講究録
第480巻 1983年 64-86

Some statement which implies $\exists$ Ramsey ufs on ω

阪府大 総 加茂静夫 (Shizuo Kamo)

§0. 序

<u>Def.</u> a, b を set とするとき,

$$a \sim b \overset{\triangle}{\Longleftrightarrow} a \text{ is finite}$$

$$a \lesssim b \overset{\triangle}{\Longleftrightarrow} a - b \sim \phi$$

$$a \sim b \overset{\triangle}{\Longleftrightarrow} a \lesssim b \text{ and } b \lesssim a$$

と記す。

$\mathcal{F}$ を a filter on A とする。

<u>Def.</u> $g : A \to B$ に対し, $g(\mathcal{F}) \overset{\triangle}{=} \{ X \subset B \ ; \ g^{-1}X \in \mathcal{F} \}$.

<u>Def.</u> $\mathcal{F}$ is free $\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow} \phi \notin \mathcal{F} \ \& \ \bigcap \mathcal{F} = \phi$.

<u>Def.</u> $\mathcal{F}$ is weakly ample

$\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow} \forall \mathcal{U}$: free ultrafilter (uf) on $\omega \ \exists g : \omega \to A \ (g(\mathcal{U}) \supset \mathcal{F})$.

<u>Def.</u> $\mathcal{F}$ is ample $\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow} \exists A_0 \subset A \ (A_0 \not\sim \phi \ \& \ \forall X \in \mathcal{F} \ (A_0 \lesssim X))$

容易に分かるが, free で ample な filter は weakly ample となる。

Def. κ を cardinal とするとき，statement AN(κ) を，

" Any free, weakly ample filter on κ is ample. "

で定める。

明らかに，cardinal κ, λ に対し，

$$\kappa \leqq \lambda \ \& \ AN(\lambda) \Rightarrow AN(\kappa)$$

が成り立つ。

Statement AN(κ) について，Puritz [1] は次の Proposition を示している。

Prop. 1 (Puritz)　$c = 2^{\omega}$ と記す。

(i) Continuum hypothesis (CH) $\vdash$ AN(c).

(ii) $\neg$ AN(2^c).

(iii) AN(ω) $\Rightarrow \exists$ P-points on ω.(1

(i) と (ii) から，CH + $2^c = \omega_2$ の条件下では，AN(κ) が成り立つ κ は，ω と ω_1 であることがわかる。

Question 1.　CH+$2^c = \omega_2$ が不成立の場合はどうなるか？

Question 2.　(iii) の逆（則ち，$\Leftarrow$ ）は成立するか？

以下，Q.1 と 2 について考察していく。

(1 Def. $\mathcal{U}$ を a free uf on ω とするとき，

$\mathcal{U}$ が P-point (Ramsey uf) である。

$\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$ " $\langle x_n \mid n < \omega \rangle$: a partition of ω s.t. $\forall n < \omega \ (x_n \notin \mathcal{U})$

$\Rightarrow \exists y \in \mathcal{U} \ [\ y \cap x_n \sim \phi \ (\ |y \cap x_n| \leqq 1\ ),\ \text{for}\ \forall n < \omega]$"

Def. Statement P を，

"$\forall\kappa < c(=2^\omega)\ \forall\mathcal{F}$: free, κ-generated filter on ω ($\mathcal{F}$ is ample)"

で定める。

Statement P は Martin's Axiom (MA) から導かれる（則ち，$MA \vdash P$ ）。又，Proposition 1 (i) の証明は，そのまま，

$$P \vdash AN(c)$$

の証明になっている。更に，次の proposition が成り立つ。

Prop. 2 (Shelah) not $\vdash \exists$ P-points on ω.

以上のことから，$AN(c)$ は $ZFC + \neg CH$ から independent であることがわかる。

ここでは，次の Theorems を示す。

Theorem 1. κ は cardinal とする。

(i) $AN(\kappa) \Longleftrightarrow AN(\kappa^\omega)$.

(ii) $AN(\omega) \Longrightarrow \exists\ c^+$ Ramsey ufs on ω.

(iii) $2^c \leqq \kappa^\omega \Rightarrow \neg AN(\kappa)$.

Theorem 2. Theorem 1 (ii) の逆は成立しない。

Theorem 3. $AN(\omega_2)$ は，$ZFC + CH + 2^{\omega_1} = \omega_3$ から independent である。

Theorem 2 により，Question 2 は成立しないことがわかる。

Theorems の証明について，まず Theorem 1 は次の Lemma A から直接に導かれる。

Lemma A. κ を cardinal とすると，(a) と (b) は同値。

(a) $\neg AN(\kappa)$

(b) $\exists \langle X_\alpha \mid \alpha < \kappa^\omega \rangle$: a partition of the set of Ramsey ufs on ω s.t., for $\forall \alpha < \kappa^\omega$, $X_\alpha = \phi$ or $\cap X_\alpha$: not ample.

又，Theorems 2 と 3 については，次の Lemmas B〜D を示せば十分である。

Lemma B. $\exists \mathfrak{M}[G] \models$ "$\neg AN(\omega) + \exists c^+$ Ramsey ufs on ω".

Lemma C. $\exists \mathfrak{M}[G] \models$ "$CH + 2^{\omega_1} = \omega_3 + AN(\omega_2)$".

Lemma D. $\exists \mathfrak{M}[G] \models$ "$CH + 2^{\omega_1} = \omega_3 + \neg AN(\omega_2)$".

ここで，$\mathfrak{M}[G]$ は countable transitive model $\mathfrak{M}$ of ZFC の generic extension を表わす。

§.1 で Lemma A を証明する。§.2 で Lemma B を証明する。§.3 で Lemma C を証明する。§.4 は Lemma D を証明するための準備であり，§.5 で Lemma D は証明する。

§1. Lemma A の証明.

Lemma 1. $\exists$ free, not ample filter $\mathfrak{F}$ on ω which satisfies (*1).

