数理解析研究所講究録
第 480 巻 1983 年 109-129

ボレル集合の単調列について

東大教養　難波完爾
(Kanji Namba)

ここでは実数の部分集合の包含関係による単調列の長さと各集合の記述可能性について記する．

1． 実数の全体の位相空間を R で記す．R の開集合の増加列の長さとしてどの様なものが可能であろうか．この場合は簡単で任意の可算順序数は可能で非可算のものは不可能である．

非可算の最初の順序数を ω_1 と記すとき ω_1 の型のものが存在しないことを示すには次のように考えればよい．R の位相を定める開集合の可算基を $\{U_n \mid n\in\omega\}$ とする．開集合 A に対し

$$f(A)=\{n\in\omega \mid U_n\subset A\}$$

とする．開集合の増加列

$$A_0\subsetneq A_1\subsetneq\cdots\subsetneq A_\nu\subsetneq\cdots\qquad(\nu<\omega_1)$$

に対して，f は単調であるから

$$f(A_0)\subsetneq f(A_1)\subsetneq\cdots\subsetneq f(A_\nu)\subsetneq\cdots$$

となる．そこで $p(\nu)\in f(A_{\nu+1})-f(A_\nu)$ となるようにとれば単調性によって 1 対 1 であることが得られる．即ち

$$p:\omega_1\xrightarrow{1\text{-}1}\omega$$

となりω_1が可算となってしまう．減少列についても同様であり，補集合に移れば閉集合についての性質を得る．

開集合や閉集合について自然な集合の例として，それらの可算個の和とか共通部分を考える．開集合の和は再び開集合であるが，可算個の共通部分は新しい集合になるであろう．この様な集合をG_δ集合と呼ぶ．距離空間ではすべての閉集合はG_δ集合である．同様に閉集合の可算和をF_σ集合と呼ぶ．

さて，ここで問題とするものはF_σとかG_δ集合の増加列としてどの様なものが可能かということである[1]．

これに関して古典的な結果として Hausdorff による次の結果がある．即ち

実数の全体Rはω_1型のG_δ集合の増加列の和である[2]．

したがって勿論G_δ集合のω_1増加列が存在する．ここで用いられた概念で基本的なものは有限集合の全体の作るイディアルである．即ち

$$I = \{a \subset \omega \mid \# a < \omega\}$$

が主要な役割を演じている．$a, b \subset \omega$について順序を

$$a \preceq b \equiv a - b \in I$$

と定め，それより自然な同値関係が導入される：

$$a \approx b \equiv a \preceq b \wedge b \preceq a$$

---

1) 1983年夏の関西セミナーハウスで開催された集合論セミナーに於て竹内外史氏から提出されたものである．

2) Hausdorff ; Fundamenta Mathematicae 26 (1936) p. 248.

$$a \prec b \equiv a \preceq b \wedge b \not\preceq a$$

とするのである．また自然数の函数 $f, g : \omega \to \omega$ についても

$$f \preceq g \equiv \{n \in \omega \mid f(n) > g(n)\} \in I$$

と定める．いずれにしても"有限集合を除いて"という性質に着目するのである．

勿論，これらの性質通常の意味での極限の概念と一致している．即ち $a, b \subset \omega$ とか $f, g : \omega \to \omega$ について

$$a \preceq b \equiv \exists n \in \omega \, \forall m \in a \, (m \geq n \to m \in b)$$

$$f \preceq g \equiv \exists n \in \omega \, \forall m \in \omega \, (m \geq n \to f(m) \leq g(m))$$

等を意味している．自然数の部分集合の全体は表現函数を通じて，自然数の函数の全体は連分数を通じて，それぞれ2進無限小数および無理数の全体に写される．例えば連分数では

$$\alpha = n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cdots}}$$

を，例えば $[n_0, n_1, n_2, \cdots]$ と記せば

$$\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, 2, \cdots]$$

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \cdots]$$

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, \cdots]$$

等であって代数的数や超越数の複雑性がこの様なほんの少しの部分にもあらわれているのであろう．

この様にして $f : \omega \to \omega$ に対して

を得る．この様な $k:\omega\to\omega$ は単調増加にとれるから

$$g(n)=m \equiv k(n)\le m<k(n+1)$$

とすればよい．この様にしてくによる線形順序集合の包含関係での極大元は可算ではあり得ない．つまり

$$f_0 \prec f_1 \prec f_2 \prec \cdots \prec f_\nu \prec \cdots \qquad (\nu<\omega_1)$$

