数理解析研究所講究録
第 480 巻 1983 年 230-236

Nonstandard arithmetic of function fields over H-convex subfields of ${}^*\mathbb{Q}$

名大理 安本雅洋 (Masahiro Yasumoto)

$\mathbb{Q}$を有理数体. ${}^*\mathbb{Q}$を$\mathbb{Q}$の nonstandard model. Hを${}^*\mathbb{Q}$上の height. すなわち.

$$H\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \max(|\alpha|, |\beta|) \quad (\alpha, \beta \in {}^*\mathbb{Z},\ (\alpha, \beta) = 1)$$

とする。

${}^*\mathbb{Q}$の部分体Q_1が. H-convex であるとは. $x \in Q_1$で. $H(y) \le H(x)$ ならば. $y \in Q_1$ が成立することとする。

H-convex subfield Q_1は. ${}^*\mathbb{Q}$の中で. 代数的に閉じている。(Lemma 1) 従って. $x \in {}^*\mathbb{Q} - Q_1$ とし. $y \in {}^*\mathbb{Q}$を. $Q_1(x)$上. 代数的な元とすると. $Q_1(x, y)$は. Q_1を constant field とする. 一変数代数関数体になる。 この論文においては. ${}^*\mathbb{Q}$の divisor theory と. $Q_1(x, y)$ の divisor theory との関係についての結果を証明する。 これらの結果の. 不定方程式論への応用については. [2] を参照されたい。

Lemma 1. ${}^*\mathbb{Q}$の. H-convex subfield Q_1は.

${}^*Q$の中で代数的に閉じている。

[証明]　$\alpha/\beta \in {}^*Q - Q_1$ とする。ただし $\alpha, \beta \in {}^*Z$ で $(\alpha, \beta) = 1$。そうすると $\alpha \notin Z_1 = Q_1 \cap {}^*Z$ か又は $\beta \notin Z_1$。$\alpha \notin Z_1$ としても一般性を失なわない。

α/β が Q_1上代数的ならば $c_0, c_1, \cdots, c_n \in Z_1$ が存在して

$$c_0\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + c_1\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

で $c_n \neq 0$ になる。

$$c_0\alpha^n + c_1\alpha^{n-1}\beta + \cdots + c_n\beta^n = 0$$

$$c_n\beta^n \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ \alpha$$

$(\alpha, \beta) = 1$ であるから

$$c_n \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ \alpha$$

Z_1は convex で $\alpha \notin Z_1$ だから $|c_n| < |\alpha|$。従って

$$c_n = 0$$

これは矛盾である。//

$R = \{\beta/\alpha \in {}^*Q \mid \alpha \in Z_1,\ \beta \in {}^*Z\}$, IをRの maximal ideal とする。そうすると I の local ring R_I は valuation ring になる。実際 $\beta/\alpha \notin R_I$, $(\alpha, \beta) = 1$ とすると $\alpha \in I$ 従って $(\alpha, \beta) = 1$ より $\beta \notin I$ となり $\alpha/\beta \in R_I$ がいえる。

$$R_\infty = \{\beta/\alpha \in {}^*Q \mid |\beta/\alpha| < \gamma \text{ for some } \gamma \in Z_1\}$$

とおくと R_∞ は valuation ring で その maximal ideal は $\{\beta/\alpha \in {}^*\mathbb{Q} \mid |\beta/\alpha| < 1/|\gamma| \text{ for all } \gamma \in Z_1\}$。

$F \subseteq {}^*\mathbb{Q}$ を $\mathbb{Q}_1$を constant field とする 一変数代数関数体とする。 $F \cap R_\infty$ が trivial でないなら(すなわち $F \not\subseteq R_\infty$ なら) $F \cap R_\infty$ は valuation ringになる。
$\mathbb{Q}_1 \subset F \cap R_\infty$ より これは F の functional prime P を引き起こす。 この時 P は archimedean prime によって引き起こされると呼ぶ。

I を R の maximal ideal とする。 もし $F \cap R_I$ が trivial でないなら 前と同様 これは F の functional prime P を引きおこす。

p を ${}^*\mathbb{Z}$ の素数とする。

$$I_p = \{\beta/\alpha \in R \mid |\beta/\alpha|_p < 1/|\gamma| \text{ for all } \gamma \in Z_1\}$$

とおくと I_p は R の maximal ideal になる。 functional prime P が I_p によって引きおこされる時 単に P は p によって引き起こされるという。