" $\mathcal{U}$ を free uf on ω とすると，次の (a) と (b) は同値。

(*1) (a) $\mathcal{U}$ is Ramsey.

(b) $\forall f : \omega \to \omega\ (f(\mathcal{U}) \not\supset \mathfrak{F})$. "

Proof. $\omega \times \omega$ と ω の one to one onto map を考えることに

より，$(*1)'$ をみたす $\omega\times\omega$ 上の free, not ample filter $\mathcal{F}$ が存在することを示せば十分である。

" $\mathcal{U}$ を free uf on ω とすると，次の (a) と $(b)'$ は同値。

$(*1)'$ (a) $\mathcal{U}$ is Ramsey.

$(b)'$ $\forall g : \omega \to \omega\times\omega\ (\ g(\mathcal{U}) \not\supset \mathcal{F}\ )$. "

def. $f : \omega \to \omega$ に対し，

$$a(f) = \omega\times\omega - f\ (= \{ (\ell, m) \in \omega\times\omega\ ;\ f(\ell) \neq m \}\ )$$

とおき，$n < \omega$ に対し，

$$b(n) = (\omega - n)\times\omega\ (= \{ (\ell, m) \in \omega\times\omega\ ;\ \ell \geqq n \}\ )$$

とおく。

$\mathcal{F}$ を，$\{ a(f)\ ;\ f : \omega \to \omega \} \cup \{ b(n)\ ;\ n < \omega \}$ で generate される $\omega\times\omega$ 上の filter とすれば，これが $(*1)'$ をみたす $\omega\times\omega$ 上の free, not ample な filter である。 ☒

Lemma 2. κ を cardinal とすると，$\exists A \subset \mathcal{P}_\omega(\kappa)$ [2] s.t.

(i) $|A| = \kappa^\omega$,

(ii) $\forall x, y \in A\ (\ x \neq y \Rightarrow x \cap y \sim \phi\ )$.

Proof. Standard. ☒

Proof of Lemma A. κ を cardinal とする。

(a) $\Rightarrow$ (b) : $\neg AN(\kappa)$ とし，$\mathcal{F}$ として free, weakly ample, not ample filter on κ をとっておく。

[2] $\mathcal{P}_\omega(C) = \{ x \subset C\ ;\ |x| = \omega \}$

$\mathcal{U}$をRamsey uf on ωとする。

$\mathcal{F}$がweakly ampleだから，$\exists g : \omega \to \kappa$ s.t. $g(\mathcal{U}) \supset \mathcal{F}$.

$\mathcal{U}$がRamseyであり，$\mathcal{F}$がfreeであることから，gを変形して，$\exists f : \omega \to \kappa$ (one to one) s.t. $f(\mathcal{U}) \supset \mathcal{F}$.

そこで，各Ramsey uf $\mathcal{U}$ on ωに対し，$f_{\mathcal{U}} : \omega \to \kappa$を，

$$f_{\mathcal{U}} \text{ is one to one } \& \ f_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}) \supset \mathcal{F}$$

となるようにとっておく。

$\langle g_\alpha \mid \alpha < \kappa^\omega \rangle$を，$\{ f ; f : \omega \to \kappa \text{ (one to one)} \}$のmonotone enumerationとし，各$\alpha < \kappa^\omega$に対し，

$$X_\alpha = \{ \mathcal{U} ; \mathcal{U} \text{ is a Ramsey uf on } \omega \ \& \ f_{\mathcal{U}} = g_\alpha \}$$

とおく。このとき，

$\langle X_\alpha \mid \alpha < \kappa^\omega \rangle$が(b)をみたす。」

(b)⇒(a): $\langle X_\alpha \mid \alpha < \kappa^\omega \rangle$を(b)をみたすsequenceとする。$\mathcal{F}$として，Lemma 1 (*1)をみたすfree, not ample filter on ωをとり，Aとして，Lemma 2 (i)と(ii)をみたす$\mathcal{P}_\omega(\kappa)$のsubsetをとる。$\langle a_\alpha \mid \alpha < \kappa^\omega \rangle$を，Aのmonotone enumerationとする。$\langle \mathcal{F}_\alpha \mid \alpha < \kappa^\omega \rangle$を，

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{\alpha+1} = \bigcap X_\alpha & , X_\alpha \neq \phi \text{ のとき}. \\ \mathcal{F}_\xi = \mathcal{F} & , \text{それ以外のとき}. \end{cases}$$

で定める。任意の$\alpha < \kappa^\omega$に対し，

$\mathcal{F}_\alpha$ is free & not ample

がなりたつ。$\langle h_\alpha \mid \alpha < \kappa^\omega \rangle$ を, for $\forall \alpha < \kappa^\omega$,

$$h_\alpha : \omega \to a_\alpha \quad (\text{ one to one onto })$$

となるようにとっておき, 各 $\alpha < \kappa^\omega$ に対し,

$$\mathcal{G}_\alpha = h_\alpha(\mathcal{F}_\alpha) \quad (\text{ただし}, h_\alpha : \omega \to \kappa \text{ とみなす})$$

とおく。各 $\alpha < \kappa^\omega$ に対し,

$\mathcal{G}_\alpha$ is free, not ample filter on κ

がなりたつ。

$$\mathcal{G} = \bigcap_{\alpha < \kappa^\omega} \mathcal{G}_\alpha$$

とおく。$\langle a_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ が almost disjoint であることから, $\mathcal{G}$ は free, not ample filter on κ である。$\mathcal{G}$ が weakly ample であることを示すため, $\mathcal{U}$ を任意にとられた free uf on ω とする。

<u>Case</u> 1. $\mathcal{U}$ が Ramsey のとき.

$\exists \alpha < \kappa^\omega$ s.t. $\mathcal{U} \in X_\alpha$.

