数理解析研究所講究録
第 481 巻 1983 年 28-37

Šilov 境界上のベクトル値函数と Weil 表現

広大理　山田裕史
(Yamada Hirofumi)

§1. A simple example

実数直線 $\mathbb{R}$ は実単純リー群 $G=SL(2,\mathbb{R})\ (\cong SU(1,1))$ に付随するエルミート対称空間 $\mathcal{D}=\{z=x+iy\,;\,y>0\}$ (上半平面) の Šilov 境界と考えられる。$g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in G$, $x\in\mathbb{R}$ としたとき、作用は $g\cdot x=(ax+b)(cx+d)^{-1}$ で与えられる。$f\in L^2(\mathbb{R})$ に対して

$$(U(g)f)(x)=(cx+d)^{-1}f((ax+b)(cx+d)^{-1}) \quad \text{for } g^{-1}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とすると $(U, L^2(\mathbb{R}))$ は G のユニタリ表現であることは、簡単に確かめられる。U が次のように既約分解されることはよく知られている。([4, p102])

$$U=U_+\oplus U_-$$

U_+ の空間 $\cong$ 上半平面の Hardy 空間 H_+

U_- の空間 $\cong$ 下半平面の Hardy 空間 H_-

(U_+ は正則離散系列の極限の表現である。)

$f \in L^2(\mathbb{R})$ に対してフーリエ変換を

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f(x)\,dx \qquad (y \in \mathbb{R})$$

により定義すると、

$$H_+ \cong \{ f \in L^2(\mathbb{R})\,;\ \hat{f}(y) \equiv 0 \quad \text{for } y < 0 \}$$

$$H_- \cong \{ f \in L^2(\mathbb{R})\,;\ \hat{f}(y) \equiv 0 \quad \text{for } y > 0 \}$$

である。([1])

本稿ではこの現象の一般化を、Weil 表現を用いて考察する。証明の方針は基本的には [3] に従う。

§2. Šilov 境界上の函数.

まず記号を整理しておく。

$G = SU(n,n) = \{ g \in SL(2n, \mathbb{C})\,;\ gJg^* = J$ ただし $J = \left(\begin{array}{c|c} & -i \\ \hline i & \end{array}\right) \}$

$K = \{ g = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in G\,;\ (a+ib, a-ib) \in S(U(n) \times U(n)) \}$

$\cong S(U(n) \times U(n))$ 　極大コンパクト部分群.

$\mathcal{D} = G/K \cong \{ z = x+iy\,;\ x, y \in H(n),\ y \gg 0 \}$

(ここで $H(n)$ は n 次エルミート行列全体、$\gg$ は正定値を あらわす。)

$\mathcal{D}$ の Šilov 境界 $= \overline{\mathcal{D}} \cap \{ \mathrm{Im}\, z = 0 \} \cong H(n)$

$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G,\quad x \in H(n)$ としたとき作用は、

$g \cdot x = (ax+b)(cx+d)^{-1}$ で与えられる。また、$H(n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ 上の

ユークリッド測度を dx とかく。

$$P=\left\{\begin{pmatrix} a & * \\ 0 & a^{*-1}\end{pmatrix}\in G \ ;\ a\in GL(n,\mathbb{C}),\ \det a\in\mathbb{R}\right\}$$

とおくとこれは，G の極大放物型部分群である。P の任意の元は $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{*-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $(a\in GL(n,\mathbb{C}),\ \det a\in\mathbb{R},\ x\in H(n))$ と一意的に分解される。

今 $GL(n,\mathbb{C})$ の多項式表現で determinant factor を含まないもの (τ, V_τ) を固定する。V_τ には $\tau(a^*)=\tau(a)^*$ となるように内積 $\langle\ ,\ \rangle_{V_\tau}$ を入れておく。

$$L^2_\tau(H(n)) := \left\{f : H(n)\longrightarrow V_\tau \ ;\ \int_{H(n)}\langle\tau(1+x^2)f(x), f(x)\rangle_{V_\tau}\,dx<\infty\right\}$$

