数理解析研究所講究録
第 481 巻 1983 年 64-80

コンパクト群上の可微分関数

日大 理工 枝松 孝
Edamatsu Takashi

リー群上のC^n級関数の概念が、1径数部分群を使って、任意のコンパクト群Gの場合に、自然に、一般化できることをしめす($n=\infty,1,2,\cdots$)。次に、そのような関数の空間$\mathcal{E}_n(G)$の構造をしらべる。

次の諸記号を本文中で断りなしに使用する。

G　コンパクト群,

$\hat{G}=\{\sigma\}$　Gの unitary dual,

$U(\sigma)$　class $\sigma\in\hat{G}$ の代表として選んだユニタリ行列表現, 固定される。

d_σ　$U(\sigma)$の次元,

$\mathfrak{N}(G)$　Gの閉正規部分群全体の集合,

$\mathbb{R}, \mathbb{C}$　実及び複素数体,

$\mathbb{R}(H)$　位相群Hの1径数部分群(連続準同型$\mathbb{R}\longmapsto$

$\hat{G}$）全体の集合，

$c(H)$　位相群 H の連結成分（$\ni$ 単位元）。

§1　コンパクト群のリー環と1径数部分群

1）　各 $\sigma \in \hat{G}$ に対して $\mathcal{M}(d_\sigma, \mathbb{C})$ は d_σ 次複素行列全体が通常の行列演算と位相に関してなす位相*-代数とし，その直積 $\prod_{\sigma \in \hat{G}} \mathcal{M}(d_\sigma, \mathbb{C})$ を $\sum(\hat{G})$ で表わす。従って，$\sum(\hat{G})$ は局所凸位相を備えた*-代数である。$I = (I(\sigma))_{\sigma \in \hat{G}}$，$I(\sigma)$ は d_σ 次単位行列，は $\sum(\hat{G})$ の単位元である。

さて，テンソル積表現 $\sigma \otimes \sigma'$（$\sigma, \sigma' \in \hat{G}$）の既約分解は，各 class $\in \hat{G}$ の代表をもちいると，次の形で与えられる：

(1.1)　$$U(\sigma) \otimes U(\sigma') = V_{\sigma,\sigma'}^{-1} (U(\sigma_1) \oplus \cdots \oplus U(\sigma_m)) V_{\sigma,\sigma'},$$

$V_{\sigma,\sigma'}$ は $d_\sigma d_{\sigma'}$ 次ユニタリ行列．

<u>定義 1.1</u>　$\sum(\hat{G})$ の元 $T = (T(\sigma))_{\sigma \in \hat{G}}$ が次の条件を満足するとき，'条件（C1）を満足する' という：

$\sigma \otimes \sigma'$（$\sigma, \sigma' \in \hat{G}$）の既約分解が（1.1）で与えられるならば，

$$T(\sigma) \otimes T(\sigma') = V_{\sigma,\sigma'}^{-1} (T(\sigma_1) \oplus \cdots \oplus T(\sigma_m)) V_{\sigma,\sigma'}$$

が成立する。

これに対して，次の場合には '条件（C2）を満足する' という：

（1.1）のもとで，

$$T(\sigma) \otimes I(\sigma') + I(\sigma) \otimes T(\sigma') = V_{\sigma,\sigma'}^{-1} (T(\sigma_1) \oplus \cdots \oplus T(\sigma_m)) V_{\sigma,\sigma'}. \blacksquare$$

いま，$T\in\Sigma(G)$ に対して，$\exp T\in\Sigma(G)$ を成分ごとに行列の exponential をとることによって定義する。次の補題が成立する。