の様な ω_1 型の増加列や減少列が存在するのである．

次に ω_2 列がとれるかどうかが問題であるが，実数の基数

$$\overline{\overline{R}} = \overline{\overline{2^\omega}} = \overline{\overline{\omega^\omega}}$$

について，連続体仮説（continuum hypothesis, CH）$2^\omega=\omega_1$ が成立すれば実数の基数自体が ω_1 であるから，ω_2 列などは存在しない訳である．

それ故，連続体仮説が成立しない場合，$\neg$CH 即ち

$$2^\omega>\omega_1$$

の場合，この様な増加列等の順序数がどの様になるかが問題となる．

結果は Zermelo - Fraenkel の集合論の公理 ZF に選択公理 Axiom of choice AC を加えた公理系 ZFC から独立である．

$\rho(\mathfrak{A})$ を集合族 $\mathfrak{A}$ の中の集合の増加列で表現出来ない最小の順序数とするとき $\rho(F_\sigma)=\omega_2$，つまり ω_1 の基数を有する増加列は存在するが ω_2 のものは存在しないこと等は公理系

$$ZFC,\ 2^\omega>\omega_1$$

$$A_f = \{ g \in \omega^\omega \mid g \preceq f \}$$

とすれば $g \preceq f \equiv \exists n \in \omega\, \forall m \geq n\, (g(m) \leq f(m))$ であるから

$$A_f = \bigcup_{n \in \omega} \bigcap_{m \geq n} \{ g \in \omega^\omega \mid g(m) \leq f(m) \}$$

であって $\{ g \in \omega^\omega \mid g(m) \leq f(m) \}$ は基本開集合の有限和で開集合，またその補集合も開集合であるから，いわゆる clopen 集合である．したがって A_f は閉集合の可算共通部分である閉集合の可算和として F_σ 集合である．明らかに

$$f \prec g \rightarrow A_f \subsetneq A_g$$

であるから，この様な函数の増加列が存在すれば，それに応じて F_σ 集合の増加列を得ることが出来るのである．

単純なことであるが，任意の可算個の函数 $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ に対して $f_n \prec f$ となる函数，つまりどの函数よりも速く増加する函数が存在する．それは例えば

$$\max_{m \geq n} f_n(m) + 1 = f(m)$$

を考えればよい．又，同様に $\lim_{m \to \infty} f_n(m) = \infty$ となる可算個の函数 $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ に対して $\lim_{m \to \infty} f(m) = \infty$ なる f で $f \prec f_n$ を満足するものをとることも出来る．例えば，与えられた条件より順次

$$\forall n\, \forall m \leq n\, \exists k\, \forall \ell \geq k\, (f_m(\ell) > n)$$

$$\forall n\, \exists k\, \forall m \leq n\, \forall \ell \geq k\, (f_m(\ell) > n)$$

$$\exists k\, \forall n\, \forall m \leq n\, \forall \ell \geq k(n)\, (f_m(\ell) > n)$$

から独立である．例えば

(1)　$2^{\omega} > \omega_1$ と Martin の公理 MA が成立する model の中では

$$p(F_\sigma) > \omega_2$$

(2)　連続体仮説の成立する集合論の model に ω_2 個の random real とか generic real を添加した model では

$$2^{\omega} > \omega_1,\ p(F_\sigma) = \omega_2$$

等が成立する．

2.　Martin's axiom

Martin の公理 MA は D. Martin によって提出された公理で位相空間の Baire の性質の一般化とも Boole 代数の準同型の存在に関する Rasiowa-Sikorski の定理の一般化とも考えられる．

先ず Baire の性質について述べると，位相空間 X に於ては二つの双対な作用素，開核 (open kernel) と閉包 (closure) が定まっている．開核を例えば □，閉包を ◇ で記せばこれらは勿論単調な中等作用素である．即ち

$$\Box\Box = \Box \qquad \Diamond\Diamond = \Diamond$$

又，補集合の作用素 − とは関係

$$-\Box = \Diamond - \qquad -\Diamond = \Box -$$

で結ばれている．大切なことはこれらの積 □◇，◇□ が再び中等となることである．

$$\Box\Diamond\Box\Diamond = \Box\Diamond \qquad \Diamond\Box\Diamond\Box = \Diamond\Box$$