そこで, $h = h_{\alpha+1}$ とすれば, $\mathcal{U} \supset \mathcal{F}_{\alpha+1}$ より,

$h(\mathcal{U}) \supset h(\mathcal{F}_{\alpha+1}) = \mathcal{G}_{\alpha+1} \supset \mathcal{G}$.」

<u>Case</u> 2. $\mathcal{U}$ が not Ramsey のとき.

$\mathcal{F}$ が $(*1)$ をみたすことから, $\exists g : \omega \to \omega$ s.t. $g(\mathcal{U}) \supset \mathcal{F}$.

そこで, $h = h_0 \circ g$ とおけば,

$h(\mathcal{U}) \supset h_0(\mathcal{F}) = \mathcal{G}_0 \supset \mathcal{G}$.」 $\boxtimes$

§2. Lemma Bの証明.

このセクションを通して，$\mathfrak{M}$は countable transitive model of ZFC + GCH とする。

$\mathbb{P} = \{ p \,;\, \mathrm{fnc}(p) \ \&\ \mathrm{dom}(p) \subset \omega \ \&\ |p| < \omega \ \&\ \mathrm{ran}(p) \subset \{0,1\} \}$

とし，

G : $\mathfrak{M}$-generic on $\mathbb{P}$

とする。

次の Lemmas 1〜3は，well-known (又は standard) である。

<u>Lemma</u> 1. $x \in \mathfrak{M}[G]$ & $x \subset \omega$ & $x \neq \phi$ とすると，

$\exists y \in \mathfrak{M} \ (y \subset \omega \ \&\ x \cap y \neq \phi \ \&\ x \cap (\omega - y) \neq \phi)$.

<u>Lemma</u> 2. $A, \langle x_n \mid n < \omega \rangle \in \mathfrak{M}$ は，

(i) $A \subset \mathcal{P}_\omega(\omega)$,

(ii) $\forall x, y \in A \ (x \cap y \in A)$,

(iii) $x_n \in A$, for $\forall n < \omega$,

(iv) $x_{n+1} \subset x_n$, for $\forall n < \omega$,

をみたすとする。このとき，$\exists y \in \mathfrak{M}[G]$ s.t.

(v) $y \subset \omega$,

(vi) $y \cap x \neq \phi$ for $\forall x \in A$,

(vii) $| y \cap (x_n - x_{n+1}) | \leqq 1$ for $\forall n < \omega$.

<u>Lemma</u> 3. $\exists x \in \mathfrak{M}[G] \cap \mathcal{P}(\omega)$ s.t.

$\forall y \in \mathfrak{M} \cap \mathcal{P}_\omega(\omega) \ (y \cap x \neq \phi \ \&\ y \cap (\omega - x) \neq \phi)$.

poset $Q \in \mathfrak{M}$ を,

$\mathfrak{M} \models$ " $Q = \{ g \,;\, fnc(g) \,\&\, dom(g) \subset \omega \times \omega_2 \,\&\, |g| < \omega \,\&\, ran(g) \subset \{0,1\} \}$ "

で定め,

H : $\mathfrak{M}$-generic on Q

とする。

Lemma B を,

$\mathfrak{M}[H] \models$ " $\neg AN(\omega) + \exists\, C^{+}$ Ramsey ufs on ω "

で示す。

def. $\alpha < \omega_2^{\mathfrak{M}}$ に対し,

$Q_\alpha = \{ g \in Q \,;\, dom(g) \subset \omega \times \alpha \}$,

$Q^\alpha = \{ g \in Q \,;\, dom(g) \cap (\omega \times \alpha) = \phi \}$,

$H_\alpha = H \cap Q_\alpha$, $H^\alpha = H \cap Q^\alpha$

と記す。

<u>Def.</u> Statement (*2) を, 次のものとする。

" A, $\langle x_n \mid n < \omega \rangle$ が,

(i) $A \subset \mathcal{P}_\omega(\omega)$ & $|A| < 2^\omega$ & $\forall x, y \in A (x \cap y \in A)$,

(ii) $\forall n < \omega (x_n \in A$ & $x_{n+1} \subset x_n)$,

(*2) をみたすとすると, $\exists\, y, z \subset \omega$ s.t.

(iii) $y \cap z = \phi$,

(iv) $y \cap x \neq \phi$ & $z \cap x \neq \phi$, for $\forall x \in A$,

(v) $|y \cap (x_n - x_{n+1})|$, $|z \cap (x_n - x_{n+1})| \leq 1$ for $\forall n < \omega$. "

<u>Lemma</u> 4. $\mathfrak{M}[H] \models (*2)$.

<u>Proof</u>. $A, \langle x_n \mid n<\omega \rangle \in \mathfrak{M}[H]$ が, $\mathfrak{M}[H]$ の中で (i) と (ii) をみたすとする。

$\mathfrak{M}[H] \models$ " $|A| < 2^\omega = \omega_2$ " だから, $\exists \alpha < \omega_2^{\mathfrak{M}}$ s.t.

$$A, \langle x_n \mid n<\omega \rangle \in \mathfrak{M}[H_\alpha].$$

$\mathfrak{M}[H_{\alpha+1}]$ は, $\mathfrak{M}[H_\alpha]$ の poset $\mathbb{P}$ に対する generic extension だから, Lemma 2 により, $\exists a \in \mathfrak{M}[H_{\alpha+1}]$ s.t.

1. $a \subset \omega$,
2. $a \cap x \neq \phi$, for $\forall x \in A$,
3. $|a \cap (x_n - x_{n+1})| \leqq 1$, for $\forall n<\omega$.

$\mathfrak{M}[H_{\alpha+2}]$ は, $\mathfrak{M}[H_{\alpha+1}]$ の poset $\mathbb{P}$ に対する generic extension だから, Lemma 3 により, $\exists y \in \mathfrak{M}[H_{\alpha+2}]$ s.t.