Theorem 1. すべての functional prime P は archimedean prime か又は R の maximal ideal で引きおこされる。

[証明] Riemann-Roch の定理より Pだけをpoleに持つような $\beta/\alpha \in F$ が存在する。 もし すべての $\gamma \in Z_1$

に対して，$|\beta/\alpha| > \gamma$ ならば，$\beta/\alpha \notin R_\infty$ となり，従って

$$\beta/\alpha \notin R_\infty \cap F.$$

よって archimedean prime によって引きおこされる functional prime は，β/α の pole になるが，β/α のとり方より，これは P になる。

もし $|\beta/\alpha| < \gamma$ となる，$\gamma \in Z_1$ が存在するならば，

$$\alpha \in {}^*\mathbb{Z} - Z_1$$

となる。I_αを，αを含むような R の maximal ideal とする。すると

$$\beta/\alpha \notin R_{I_\alpha}.$$

従って

$$\beta/\alpha \notin R_{I_\alpha} \cap F.$$

よって，前と同様，P が I_αによって，引き起こされることがわかる。//

$Z_1 = \mathbb{Z}$ の場合は，すべての functional prime が，archimedean prime か，又は ${}^*\mathbb{Z}$ の素数によって引き起こされることが，知られている。[1]　一般には，次のことが成立する。

Theorem 2.　ある $x \in F$ が存在して

$$H(x) > e^c$$

が，すべての $c \in Q_1$ に対して，成立しているとすると，

すべての functional prime P は archimedean prime か又は $^*\mathbb{Z}$ の素数で引き起こされる。

まず始めに、次の Lemma を証明する。

Lemma 2. ある $x \in F$ が存在して

$$H(x) > e^c$$

が、すべての $c \in Q_1$ について成立するならば、すべての $x \in F - Q_1$ に対しても、同じことが成立する。

[証明] $Q_2 = \{x \in {}^*Q \mid H(x) < e^c \text{ for some } c \in Q_1\}$ とおくと、Q_2 は H-convex subfield。従って、Lemma 1 より、Q_2 は $^*Q$ の中で代数的に閉じている。もし、Q_2 が $F - Q_1$ の元を一つでも含んでいれば、$F \subset Q_2$ となって、仮定に反する。従って、すべての $F - Q_1$ の元は、Q_2 の元にはならない。//

Lemma 3. $2 \leqq c \in \mathbb{Z}$ とする。

$$|x|_p \leqq c$$

が、すべての prime p (∞ を含む) で成立するなら、

$$H(x) \leqq e^{3c}$$

になる。

[証明] $S = \{p \mid p \text{ は素数で、} |x|_p > 1\}$

とおくと．

$$H(x) = \prod_p \max(1, |x|_p) \leqq c \cdot \prod_{p\in S} |x|_p$$

$p \in S$ なる素数 p に対して．

$$1 < |x|_p = p^{-v_p(x)} \leqq c$$

$$0 < -v_p(x) \leqq \log c / \log p$$

従って　　　$p \leqq c$ ．

$$\prod_{p\in S} |x|_p \leqq \prod_{p\leq c} p^{\log c/\log p} = \prod_{p\leq c} e^{\log c}$$

$$\leqq e^{\pi(c)\log c}$$

ただし．$\pi(c)$ は．$p \leqq c$ なる素数 p の数とする。

素数定理より．

$$\pi(c)\log c < 2c .$$

従って

$$\prod_{p\in S} |x|_p < e^{2c}$$

$$H(x) < ce^{2c} < e^{3c} \quad //$$

[Theorem 2 の証明]

$x \in F - Q_1$ とすると．Lemma 2 より．すべての $0 < c \in Z_1$ に対して

$$H(x) > e^{3c} .$$

従って．Lemma 3 より．ある $^*Z$ の prime p_c が存在して

$$|x|_{p_c} > c$$

従って ある $0 < c \notin Z_1$ に対して

$$|x|_p > c$$

となる prime p が存在する。

P を任意の functional prime とし、$x \in F - Q_1$ を P だけを pole に持つ元とする。そうすると P は上の p によって引き起こされる。//

References.

[1] A. Robinson – P. Roquette, On the finiteness theorem of Siegel-Mahler concerning diophantine equations. J. Number Theory 7 (1975), 121–176.

[2] M. Yasumoto, Nonstandard arithmetic of function fields over H-convex subfields of $^*Q$ to appear in Crelle's Journal).