巾等作用素は像の概念と固定点の概念が一致することである

$$\varphi^2 = \varphi \quad \equiv \quad Im(\varphi) = Fix(\varphi)$$

集合Aに対して$\Box\Diamond A = X$のときAは dense $\Box\Diamond A = \phi$のときAは nowhere dense と呼ばれる．nowhere dense 集合の可算和として表現出来る集合は meager または 1st category set と呼ばれる．任意の開集合が 1st category でないとき，空間Xは Baire 空間と呼ばれる．例えば有理数の全体の空間Qは Baire 空間ではないけれどもその完備化Rは Baire 空間である．

次に Boole 代数とそれに対応した位相空間の概念についてふれる．Boole 代数Bは"でない"，"または"，"そして"に対応する函数－，＋，・の定義された代数で

$$a+b = b+a \qquad ab = ba$$

$$a+(bc) = (a+b)(a+c) \qquad a(b+c) = ab+ac$$

$$a+(b\cdot -b) = a \qquad a(b+-b) = a$$

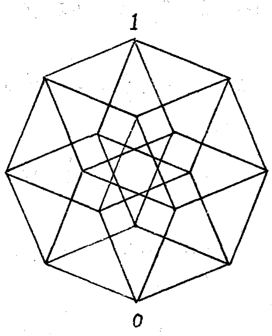
を満足するものをいう．Bは同値な関係

$$a \leq b \quad \equiv \quad a\cdot b = a \quad \equiv \quad a+b = b$$

によって一つの部分順序体系になる．任意の集合が最小上界を有するような Boole 代数を完備ブール代数と呼ぶ．代表的な例は

$$B_X = Im(\Box\Diamond) = Fix(\Box\Diamond)$$

で，位相空間 X の正則開集合（regular open sets）のなす完備ブール代数である．



例えば完備性は，$\forall \nu \in \Lambda\ (A_\nu \in \mathcal{B})$ とすれば

$$A_\nu = \Box\Diamond A_\nu \subset \Box\Diamond \bigcup_{\nu\in\Lambda} A_\nu \in \mathcal{B}$$

であり $A_\nu \subset A = \Box\Diamond A$ とすれば

$$\Box\Diamond \bigcup_{\nu\in\Lambda} A_\nu \subset \Box\Diamond A = A$$

であるから最小上界を有することが解る．単調性と中等性があればよいということである．

最小の自明でない完備ブール代数を $2 = \{0, 1\}$ と記す．2 への準同型対応の全体を $\mathcal{B}^*$ と記す．即ち

$$h \in \mathcal{B}^* \equiv h : \mathcal{B} \to 2$$

であって，$\mathcal{B}^*$ を代数 $\mathcal{B}$ の双対空間（dual space）と呼ぶ．その位相については，$\mathcal{B}$ の元 a に対して

$$h \in a^* \equiv h(a) = 1$$

を開集合の基として導入するのである．同じことであるが表現函数を用いて記せば

$$a^*(h) = h(a)$$

であって$\mathcal{B}$の元の adjoint を$\mathcal{B}^*$の開集合の基としての位相空間である.

ブール代数$\mathcal{B}$と$\mathcal{B}^*$の正則開集合の作るブール代数$\mathcal{B}^{**}$は

$$a \mapsto a^*$$

によって結ばれている.

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{B}^{**}$$

特に$\mathcal{B}$が完備である場合には$\mathcal{B} \approx \mathcal{B}^{**}$である. また性質

$$(\sum_\nu a_\nu)^* = \Box\Diamond \bigcup_\nu a_\nu^*$$

が成立する. 即ち$*$に関する$\sum_\nu$の adjoint が$\Box\Diamond\bigcup_\nu$であるので

$$\sum_\nu a_\nu = 1 \quad \equiv \quad \bigcup_\nu a_\nu^* : dense\ open$$

である. ともあれ基本的なことは

$\mathcal{B}^*$は完全不連結で compact な Baire 空間である.

これが Wallman-Stone の定理である. また

$$\sum h(a) = 1 \quad \equiv \quad h \in \bigcup a^*.$$

でもあるので, $\sum_\nu a_{n\nu} = 1$ $(n=0,1,\cdots,)$ なる可算個の関係より可算個の dense opes sets $\bigcup_\nu a_{n\nu}^*$ を得る. Baire の性質の意味するところは

$$h \in \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_\nu a_{n\nu}^*$$

なるhが存在することを意味するが, これは$n=0,1,2,\cdots$に対し

$$h(\sum a_{n\nu}) = \sum h(a_{n\nu})$$

を意味している. これがいわゆる Rasiowa-Sikorski の定理である.