4. $y \subset a$
5. $\forall x \in \mathfrak{M}[H_{\alpha+1}] \cap \mathcal{P}_\omega(a)\ (x \cap y \neq \phi\ \&\ x \cap (a-y) \neq \phi)$

そこで, $z = a - y$ とおけば,

$$y, z \in \mathfrak{M}[H_{\alpha+2}] \subset \mathfrak{M}[H]$$

であり, $(*2)$ の (iii)～(iv) をみたす。 $\boxtimes$

<u>Lemma</u> 5. $(*2) \Rightarrow \exists\, 2^c$ Ramsey ufs on ω.

<u>Proof</u>. Standard. $\boxtimes$

Lemmas 4 と 5 により,

$\mathfrak{M}[H] \models$ " $\exists\, 2^c$ Ramsey ufs on ω "

が示された。 $\mathfrak{M}[H] \models \neg AN(\omega)$ を示すには, *Theorem 1* と $\mathfrak{M}[H] \models$ "$2^{\omega} = \omega_2$" により,

$$\mathfrak{M}[H] \models \neg AN(\omega_2)$$

を示せば十分である。

<u>Lemma</u> 6. $\mathcal{U} \in \mathfrak{M}[H]$ & $\mathfrak{M}[H] \models$ "$\mathcal{U}$ is a free uf on ω"

$\Rightarrow \exists \mathcal{V} \in \mathfrak{M}[H]$ s.t. $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ and

$\mathfrak{M}[H] \models$ "$\mathcal{V}$ is a free, ω_1-generated, not ample filter on ω".

<u>Proof</u>. $\mathcal{U} \in \mathfrak{M}[H]$ & $\mathfrak{M}[H] \models$ "$\mathcal{U}$ is a free uf on ω" とする。

$$X = \mathcal{U} \cap \mathfrak{M} \ (\in \mathfrak{M}[H])$$

とおく。$\mathcal{V} \in \mathfrak{M}[H]$ を,

$\mathfrak{M}[H] \models$ "$\mathcal{V}$ は X から generate される ω 上の filter"

で定める。 $\mathfrak{M}[H] \models$ "$|X| \leqq \omega_1$" と, *Lemma 1* により, $\mathcal{V}$ が求めるものである。 $\boxed{\diagup}$

$\mathfrak{M}[H] \models \neg AN(\omega_2)$ を示すため, 以下 $\mathfrak{M}[H]$ での議論。

$\Gamma = \{ \mathcal{V} ; \mathcal{V}$ is a free, ω_1-generated, not ample filter on $\omega \}$

とおく。

$|\Gamma| \leqq |\mathcal{P}(\omega)|^{\omega_1} = \omega_2$ だから, Γ の enumeration $\langle \mathcal{V}_\alpha \mid \alpha < \omega_2 \rangle$ をとっておく。各 $\alpha < \omega_2$ に対し,

$h_\alpha : \omega \longrightarrow \omega \times \omega_2$ を,

$$h_\alpha(n) = (n, \alpha) \quad \text{for } \forall n < \omega$$

で定め,

$$\mathfrak{I}_\alpha = h_\alpha(V_\alpha)$$

とおく。

$\mathfrak{I} = \bigcap_{\alpha<\omega_2} \mathfrak{I}_\alpha$ とすれば，$\mathfrak{I}$ は free, not ample となる。更に，Lemma 6 により，$\mathfrak{I}$ は weakly ample である。 $\boxtimes$

§3、 Lemma C の証明

Def. 各 $\alpha < \omega_1$ に対し，$S_\alpha = \{ s\ ;\ s : \alpha \to \omega_1 \}$ と記す。

<u>Lemma</u> 1 (CH) $\exists \langle \langle x_s \mid s \in S_{\alpha+1} \rangle \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ s.t.

(i) $\forall s, t \in S_{\alpha+1} (s \neq t \Rightarrow x_s \neq x_t)$,

(ii) $\{ x_s\ ;\ s \in S_{\alpha+1} \}$ is a maximal almost disjoint subset of $\mathcal{P}_\omega(\omega)$,

(iii) $\xi < \alpha$ & $s \in S_{\xi+1}$ & $t \in S_{\alpha+1}$ & $s \subset t \Rightarrow x_t \lesssim x_s$,

(iv) $\forall y \subset \omega\, \exists \alpha < \omega_1\, \forall s \in S_{\alpha+1}\, (y \cap x_s = \phi$ or $x_s \subset y)$.

<u>Proof.</u> Standard. $\boxtimes$

$\mathbb{P} = \{ p\ ;\ \mathrm{fnc}(p)$ & $\mathrm{dom}(p) \subset \omega_1$ & $|p| \leq \omega$ & $\mathrm{ran}(p) \subset \{0,1\} \}$

$\mathcal{B} = \mathcal{P}(\omega)/I$, where $I = \{ x \subset \omega\ ;\ x \sim \phi \}$

とおく。

<u>Lemma</u> 2 (CH) $\mathcal{C}$ を poset $\mathbb{P}$ の regular open set 全体のなす complete Boolean algebra とすると，

$$\mathcal{C} \cong \text{the completion of } \mathcal{B}$$

である。

<u>Proof.</u> 次の条件 1 ～ 3 をみたす X と Y の存在を示せば十分である。

1. X は dense subset of $B-\{0\}$.
2. Y は dense subset of $\mathbb{P}$.
3. X と Y は order isomorphic.

$\langle\langle x_s \mid s \in S_{\alpha+1}\rangle \mid \alpha < \omega_1\rangle$ を Lemma 1 (i) ～ (iv) をみたす sequence とし,

$$X = \{ x_s/I \; ; \; \exists \alpha < \omega_1 \, (s \in S_{\alpha+1}) \}$$

$$Y = \{ p \in \mathbb{P} \; ; \; \exists \alpha < \omega_1 \, (dom(p) = \omega\alpha + \omega) \}$$