とおく。$f\in L^2_\tau(H(n))$ に対して フーリエ変換を

$$\hat{f}(y)=\int_{H(n)} e^{-i\mathrm{Tr}\,xy} f(x)\,dx \qquad y\in H(n)$$

と定義する。ただしこれは distribution sense である。

$p+q\leqq n$ なる非負整数 p, q に対して 符号が (p,q) の $H(n)$ の元全体を $\mathcal{O}_{p,q}$，その閉包を $\overline{\mathcal{O}}_{p,q}$ とかく。もし，$p+q=n$ なら，$\mathcal{O}_{p,q}$ は開集合で，$\overline{\mathcal{O}}_{p,q}=\bigcup_{\substack{p'\leqq p\\ q'\leqq q}}\mathcal{O}_{p',q'}$ である。

$p+q=n$ なる p, q に対して，

$$L^2_{\tau(p,q)}(H(n)) := \left\{f\in L^2_\tau(H(n)) \ ;\ \mathrm{supp}\,\hat{f}\subset\overline{\mathcal{O}}_{p,q}\right\}$$

とおく。

$f \in L^2_\tau(H(n))$ に対し

$$(T(g)f)(x) = \det(cx+d)^{-n}\,\tau(cx+d)^{-1} f((ax+b)(cx+d)^{-1})$$

for $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ により G の表現を定義する。

<u>Proposition 1</u>　$L^2_{\tau(p,q)}(H(n))$ は $T(P)$―不変である。

本稿の目的は $L^2_{\tau(p,q)}$ 内の G―不変な部分空間の存在を示すことである。既約成分の explicit な実現は今後の問題として残っている。

§3　Weil表現とそのテンソル積

$G = SU(n,n)$ は $g(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{*-1} \end{pmatrix}$ ($a \in GL(n,\mathbb{C})$, $\det a \in \mathbb{R}$), $t(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($b \in H(n)$), $\sigma = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ という形の元で生成される。G の <u>Weil表現</u> (Segal-Shale-Weil表現, 調和表現) L は各元に対し次式で与えられる。

$$(L(g(a))f)(w) = (\det a) f(a^* w)$$

$$(L(t(b))f)(w) = e^{-i\langle bw, w\rangle} f(w)$$

$$(L(\sigma)f)(w) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int e^{-2i\,\mathrm{Re}\langle w, w'\rangle} f(w')\,|dw'|^2.$$

ここで $f \in L^2(\mathbb{C}^n)$, $|dw'|^2$ は $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ のユークリッド測度, $2^n d(\mathrm{Re}\,w_1')d(\mathrm{Im}\,w_1')\cdots d(\mathrm{Re}\,w_n')d(\mathrm{Im}\,w_n')$, $\langle\,,\,\rangle$ は $\mathbb{C}^n$ の

エルミート内積である。急減少函数の空間 $\mathcal{S}(\mathbb{C}^n)$ は L の不変部分空間である。

表現 $\bar{L}$ を $\bar{L}f = \overline{L\bar{f}}$ （右辺の ‾ は複素共役）により定義し、$L_{p,q} = \overset{p}{\otimes} L \otimes \overset{q}{\otimes} \bar{L}$ とおく。$L_{p,q}$ は次式で実現される。

$$(L_{p,q}(g(a))f)(\xi) = (\det a)^{p+q} f(a^*\xi)$$
$$(L_{p,q}(t(b))f)(\xi) = e^{-i\,\mathrm{Tr}\,\xi Q \xi^* b} f(\xi)$$
$$(L_{p,q}(\sigma)f)(\xi) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{(p-q)n} \int e^{-2i\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}(\xi Q \xi'^*)} f(\xi') \, |d\xi'|^2$$

for $f \in L^2(M(n, p+q; \mathbb{C}))$。ただし $Q = \begin{pmatrix} 1_p & \\ & -1_q \end{pmatrix}$ である。ここでも $\mathcal{S}(M(n, p+q; \mathbb{C}))$ は不変部分空間である。

§4. 柏原 - Vergne の理論の復習 ([2])

今 $p+q = k$ とする。$X = M(n, k; \mathbb{C}) \times M(n, k; \mathbb{C})$, $\mathbb{C}[X] = \{X$ 上の多項式全体（各 entry が変数）$\}$ とおく。

$\Delta_{ij} = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial^2}{\partial \xi_{i\nu} \partial \eta_{j\nu}}$ $(1 \leqq i, j \leqq n)$ とする。$f \in \mathbb{C}[X]$ が <u>pluri - harmonic</u> というのを、$\Delta_{ij} f \equiv 0$ $(\forall i, j)$ により定義する。