ともあれ B^* が Baire 空間であること，即ち

可算個の dense open sets の共通部分は空でない

と Rasiowa-Sikorski の定理，即ち

可算個の等式を保つ準同型が存在する

が同値な性質である．要は"一つの"性質の位相的表現と代数的表現である．

ここで問題とするのは，上記の性質の記述に用いられた，"可算個"というのが，どの程度の条件の下でどの程度まで拡張出来るかということである．

何の条件もなしに ω_1 に拡張することが不可能であることは次の様な例を考えればよい．即ち ω_1 に離散位相を入れ，その可算個の直積空間（弱位相）

$$X = \{ f : \omega \to \omega_1 \} = \omega^{\omega_1}$$

を考える．そこで，基本開集合

$$(n\nu)^* = \{ f \in X \mid f(n) = \nu \}$$

は X の正則開集合のなす完備ブール代数の元であり

$$\sum_n (n\nu)^* = 1$$

がすべての ν について成立する．したがって ω_1 個の等式を保つ準同型 h が存在すれば，

$$h\left(\sum_n (n\nu)^*\right) = \sum_n h((n\nu)^*) = 1$$

となり，したがってある $g : \omega_1 \to \omega$ に対して

$$h((g(\nu),\nu)^*) = 1$$

となる．そこで $f \in (g(\nu),\nu)^* \cap (g(\tau),\tau)^*$ とすれば

$$g(\nu) = g(\tau) \rightarrow \nu = f(g(\nu)) = f(g(\tau)) = \tau$$

であるから，g は 1-1 である．これは ω_1 が可算ということで矛盾である．

しかし，この場合Xの中では

$$(0\,0)^*,\ (0\,1)^*,\ \cdots,\ (0\,\nu)^*,\ \cdots \qquad (\nu < \omega_1)$$

の様な ω_1 個の互に共通部分のない開集合が存在している．そこで条件として，互に共通部分のない開集合の族は高々可算という条件を考え，これを可算鎖条件（countable chain condition）又は ω_1 飽和（ω_1-saturated）と呼ぶ．この条件の下ではどの様になるであろうかと問うた訳である．そこで

" $sat(\mathcal{B}^*) \leq \omega_1$, $\nu < \lambda$ ならば $\mathcal{B}^*$ の ν 個の dense open set の共通部分は空でない"

という性質を D. Martin にしたがって $MA(\lambda)$ と記す．$MA(2^\omega)$ のことを単に MA と記し Martin の公理と呼ぶ．$MA(\omega_1)$ は Rasiowa-Sikorski の定理の特別の場合で常に成立する．故に連続体仮説が成立すれば MA は何も新しいことを主張している訳ではない．即ち

$$ZFC,\ 2^\omega = \omega_1 \rightarrow MA$$

である．問題は $2^\omega > \omega_1$，MA の無矛盾性である．

これらについては次の結果がある．

(1)　(Solovay-Tennenbaum)[2]

$$\text{ZFC},\ 2^{\omega} > \omega_1,\ \text{MA} \text{ は無矛盾である．}$$

(2)　(Martin-Solovay)[1]　MA の下では，$\lambda < 2^{\omega}$ について

(a)　λ 個の first category set の和は first category，

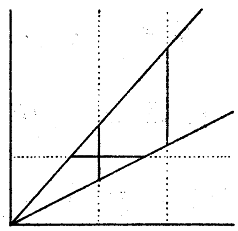
(b)　λ 個の measure zero set の和は measure zero

である．

最初の無矛盾性 (1) については，$\mathcal{B}^*$ の飽和数が $\leq \omega_1$ ならば，つまり $\mathrm{sat}(\mathcal{B}^*) \leq \omega_1$ の下では，ブール代数値の model $V^{(\mathcal{B})}$ の中で基数の概念が保たれること，および

$$u(\langle a\ 1\rangle) = a \qquad u(\langle a\ 0\rangle) = -a$$

なる $u \in V^{(\mathcal{B})}$ は $u : \mathcal{B} \to 2$ なる $V^{(\mathcal{B})}$ の中での準同型写像を与えること．また，例えば個数は増加するが共通部分は空になる列の性質を用い，この様な拡張をくり返し用いる．これはブール代数の極限による model に対応している．



---

1) D. Martin, R.M. Solovay : Internal Cohen extensions ; Annals of Mathematical Logic 2 (1970) 143-178.