とすれば, この X と Y が 1 ～ 3 をみたす。 $\boxtimes$

$\mathfrak{M}$ を countable transitive model of ZFC + GCH とする。

$Q \in \mathfrak{M}$ を,

$\mathfrak{M} \models$ "$Q = \{ g \; ; \; fnc(g) \;\&\; dom(g) \subset \omega_1 \times \omega_3 \;\&\; |g| \leq \omega \;\&\; ran(g) \subset \{0,1\}\}$"

で定め,

H : $\mathfrak{M}$-generic on Q

とする。

$\mathfrak{M}[H] \models$ "$CH + 2^{\omega_1} = \omega_3$" は明らかだから, $\mathfrak{M}[H] \models AN(\omega_2)$ を示すため, $\mathfrak{F} \in \mathfrak{M}[H]$ を,

$\mathfrak{M}[H] \models$ "$\mathfrak{F}$ is a free, not ample filter on ω_2"

が成り立つものとする（ 示したいこと: $\mathfrak{M}[H] \models$ "$\mathfrak{F}$ is not weakly ample" ）。

$\mathcal{G} \in \mathfrak{M}[H]$ を,

$$\mathfrak{M}[H] \models \text{"} \mathcal{G} = \mathcal{F} \cap \{ \omega_2 - x \,;\, x \subset \omega_2 \ \&\ |x| \leqq \omega \} \text{"}$$

で定める。 $\mathfrak{M}[H] \models \text{"} |\mathcal{G}| \leqq \omega_2 \text{"}$ だから, $\exists \beta < \omega_3^{\mathfrak{M}}$ s.t.

$$\mathcal{G} \in \mathfrak{M}[H \cap \{ q \in Q \,;\, dom(q) \subset \omega_1^{\mathfrak{M}} \times \beta \}].$$

$$Q_1 = \{ q \in Q \,;\, dom(q) \subset \omega_1^{\mathfrak{M}} \times \beta \}$$

$$\bar{Q} = \{ q \in Q \,;\, dom(q) \subset \omega_1^{\mathfrak{M}} \times \{\beta\} \}$$

$$H_1 = H \cap Q_1 \quad , \quad \bar{H} = H \cap \bar{Q} \quad , \quad \mathfrak{N} = \mathfrak{M}[H_1]$$

とおく。

$\bar{H}$ は $\mathfrak{N}$-generic on $\bar{Q}$ であり,

$\mathfrak{M}[H]$ は generic extension of $\mathfrak{N}[\bar{H}]$ である。

<u>Lemma</u> 3. $\mathfrak{N}[\bar{H}] \models \text{"} \mathcal{G}$ *is not weakly ample* "

<u>Proof</u>. $\bar{B} \in \mathfrak{N}$ を,

$$\mathfrak{N} \models \text{"} \bar{B} = \mathcal{P}_\omega(\omega)/_I \text{"}$$

となるものとする。 $\mathfrak{N} \models CH$ だから, Lemma 2 により,

$\bar{H}$ は $\mathfrak{N}$-generic on $\bar{B}$

と考えてもよい(以下そう考える)。 $\mathcal{U} \in \mathfrak{N}[\bar{H}]$ を,

$$\mathfrak{N}[\bar{H}] \models \text{"} \mathcal{U} = \{ x \subset \omega \,;\, x/_I \in \bar{H} \} \text{"}$$

で定める。 $\mathfrak{N}[\bar{H}] \models \text{"} \mathcal{U}$ is a free uf on ω " となるから,

(*3) $\quad \mathfrak{N}[\bar{H}] \models \text{"} \forall f : \omega \to \omega_2 \ (f(\mathcal{U}) \supset \mathcal{G}) \text{"}$

を示せば, この *lemma* の証明は完了する。(*3) を示すため, $f \in \mathfrak{N}[\bar{H}]$ を,

$$\mathfrak{N}[\bar{H}] \models \text{"} f : \omega \to \omega_2 \text{"}$$

をみたすものとする。 $\mathfrak{M} \models$ "Q is σ-closed" だから,

$$f \in \mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$$

である。 $D \in \mathfrak{N}$ を,

$$\mathfrak{N} \models \text{"} D = \{ x/_I \in \bar{B} \,;\, x/_I > \mathbb{O} \ \& \ \exists y \in \mathfrak{J} (y \cap f''x = \phi) \} \text{"}$$

で定める。 $\mathfrak{N} \models$ "$\mathfrak{J}$ is free, not ample" により,

$$\mathfrak{N} \models \text{" } D \text{ is dense in } \bar{B} - \{ \mathbb{O} \} \text{ "}.$$

そこで, $\exists x/_I \in \bar{B}$ s.t.

$$x \not\sim \phi \quad \& \quad \exists y \in \mathfrak{J} (y \cap f''x \sim \phi).$$

$$\therefore \quad \omega_2^{\mathfrak{M}} - f''x \in \mathfrak{J} - f(\mathcal{U})$$

$$\therefore \quad \mathfrak{N}[\bar{H}] \models \text{" } f(\mathcal{U}) \not\supset \mathfrak{J} \text{"}. \quad \boxtimes$$

Lemma 3 と, $\mathfrak{M} \models$ "Q is σ-closed" により,

$$\mathfrak{M}[H] \models \text{" } \mathfrak{J} \text{ is not weakly ample "}.$$

これと, $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{F}$ により,

$$\mathfrak{M}[H] \models \text{" } \mathfrak{F} \text{ is not weakly ample "} \quad \boxtimes$$

§4. Theorem 4 (Lemma D 証明のために).

<u>Def.</u> $f, g : \omega_1 \to \omega_1$ に対し,

$$f \prec g \overset{\triangle}{\iff} \exists \alpha < \omega_1 \ \forall \xi < \omega_1 (\alpha \leqq \xi \Rightarrow f(\xi) < g(\xi)).$$

<u>Def.</u> $\langle f_\delta \mid \delta < \omega_2 \rangle$ が ω_2-scale on ω_1 であるとは, 次の (i) 〜 (iii) が成り立つことである。

(i) $\forall \delta < \omega_2\ (f_\delta : \omega_1 \to \omega_1)$

(ii) $\forall \delta < \forall \eta < \omega_2\ (f_\delta \prec f_\eta)$

(iii) $\forall g : \omega_1 \to \omega_1\ \exists \delta < \omega_2\ (g \prec f_\delta)$.