$\mathcal{H} = \{X$ 上の pluri-harmonic 多項式全体$\}$ とする。

(λ, V_λ) を $GL(k, \mathbb{C})$ の既約表現とする。

$\mathcal{H}(\lambda) := \{ p : X \to V_\lambda$, pluri-harmonic 多項式 ;

$p(\xi c, \eta\, {}^t c^{-1}) = \lambda(c)^{-1} p(\xi, \eta) \quad \forall c \in GL(k, \mathbb{C}) \}$

とおく。 $\mathcal{H}(\lambda) \neq \{0\}$ となるような $GL(k,\mathbb{C})$ の既約表現 λ の全体を Σ とおく。 $\lambda \in \Sigma$ に対して $GL(n,\mathbb{C}) \times GL(n,\mathbb{C})$ の $\mathcal{H}(\lambda)$ 上の表現 $\tau(\lambda)$ が、

$$(\tau(\lambda)(g_1, g_2)p)(\xi, \eta) = p(g_1^{-1}\xi, {}^t g_2 \eta)$$

により定まる。

<u>Proposition 2</u> [2, Th. 6.3]

① $\tau(\lambda)$ は $GL(n,\mathbb{C}) \times GL(n,\mathbb{C})$ の既約表現。

② $\lambda \longmapsto \tau(\lambda)$ は injective.

$\lambda \in \Sigma$ に対して、$Hom(\mathcal{H}(\lambda), V_\lambda)$-valued 多項式 $I = I_\lambda$ を $I_\lambda(\xi)p = p(\xi, \bar{\xi})$ $(p \in \mathcal{H}(\lambda))$ により定義する。
I_λ が次の諸性質をみたすことは簡単に確かめられる。

i) harmonic i.e.,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial^2}{\partial \xi_{i\nu} \partial \bar{\xi}_{i\nu}} I_\lambda(\xi) \equiv 0$$

ii) $I_\lambda(\xi c) = \lambda(c)^{-1} I_\lambda(\xi)$ $\quad \forall c \in GL(k,\mathbb{C})$

iii) $I_\lambda(a\xi) = I_\lambda(\xi)\,\tau(\lambda)(a, a^{*-1})$ $\quad \forall a \in GL(n,\mathbb{C})$.

さて今後は $p = q = n$ とする。§1 で始めに固定した $GL(n,\mathbb{C})$ の多項式表現 τ に対して $\tilde{\tau} = id \otimes \tau$ とすると、$\tilde{\tau}$ は Σ の image に入っている。([2])

i.e., $\left\{ \begin{array}{l} \exists!\ \lambda : GL(n,\mathbb{C}) \text{ の表現},\ \tilde{\tau} = \tau(\lambda) \\ \qquad\qquad (\text{実は } \lambda \simeq \tau) \\ \exists!\ I = I_\lambda : Hom(V_\tau, V_\lambda)\text{-valued harmonic 多項式} \end{array} \right.$

§5. 結論.

$M(n,n;\mathbb{C})$ を簡単に M とかく。 Weil表現のテンソル積 $L_{p,q}$ $(p+q=n)$ は §3 と同じ式で.

$$L^2(M, V_\lambda) := \left\{ f : M \to V_\lambda \,;\, \int_M \|f(\xi)\|^2_{V_\lambda} \, |d\xi|^2 < \infty \right\}$$

に作用する。これを $L^\lambda_{p,q}$ とかく。 $\mathcal{S}(M, V_\lambda)$ は $L^\lambda_{p,q}$ の不変部分空間である。 $f \in \mathcal{S}(M, V_\lambda)$ に対して.

$$(\mathcal{F}^\tau_{p,q} f)(x) := \int_M e^{i\,\mathrm{Tr}\,\xi Q \xi^* x}\, I(\xi)^*\, f(\xi)\, |d\xi|^2 \qquad x \in H(n)$$

という積分変換を考える。この積分は絶対収束して. $H(n)$ 上の C^∞-函数を定める。

Proposition 3 $f \in \mathcal{S}(M, V_\lambda)$ に対して $\mathcal{F}^\tau_{p,q} f$ は L^2_τ の元である。また. $\mathcal{F}^\tau_{p,q}$ は $L^\lambda_{p,q}$ と T の間の intertwining 作用素である。