2) R.M. Solovay, S. Tennenbaum : Iterated Cohen extensions and Souslin's problem; Annals of Mathematics 94 (1971) 201-245.

次に(2)の部分については、自然数の無限部分集合の集りに対する次の様な性質が重要な働きをしている様に思える.

A, B を 2^{ω} より基数の小さい ω の部分集合の集りで，B の任意の元 b は A の任意の有限個の元 $x_1,\cdots,x_n$ に対して

$$b - x_1 \cup \cdots \cup x_n : \text{無限}$$

となるならば，ある ω の部分集合 a に対して

$$x \in A \longrightarrow a \cap x \quad \text{は有限}$$

$$y \in B \longrightarrow a \cap y \quad \text{は無限}$$

となる様に出来る. つまり $a \cap x$ が有限か無限かで A と B の集合を分類することが出来るというのである.

Martin の公理の下でこの性質を示す為には，次の様な部分順序体系 $(P, \leq)$ が用いられる:

$$P = \{(k\ K) \mid k \subset \omega,\ \#k < \omega,\ K \subset A,\ \#K < \omega\}$$

$$(k_1, K_1) \leq (k_2, K_2) \equiv k_1 \subset k_2 \wedge K_1 \subset K_2 \wedge k_2 \cap \bigcup K_1 \subset k_1$$

この部分順序の意味は (k, K) に於て K は禁止条件で，"$\bigcup K$ の外に加えよ" ということである.

飽和性については $(k, K_1), (k, K_2) \leq (k, K_1 \cup K_2)$ によって，また

$$X_{b,n} = \{(k\ K) \mid \#(b \cap k) \geq n\} \qquad (b \in B)$$

$$Y_a \quad = \{(k\ K) \mid a \in K\} \qquad (a \in A)$$

が $(P, \leq)$ の順序より定まる位相空間で dense open なことより，MA を用いて，その双対空間，即ち $(P, \leq)$ の maximal ideal です

べての Y_a, $X_{b,n}$ と交わるもの $\mathcal{F}$ がある．この $\mathcal{F}$ を用いて

$$a = \bigcup_{(k,K)\in\mathcal{F}} k$$

としたものが求める集合 a である．

さて，1st category 集合の 2^ω 個より少い個数の和が再び 1st category であることに関しても次のように考える．

U_i を R の開集合の基，A_ν $(\nu<\rho<2^\omega)$ を R の nowhere dense sets とする．そこで

$$a_\nu = \{i\in\omega \mid A_\nu \cap U_i \neq \phi\} \qquad (\nu<\rho)$$

$$b_n = \{i\in\omega \mid U_i \subset U_n\} \qquad (n<\omega)$$

とおき，$A = \{a_\nu \mid \nu<\rho\}$ および $B = \{b_n \mid n<\omega\}$ を考える．

$$i\in b_n - a_{\nu_1}\cup\cdots\cup a_{\nu_m} \equiv U_i\subset U_n \wedge U_i\cap(A_{\nu_1}\cup\cdots\cup A_{\nu_m}) = \phi$$

であり上の条件が満足される．したがってある $a\subset\omega$ に対し

$$a_\nu\cap a \text{ は有限，} b_n\cap a \text{ は無限}$$

となる．そこで

$$W_n = \bigcup_{n<i\in a} U_i$$

とすると，$n<i\in a\cap b_m$ とすると $U_m\subset U_i\subset W_n$ で W_n は dense open である．そして

$$p\in A_\nu\cap\bigcap_{n\in\omega} W_n \rightarrow \forall n\in\omega\,\exists m\in a\,(m>n \wedge p\in U_m)$$

であるから

$$a_\nu\cap a = \{i\in a \mid A_\nu\cap U_i \neq \phi\}$$

が無限となる．これは a の性質に反する．即ち

$$\bigcup_{\nu<\rho} A_\nu \cap \bigcap_{n\in\omega} W_n = \phi$$

を意味している．即ち $\bigcup_{\nu<\rho} A_\nu$ は 1st category set である．

ここまで来れば F_σ 集合の ω_2 列（2^ω 列）がとれることは明らかであろう．今 $\rho < 2^\omega$ として 1st category の F_σ 集合の増加列

$$A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_\nu \subsetneq \cdots \quad (\nu<\rho)$$