Theorem 4. (CH) $\exists\, \omega_2$-scale on $\omega_1 \Rightarrow \neg AN(\omega_2)$.

このセクションでは，Theorem 4 を証明する。そこで，以下 CH を仮定する。更に，$S_\alpha\ (\alpha < \omega_1)$ と $\langle\langle x_s \mid s \in S_{\alpha+1}\rangle \mid \alpha < \omega_1\rangle$ は，§3 Lemma 1 (i) ～ (iv) をみたすものとする。

def. $h : \omega_1 \to \omega_1$ に対し，

$\mathcal{U}_h$ = the filter on ω which is generated by $\{x_{h\restriction(\alpha+1)} ; \alpha < \omega_1\}$

とおく。

Lemma 1. $\mathcal{U}_h$ is a free uf on ω, for $\forall h : \omega_1 \to \omega_1$.

Proof. 明らか。 $\boxtimes$

def. $W = \{ f ; f : \omega_1 \to \omega_1 \}$ と記す。

def. $\phi \neq Y \subset W$ に対し，$\mathfrak{F}(Y) = \bigcap_{h \in Y} \mathcal{U}_h$ とおく。

Lemma 1 により，$\mathfrak{F}(Y)$ は a free filter on ω である。

Lemma 2. $\phi \neq Y \subset W$ とすると，次の (a) と (b) は同値。

(a) $\mathfrak{F}(Y)$ is not ample.

(b). $\forall \alpha < \omega_1\ \forall s \in S_{\alpha+1}\ \exists \beta < \omega_1\ \exists t \in S_{\beta+1}$ s.t.

$\alpha \leq \beta$ & $s \subset t$ & $\forall h \in Y\ (t \not\subset h)$.

Proof. $\phi \neq Y \subset W$ とする。

(a) $\Rightarrow$ (b) $\mathfrak{F}(Y)$ is not ample & $\alpha < \omega_1$ & $s \in S_{\alpha+1}$ とする。

$x_s \not\sim \phi$ だから，$\exists y \in \mathfrak{F}(Y)$ s.t. $x_s - y \not\sim \phi$.

$a = x_s - y$ とおく。

$\langle\langle x_u \mid u \in S_{\gamma+1} \rangle \mid \gamma < \omega_1 \rangle$ が (iv) をみたすことから，

$\exists \beta < \omega_1 \ \exists t \in S_{\beta+1}$ s.t. $x_t \subset a$.

$x_t \subset x_s$ となることから，$\alpha \leqq \beta$ & $s \subset t$ である。更に，$h \in Y$ なら，$y \in \mathfrak{F}(Y) \subset \mathcal{U}_h$ より，$x_t \notin \mathcal{U}_h$ である。そこで，$\forall h \in Y \, (t \not\subset h)$.」

(b) $\Rightarrow$ (a) Y が (b) をみたすとし，$x \subset \omega$ & $x \not\sim \phi$ とする。$\alpha < \omega_1$ と $s \in S_{\alpha+1}$ を，$x_s \subset x$ となるようにとる。Y が，(b) をみたすことから，$\alpha \leqq \exists \beta < \omega_1 \ \exists t \in S_{\beta+1}$ s.t.

$s \subset t$ & $\forall h \in Y \, (t \not\subset h)$.

$y = \omega - x_t$ とおく。 $x - y \supset x_s \cap x_t$ より，

$x - y \not\sim \phi$

であり，$\forall h \in Y \, (x_t \notin \mathcal{U}_h)$ より，

$y \in \mathfrak{F}(Y)$

である。」 $\boxtimes$

def. $\alpha < \omega_1$ に対し，

$\mathfrak{I}_\alpha$ = the filter on ω which is generated by $\{\omega - x_s \, ; \, s \in S_{\alpha+1}\}$

とおく。

$\mathfrak{I}_\alpha$ は，free, not ample filter on ω である。

<u>Lemma</u> 3. $\mathcal{U}$ を free uf on ω とすると，次の (a) 又は (b)

が成り立つ。

(a) $\exists h \in W\ (\mathcal{U} = \mathcal{U}_h)$

(b) $\exists \alpha < \omega_1\ (\mathcal{U} \supset \mathcal{G}_\alpha)$.

<u>Proof.</u> easy. $\boxtimes$

<u>Lemma</u> 4. 次の(i)と(ii)をみたす ω_2-sequence $\langle Y_\delta \mid \delta < \omega_2 \rangle$ が存在するとする。

(i) $\bigcup_{\delta < \omega_2} Y_\delta = W$.

(ii) $\forall \delta < \omega_2\ (\mathcal{F}(Y_\delta)$ is not ample $)$.

このとき、 $\neg AN(\omega_2)$ である。

<u>Proof.</u> $\langle Y_\delta \mid \delta < \omega_2 \rangle$ が(i)と(ii)をみたすとする。 $\omega \times (\omega_2 + \omega_1)$ 上の filter $\mathcal{F}$ を、任意の $x \subset \omega \times (\omega_2 + \omega_1)$ に対し、

$x \in \mathcal{F}$

$\overset{\triangle}{\longleftrightarrow}$ (a) $\forall \delta < \omega_2\ (\{ n < \omega ; \langle n, \delta \rangle \in x \} \in \mathcal{F}(Y_\delta))$

(b) $\forall \alpha < \omega_1\ (\{ n < \omega ; \langle n, \omega_2 + \alpha \rangle \in x \} \in \mathcal{G}_\alpha)$