たとえば $g = g(a)$ について.

$$(\mathcal{F}^\tau_{p,q} L^\lambda_{p,q}(g) f)(x) = \int_M e^{i\,\mathrm{Tr}\,\xi Q \xi^* x}\, I(\xi)^* (\det a)^{p+q} f(a^*\xi)\, |d\xi|^2$$

$$= (\det a)^{-n} \int_M e^{i\,\mathrm{Tr}\,a^{*-1}\xi Q \xi^* a^{-1} x}\, I(a^{*-1}\xi)^* f(\xi)\, |d\xi|^2$$

$$= (\det a)^{-n}\, \tau(a^*)^{-1} (\mathcal{F}^\tau_{p,q} f)(a^{-1} x\, a^{*-1})$$

OK.

また $g = t(b)$ について.

$$(\mathcal{F}^{\tau}_{p,q} L^{\tau}_{p,q}(g) f)(x) = \int_M e^{i \operatorname{Tr} \xi Q \xi^* x} I(\xi)^* e^{-i \operatorname{Tr} \xi Q \xi^* b} f(\xi) |d\xi|^2$$

$$= (\mathcal{F}^{\tau}_{p,q} f)(x-b)$$

OK.

$g = \sigma$ については 次の lemma がある。

Lemma 4 　$M \ni \xi \longmapsto f(a\xi)$ が 任意の $a \in GL(n, \mathbb{C})$ に対して harmonic 多項式 ならば

$$\int_M e^{-2i \operatorname{Re} \operatorname{Tr} \xi Q \eta} e^{i \operatorname{Tr} \xi Q \xi^* x} f(\xi) |d\xi|^2$$

$$= (-2\pi i)^{(p-q)n} (\det x)^{-n} e^{-i \eta Q \eta^* x^{-1}} f(x^{-1}\eta)$$

この lemma より σ についての intertwining relation はすぐ出る。//

それでは $\mathcal{S}(M, V_\lambda)$ の $\mathcal{F}^{\tau}_{p,q}$ による image を調べる。

Lemma 5 　$M \ni \xi \longmapsto \xi Q \xi^* \in H(n)$ の image は $\bar{\Theta}_{p,q}$ に含まれる。

今, dy を $H(n)$ 上の ユークリッド測度 とすると. これは $\Theta_{p,q}$ $(p+q=n)$ 上の 測度 と考えられる。 $y \in H(n)$ に対して

$$V_y = \{ \xi \in M ;\ \xi Q \xi^* = y \}$$

とおく。 このとき, 各 V_y 上に 測度 $|d_y \xi|^2$ が 存在して.

$$(\mathcal{F}^{\tau}_{p,q} f)(x) = \int_M e^{i\operatorname{Tr}\xi Q\xi^* x} I(\xi)^* f(\xi) |d\xi|^2$$

$$= \int_{H(n)} e^{i\operatorname{Tr} xy} dy \int_{V_y} I(\xi)^* f(\xi) |d_y\xi|^2$$

が成り立つ。$\bar{f}(y) = \int_{V_y} I(\xi)^* f(\xi) |d_y\xi|^2$ とおけば lemma 5 より $\operatorname{supp} \bar{f} \subset \bar{O}_{p,q}$ で

$$(\mathcal{F}^{\tau}_{p,q} f)(x) = \int_{H(n)} e^{i\operatorname{Tr} xy} \bar{f}(y)\, dy.$$

すなわち、$\mathcal{F}^{\tau}_{p,q} f \in L^2_{\tau}(p,q)$.

この議論と Proposition 3 を合わせることにより、次の結果を得る。

<u>Proposition 6</u>　$p+q=n$ なる組 (p,q) に対して、$L^2_{\tau(p,q)}$ 内に G-不変な部分空間が存在する。

文献.

[1] S. Bochner : Group invariance of Cauchy's formula for several variables, Ann. of Math. 45, 686-707 (1949).

[2] M. Kashiwara and M. Vergne : On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic polynomials, Inventiones math. 44, 1-47 (1978).

[3] ――――――: Functions on the Shilov boundary of the generalized half plane, in "Non-Commutative Harmonic Analysis", Springer Lecture Notes in Math. 728, 136-176, 1979.

[4] 岡本清郷 : 等質空間上の解析学, 紀伊國屋, 1980.