が定まったとする．$\rho-1$ が存在すれば $p \notin A_{\rho-1}$ として

$$A_\rho = A_{\rho-1} \cup \{p\}$$

ρ が極限数なら $\bigcup_{\nu<\rho} A_\nu \subset A_\rho$ となる 1st category の F_σ set をとればよい．

性質 (b) については次の様に考える．

U_i $(i\in\omega)$ を R の開集合の基とし，A_ν $(\nu<\rho<2^\omega)$ を外測度 0 の集合とする．自然数 n に対して順序体系 $(P_n,\leq)$ を

$$P_n = \{U \mid U \text{ open}, \mu(U)<\tfrac{1}{n}\}$$

$$U \leq V \equiv U \subseteq V$$

によって定める．$(P_n,\leq)$ の飽和数 $\leq \omega_1$ については次のように考えてみよう．即ち

$$V_0, V_1, \cdots, V_\nu, \cdots \qquad (\nu<\omega_1)$$

がお互に P_n の中に上界を有さないとする．それは $\nu \neq \tau \in \omega_1$，

$$\mu(V_\nu \cup V_\tau) > \frac{1}{n}$$

ということである．次に

$$D_m = \{\nu<\omega_1 \mid \mu(A_\nu) < \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{m}\}$$

とすれば $\omega_1 = \bigcup_{m\in\omega} D_m$ であるから，ある m に対して $\# D_m = \omega_1$ で

ある．V_νはU_iの有限和で近似出来るから有限集合$a_\nu \subset \omega$をもって$\bigcup_{i \in a_\nu} U_i \subset V_\nu$かつ

$$\mu(V_\nu - \bigcup_{i \in a_\nu} U_i) < \frac{1}{2m}$$

と出来る．D_mは非可算でωの有限集合の全体は可算であるかから$\nu \neq \tau \in D_m$で$a_\nu = a_\tau$となるものがある．即ち

$$V_\nu \cup V_\tau = (V_\nu - \bigcup_{i \in a_\nu} U_i) \cup (V_\tau - \bigcup_{i \in a_\tau} U_i) \cup \bigcup_{i \in a_\nu} U_i$$

である．したがって

$$\frac{1}{n} < \mu(V_\nu \cup V_\tau) \leq \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{m} = \frac{1}{n}$$

となり矛盾である．そこでMAを用いることにすると，

$$D_\nu = \{U \in P_n \mid A_\nu \subset U\}$$

は$(P_n, \leq)$のdense open setであるから極大filter F_nですべてのD_νと交るものがある．

$$W_n = \bigcup_{U \in F_n} U$$

とおくと，W_nは開集合で$A_\nu \subset W_n$である．もし$\mu(W_n) > \frac{1}{n}$であれば$\mu(V_1 \cup \cdots \cup V_k) > \frac{1}{n}$となる$V_1, \cdots, V_k \in F_n$があるが$F_n$はfilterであるから$V_1 \cup \cdots \cup V_k \in F_n$よって$\mu(V_1 \cup \cdots \cup V_k) < \frac{1}{n}$となり矛盾である．これより

$$\bigcup_{\nu < \rho} A_\nu \subset \bigcap_{n \in \omega} W_n$$

であり$\mu(\bigcap_{n \in \omega} W_n) = 0$となる$G_\delta$集合である．

F_σ集合の場合と同様にG_δ集合のω_2列がとれる（$\omega_2 \leq 2^\omega$の下で）．

3．Random, Generic extension

今まで MA, $2^{\omega}>\omega_1$ の下で F_σ, G_δ の ω_2 列がとれることを示したが，ここでは $2^{\omega}>\omega_1$ であるが F_σ とか G_δ の ω_2 列がとれない場合について述べる．

先ず出発点となる model の中では $2^{\omega}=\omega_1$ が成立するものと仮定して位相空間 $2=\{0,1\}$ の ω_2 個の直積空間

$$X = 2^{\omega_2}$$

を考える．その上の正則開集合のブール代数を $\mathcal{B}_1$ とする．また $\mu(\{0\})=\frac{1}{2}$, $\mu(\{1\})=\frac{1}{2}$ の直積測度による X の上の完備ブール代数を $\mathcal{B}_2$ とする．いずれも飽和数 ω_1 である．例えば A_ν $(\nu<\omega_1)$ で $\mu(A_\nu)>0$, $\mu(A_\nu\cap A_\mu)=0$ となるものがあればある n に対して $\mu(A_\nu)>\frac{1}{n}$ となるものが無限個存在するから $n+1$ 個の元をとって $A_{\nu_1},\cdots,A_{\nu_{n+1}}$ とすれば互に素，共通部の測度 0 より

$$1\geq\mu(A_{\nu_1}\cup\cdots\cup A_{\nu_{n+1}})\geq\mu(A_{\nu_1})+\cdots+\mu(A_{\nu_{n+1}})\geq\frac{n+1}{n}>1$$