で定める。 Lemma 3 により、

$\mathcal{F}$ は free, weakly ample, not ample filter である。 $\boxtimes$

<u>Proof of Theorem 4.</u> $\langle f_\delta \mid \delta < \omega_2 \rangle$ を ω_2-scale on ω_1 とする。各 $\langle \delta, \alpha \rangle \in \omega_2 \times \omega_1$ に対し、 $Y_{\delta\alpha} \subset W$ を、

$$Y_{\delta\alpha} = \{ h \in W ;\ \alpha \leqq \forall \xi < \omega_1\ (h(\xi) < f_\delta(\xi)) \}$$

で定める。 $\langle f_\delta \mid \delta < \omega_2 \rangle$ が ω_2-scale on ω_1 より、

$$\bigcup_{\langle \delta, \alpha \rangle \in \omega_2 \times \omega_1} Y_{\delta\alpha} = W \quad \text{である。}$$

そこで，Lemma 4 により，次の(∗4)を示せば証明は完了する。

(∗4) $\forall \langle \delta, \gamma \rangle \in \omega_2 \times \omega_1$ ($\mathfrak{F}(Y_{\delta\gamma})$ is not ample).

(∗4)を示すため，$\langle \delta, \gamma \rangle \in \omega_2 \times \omega_1$ を任意にとる。

Lemma 2 により，次の(∗4)′を示せば十分である。

(∗4)′ " $\forall \alpha < \omega_1 \ \forall s \in S_{\alpha+1} \ \exists \beta < \omega_1 \ \exists t \in S_{\beta+1}$ s.t.

$\alpha \leqq \beta$ & $s \subset t$ & $\forall h \in Y_{\delta\gamma} (t \not\subset h)$. "

(∗4)′を示すため，$\alpha < \omega_1$ と $s \in S_{\alpha+1}$ を任意にとる。$\beta < \omega_1$ と，$s_1 \in S_\beta$ を，

$$\alpha \leqq \beta \quad \& \quad \gamma \leqq \beta \quad \& \quad s \subset s_1$$

となるようにとり，$t \in S_{\beta+2}$ を，

$$t \upharpoonright (\beta+1) = s_1 \quad , \quad t(\beta+1) = f_\delta(\beta+1)$$

で定める。このとき，$s \subset s_1 \subset t$ であり，$h \in Y_{\delta\gamma}$ なら，$h(\beta+1) < f_\delta(\beta+1) = t(\beta+1)$ より，$t \not\subset h$ である。

そこで，(∗4)′が成り立つ。 ⊠

§5. Lemma D の証明.

Section 4 の Theorem 4 より，$\exists$ generic model $\mathfrak{N}$ s.t.

(∗5) $\mathfrak{N} \models$ " CH + $2^{\omega_1} = \omega_3$ + $\exists\ \omega_2$-scale on ω_1 "

を示せば十分である。この section を通して $\mathfrak{M}$ は countable transitive model of ZFC + CH + $2^{\omega_1} = \omega_3$ とする。

<u>Def.</u> $S = \{ s \ ; \ \exists \alpha < \omega_1 \ (s : \alpha \to \omega_1) \}$ と記す。

def. a complete Boolean algebra $\mathbb{B}$ に対し, $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\mathbb{B}) \in V^{\mathbb{B}}$ を,

$dom(\mathbb{Q}) = \{ \langle \check{s}, \mathbb{J} \rangle^{\mathbb{B}} ;\ s \in S\ \&\ \mathbb{J} \in V^{\mathbb{B}}\ \&\ \| \mathbb{J}$ is a set of function on ω_1 with $|\mathbb{J}| \leq \omega \| = \mathbb{1} \}$,

$\mathbb{Q}(x) = \mathbb{1}$, for $\forall x \in dom(\mathbb{Q})$

で定め, $\leqq (= \leqq(\mathbb{B})) \in V^{\mathbb{B}}$ を,

$\| \leqq$ is a relation on $\mathbb{Q} \| = \mathbb{1}$,

任意の $\langle \check{s}, \mathbb{J} \rangle^{\mathbb{B}}, \langle \check{t}, \mathbb{K} \rangle^{\mathbb{B}} \in dom(\mathbb{Q})$ に対し,

$$\| \langle \check{s}, \mathbb{J} \rangle^{\mathbb{B}} \leqq \langle \check{t}, \mathbb{K} \rangle^{\mathbb{B}} \|$$

$$= \| \check{s} \supset \check{t}\ \&\ \mathbb{J} \supset \mathbb{K}\ \&\ \forall \alpha \in dom(\check{s} - \check{t}) \forall f \in \mathbb{K} (f(\alpha) < \check{s}(\alpha)) \|$$

で定める。

$\| \langle \mathbb{Q}, \leqq \rangle$ is a notion of forcing $\| = \mathbb{1}$ となる。$\mathbb{Q}$ と $\langle \mathbb{Q}, \leqq \rangle$ を同一視する。

<u>Lemma</u> 1. $\mathbb{B} \in \mathfrak{M}$ は,

$\mathfrak{M} \models$ "$\mathbb{B}$ is an ω-DL, ω_2-saturated complete Boolean algebra"

をみたすとする。 G を $\mathfrak{M}$-generic on $\mathbb{B}$ とし, $Q = i_G(\mathbb{Q}(\mathbb{B})^{\mathfrak{M}})$ とおく。

(i) $Q\ (\in \mathfrak{M}[G])$ は,

$\mathfrak{M}[G] \models$ "$Q = S \times \{ J ;\ J$ is a set of functions on ω_1 with $|J| \leqq \omega \}$"

をみたす $\mathfrak{M}[G]$ での a notion of forcing である。ただし, その order は, $\langle s, J \rangle, \langle t, K \rangle \in Q$ に対し,

$$\langle s, J \rangle \leqq \langle t, K \rangle$$

$$\Leftrightarrow \text{"} s \supset t \ \& \ J \supset K \ \& \ \forall \alpha \in dom(s-t) \forall f \in K (f(\alpha) < s(\alpha)) \text{"}$$