となり矛盾である．正則開集合についてもこの場合は $A\neq\phi$ ならば $\mu(A)>0$ であるから飽和数 ω_1 である．

これより $V^{(\mathcal{B})}$ の中で基数の概念は不変で

$$2^{\omega}=\omega_2$$

が成立することが知られている．

定理．$\mathcal{B}$ を上記の正則開集合の代数又は直積測度による代数とする．性質 $P(f,g)$ が否対称，即ち

$$\forall f, g\,(P(f,g) \to \neg P(g,f))$$

ならば $V^{(B)}$ の中では

$$f : \omega_2 \to \omega^{\omega}\ ,\ \forall \nu < \omega_2\, \forall \tau < \nu\, P(f(\tau), f(\nu))$$

なる f は存在しない[1]。

証明については，例えば次のように考えればよい．最大値の定理より，$V^{(B)}$ の中で

$$\nu < \omega_2 \ \to\ \langle f(\nu) : \omega \to \omega \rangle = 1$$

$$\tau < \nu < \omega_2 \ \to\ \langle P(f(\tau), f(\nu)) \rangle = 1$$

となるものがある．各 $\nu < \omega_2$ に対して

$$\langle f(\nu)(m) = n \rangle = a_{mn}$$

とすると，$a^{\nu}_{mn} \in B$ は X の Borel 集合で代表されるので，この集合の記述に可算個の添字のみが関係している，各自然数の組 (m, n) に対して可算であるから，その可算集合を $b(\nu) \subset \omega_2$ とする．$\mathcal{P}_{\omega_1}(\omega_2) = \{ a \subset \omega_2 \mid \# a < \omega_1 \}$ とする．

ここで，いわゆる Δ-lemma について記しておく．それは

$$b : \omega_2 \to \mathcal{P}_{\omega_1}(\omega_2)$$

に対して $A \subset \omega_2$, $\# A = \omega_2$ および $c \subset \omega_2$ が存在して，

$$\tau < \nu \in A \ \to\ b(\tau) \cap b(\nu) = c.$$

大切な点はこの共通部分が A の元に無関係ということである．これを示す為に $b(\nu)$ が一定の長さ $\rho < \omega_1$ をもつとして，

1) この結果は Colorado 大 Laver 氏，埼玉大 花沢正純氏，大阪府大 加茂静夫からも教えて頂いた．

その元を小さなものから順に

$$b(\nu)(0),\ b(\nu)(1),\ \cdots,\ b(\nu)(\tau),\ \cdots \qquad \tau<\rho$$

とする．$c_\tau(\nu)=b(\nu)(\tau)$ として $c_\tau:\omega_2\to\omega_2$ が有界でない最小数を τ_0 とする，なければ $\tau_0=\rho$．$c_\sigma(\nu)$；$\sigma<\tau_0,\ \nu<\omega_2$ の上界を η とする．

$$\{b(\nu)(\sigma)\mid\sigma<\tau_0\}\subset\eta$$

は η の可算部分集合でその全体の基数は $2^\omega\cdot\omega_1=\omega_1$（連続体仮説）したがってある可算集合 c に対して

$$D=\{\nu\in\omega_2\mid c=\{b(\nu)(\sigma)\mid\sigma<\tau_0\}\}$$

の基数が ω_2 となる．$p:\omega_2\to D$ を帰納法で

$$\sup_{\substack{\tau<\rho\\ \nu<\sigma}} b(p(\nu))(\tau)<b(p(\sigma))(\tau_0),\qquad p(\sigma)\in D$$