である。

そこで，H を $\mathfrak{M}[G]$-generic on $\mathbb{Q}$ とし，$h \in \mathfrak{M}[G,H]$ を，

$$h = \bigcup \{ s \ ; \ \exists J (\langle s, J \rangle \in H) \}$$

で定めると，

(ii) $\mathfrak{M}[G,H] \models \text{"} h : \omega_1 \longrightarrow \omega_1 \text{"}$

(iii) $\forall f \in \mathfrak{M}[G] (\mathfrak{M}[G] \models \text{"} f : \omega_1 \rightarrow \omega_1 \text{"} \Rightarrow \mathfrak{M}[G,H] \models \text{"} f \prec h \text{"})$

が成り立つ。

Proof. Standard. $\boxtimes$

以下，Cor. まで，$\mathfrak{M}$ における議論である。

def. α ($\leqq \omega_2$) に関する induction により，poset R_α を以下に定める。

$\alpha \leqq \omega_2$ に対し，

$\mathcal{B}_\alpha$ = the algebra of regular open sets in R_α

$\mathbb{Q}_\alpha = \mathbb{Q}(\mathcal{B}_\alpha)$

と記す。

Case 1. $\alpha = 0$ のとき．

$R_0 = \{ \phi \}$ とする。

Case 2. $\alpha = \gamma + 1$ のとき．

$R_\alpha = \{ p^\frown \langle x \rangle \ ; \ p \in R_\gamma \ \& \ x \in dom(\mathbb{Q}_\gamma) \}$ とおき，

$p^\frown\langle x\rangle,\ q^\frown\langle y\rangle \in R_\alpha$ に対し,

$$p^\frown\langle x\rangle \leqq q^\frown\langle y\rangle \overset{\triangle}{\Longleftrightarrow} \text{"}\ p \leqq q \ \&\ q \Vdash x \leqq y\ \text{"}$$

とする。(注: $p, q \in R_\alpha$ が, $p \leqq q$ & $q \leqq p$ となるときは, p と q を同一視する。 $e : R_\gamma \to R_\alpha$ を, $p \in R_\gamma$ に対し,

$$e(p) = p^\frown\langle \langle \check{\phi}, \check{\phi} \rangle^{B_\gamma} \rangle$$

で定めると, e は order embedding となるから, p と $e(p)$ を同一視して, $R_\gamma \subset R_\alpha$ とみなす。)

Case 3. α が limit のとき.

任意の $p = \langle p_\xi \mid \xi < \alpha \rangle$ に対し,

$$p \in R_\alpha \overset{\triangle}{\Longleftrightarrow} \text{"}\ \forall \xi < \alpha\ (\, p \restriction \xi \in R_\xi\,)\ \&\ |\{\, \xi < \alpha\ ;\ \| p(\xi) < \mathbb{1} \| > \mathbb{0}\ \}| \leqq \omega\ \text{"}$$

とし, $p, q \in R_\alpha$ に対し,

$$p \leqq q \overset{\triangle}{\Longleftrightarrow} \forall \xi < \alpha\ (\, p \restriction \xi \leqq q \restriction \xi\,)$$

とする。(注: Case 2 の場合の注と同じ同一視をする。そして, $R_\xi \subset R_\alpha$ for $\forall \xi < \alpha$ とみなす。)

Lemma 2. $\alpha \leqq \omega_2$ とすると,

(i) $|R_\alpha| \leqq \omega_3$

(ii) R_α is σ-closed, ω_2-saturated.

Proof. Standard. ☒

def. $R = R_{\omega_2}$ と記す。

Cor. R is σ-closed, ω_2-saturated & $|R| = \omega_3$.

Proof of (*5). G を $\mathfrak{M}$-generic on R とし，$\mathfrak{N}=\mathfrak{M}[G]$ とおく。Cor. により，$\mathfrak{N}\models$ "$CH+2^{\omega_1}=\omega_3$" である。

各 $\alpha<\omega_2^{\mathfrak{M}}$ に対し，

$$G_\alpha = G\cap R_\alpha \ , \quad \mathfrak{M}_\alpha=\mathfrak{M}[G_\alpha]$$

とおき，$<h_\alpha \mid \alpha<\omega_2^{\mathfrak{M}}>\ \in\mathfrak{N}$ を，$\alpha<\omega_2^{\mathfrak{M}}$ に対し，

$$h_\alpha=\bigcup\{s\ ;\ \exists p\in G\ \exists \mathbb{J}\ (p(\alpha)=<\check{s},\mathbb{J}>^{B_\alpha})\}$$

で定める。

$$\mathfrak{N}\models \text{"}<h_\alpha \mid \alpha<\omega_2> \text{ is an } \omega_2\text{-scale on } \omega_1\text{"}$$

を示せば，(*5) の証明は完了する。Lemma 1 (i) により，

$$\mathfrak{N}\models \text{"}\forall\alpha<\omega_2\ (h_\alpha:\omega_1\to\omega_1)\ \&\ \forall\alpha<\forall\beta<\omega_2\ (h_\alpha\prec h_\beta)\text{"}$$

である。$f\in\mathfrak{N}$ を，$\mathfrak{N}\models$ "$f:\omega_1\to\omega_1$" となる任意のものとする。R が ω_2-saturated in $\mathfrak{M}$ より，

$$\exists\,\alpha<\omega_2^{\mathfrak{M}} \ \text{ s.t. } \ f\in\mathfrak{M}_\alpha$$

Lemma 1 (ii) により，$\mathfrak{M}_{\alpha+1}\models$ "$f\prec h_\alpha$"

$$\therefore\ \mathfrak{N}\models \text{"}f\prec h_\alpha\text{"} \qquad \boxtimes$$

Reference

[1] C.W. Puritz, *Skies, Constellations and Monads*, in: *Contributions to Nonstandard Analysis*, ed. W.A. Luxemburg (North-Holland; Amsterdam, 1972).