と定める．そして $A=\{p(\nu)\mid\nu<\omega_2\}\subset D$ とすればよい．

そこで最初から

$$\nu<\tau<\omega_2\to b(\nu)\cap b(\tau)=c$$

と仮定してよい．

さて $g(\nu):b(\nu)-c\xrightarrow{1\text{-}1}\omega$ をとる．この添字の変換によって a^ν_{mn} は $Y=2^{\omega\oplus c}$ のボレル集合に写される．それを $g(\nu)(a^\nu_{mn})$ と記す Y のボレル集合の全体の基数は $2^\omega=\omega_1$ であるから，ω_2 の基数の集合 $E\subset D$ で

$$m,n\in\omega,\ \nu,\tau\in E\ \to\ g(\nu)(a^\nu_{mn})=g(\tau)(a^\tau_{mn}).$$

そこで E の二つの元 ν，τ をとって添字の置換

$$h(\sigma)=\begin{cases} g^{-1}(\nu)\circ g(\tau)(\sigma) & \text{if } \sigma\in b(\tau)-c\\ g^{-1}(\tau)\circ g(\nu)(\sigma) & \text{if } \sigma\in b(\nu)-c\\ \sigma & \text{if } \sigma\in c\end{cases}$$

とすれば $h(a^{\nu}_{mn}) = a^{\tau}_{mn}$, $h(a^{\tau}_{mn}) = a^{\nu}_{mn}$ であるから，最初の函数 $f^{\nu}, f^{\tau}: \omega \to \omega$ の置換を生ずる．即ち

$$h(f(\nu)) = f(\tau),\ h(f(\tau)) = f(\nu)$$

である．これより $\langle P(f(\nu), f(\tau))\rangle = 1$ を用いれば

$$h(\langle P(f(\nu), f(\tau))\rangle) = \langle P(h(f(\nu)), h(f(\tau)))\rangle = \langle P(f(\tau), f(\nu))\rangle = 1$$

となり $\langle P(f(\nu), f(\tau))\rangle \langle P(f(\tau), f(\nu))\rangle = 1$ を得る．これは仮定に反する．

自然数列 $f: \omega \to \omega$ を用いて定義出来る実数の部分集合 $T(f)$ を考える．即ち論理式 $R(f, x)$ を用いて

$$x \in T(f) \equiv R(f, x)$$

と出来るとき，次の $P(f, g)$ などはこの性質をみたす．即ち

$$P(f, g) \equiv T(f) \subsetneq T(g) \equiv \forall x (R(f, x) \to R(g, x)) \wedge \exists x (R(g, x) \wedge \neg R(f, x))$$

例えば F_σ 集合 Borel 集合，解析集合等は自然数の可算列，即ち一つの実数より定義可能な集合である．

増加列の上限を $\sigma(\Gamma)$ ，減少列の型の上限を $\tau(\Gamma)$ とすれば

$$\begin{array}{ccccccccc} \sigma(F_\sigma) & \le & \sigma(\Delta^1_1) & \le & \sigma(\Sigma^1_1) & \le & \sigma(\Delta^1_2) & \le & \cdots \\ & & \| & & & & \| & & \\ \sigma(G_\delta) & \le & \tau(\Delta^1_1) & \le & \sigma(\Pi^1_1) & \le & \tau(\Delta^1_2) & \le & \cdots \end{array}$$

であるが，例えば $\sigma(F_\sigma) < \tau(F_\sigma)$, $\tau(F_\sigma) < \sigma(F_\sigma)$ とか

$$\sigma(F_\sigma) < \sigma(\Delta^1_1),\ \sigma(\Delta^1_1) < \sigma(\Sigma^1_1),$$

の様な不等号が可能であろうか．

問題 1. 無矛盾性の意味で，$\sigma(\Delta^1_1) < \sigma(\Sigma^1_1) < \sigma(\Delta^1_2) <$ 等の不等号の可能性を決定すること

問題2　$\sigma(\sum_1^1)$，$\tau(\sum_1^1)$ 等の大小の関係の可能性を決定すること．

問題3　1の分割の可算列 (a_{nm}^ν) の ω_2 列が与えられたとき $\tau<\sigma<\omega_2$ が存在して，$f:B\to B$ に対して $f(a_{mn}^\nu)=a_{mn}^\tau$，$f(a_{mn}^\tau)=a_{mn}^\nu$ となる f の存在する B の具体的記述を与えること．

これは $V^{(B)}$ に於ける自然数列の ω_2 列が与えられたとき，その二つの置換を生ずる様な B の自己同型が存在するかという意味である．これを例えば $(2)\,|\,\omega_2\to{}^\omega\omega$ と記す．

$X=2^{\omega_2}$ の Borel set を可算集合で割ったもの（Sacks の例）

$X=2^{\omega_2}$ の co-countable topology の完備ブール代数等ではどうなるか．