補題1.1　次の2条件は同値である。

(a)　$T(\in\Sigma(G))$ が条件(C2)を満足する。

(b)　すべての $t\in\mathbb{R}$ に対して，$\exp tT$ が条件(C1)を満足する。

定義1.2

$\hat{\hat{G}}=\{T\in\Sigma(G)$；条件(C1)と $T^*T=I$ を満足する$\}$，

$\Lambda(G)=\{H\in\Sigma(G)$；条件(C2)と $H^*=-H$ を満足する$\}$ ∎

$\hat{\hat{G}}$ は G のいわゆる bidual で，$\Sigma(G)$ での積と位相に関して位相群になる。$x\in G$ に対して，$U_x=(U_x(\sigma))_{\sigma\in\hat{G}}$ $(\in\Sigma(G))$ とおけば，写像

$$i_G':\quad G\ni x\longmapsto U_x$$

は位相群 $\hat{\hat{G}}$ の上への同型写像である(淡中双対定理)。一方，$\Lambda(G)$ が成分ごとの実線形演算と bracket 積により実リー環になることは容易に確認できる。但し，一般には無限次元である。補題1.1と双対定理から，次の補題が従う。

補題1.2　写像

$$\Lambda(G)\ni H\longmapsto \exp tH\quad(t\in\mathbb{R})$$

は $R(\hat{\hat{G}})$ への bijection である。 ∎

$G\cong\hat{\hat{G}}$ であるから，補題1.2 はリー環 $\Lambda(G)$ から $R(G)$ への bijection を与えているとみなせる。これの逆写像を h_G で表

わすことにする。すなわち、

(1.2) $\tau_G(\alpha(t)) = \exp t h_G(\alpha) \quad (\alpha \in R(G),\ t \in \mathbb{R})$.

<u>注意</u> G がリー群であるとき、$\Lambda(G)$ や写像 $\Lambda(G) \ni H \longmapsto \exp H \in \hat{G}$ が、リー群に対する旧来のリー環や指数写像と同じものであることは、すぐに確められる。G が可換であるときは、$\hat{G}$ は群であって、$\Lambda(G)$ は準同型写像 $\hat{G} \longrightarrow \sqrt{-1}\mathbb{R}$ の全体がつくる可換実リー環である。

2) 正規部分群及び商群のリー環と1径数部分群について考察しておかねばならない。$N \in \mathfrak{N}(G)$ に対して

$$A(\hat{G}, N) = \{\sigma \in \hat{G};\ U_x(\sigma) = I(\sigma)\ (x \in N)\}$$

とおく。G/N の unitary dual $(G/N)^\wedge$ は、自然な仕方で $A(\hat{G}, N)$ と identify することにする。また、class $\sigma \in (G/N)^\wedge = A(\hat{G}, N)$ の代表としては、表現 $G/N \ni xN \longmapsto U_x(\sigma)$ $(x \in G)$ を選ぶことにする。$\Sigma(G/N) = \prod_{\sigma \in A(\hat{G}, N)} M(d_\sigma, \mathbb{C})$ であることに注意しよう。$(G/N)^\wedge$ (resp. $\Lambda(G/N)$) は、$A(\hat{G}, N)$ 上の行列値関数のうち、そこで (C1) と unitary 条件 (resp. (C2) と skew-hermite 条件) を満足するものの全体から成る。さて、次の記号を導入する。

r_N 制限写像 $\Sigma(G) \ni T \longmapsto T|_{A(\hat{G}, N)} \in \Sigma(G/N)$,

π_N 自然準同型 $G \longrightarrow G/N$,

$\overline{\pi_N}$ $R(G) \ni \alpha \longmapsto \pi_N \circ \alpha \in R(G/N)$.

補題1.3　$r_N|_{\hat{G}}$ は位相群 $(G/N)^{\wedge}$ の上への，$r_N|_{\Lambda(G)}$ はリー環 $\Lambda(G/N)$ の中への準同型であって，次の図式がいずれも可換である。

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\pi_N"] \arrow[dr, "i_G"'] & & G/N \arrow[dr, "i_{G/N}"] & \\ & \hat{G} \arrow[rr, "r_N"'] & & (G/N)^{\wedge} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} R(G) \arrow[rr, "\bar{\pi}_N"] \arrow[dr, "h_G"'] & & R(G/N) \arrow[dr, "h_{G/N}"] & \\ & \Lambda(G) \arrow[rr, "r_N"'] & & \Lambda(G/N) \end{tikzcd}$$
∎

この補題は容易に検証できる。実は，写像 $r_N|_{\Lambda(G)}$ の onto 性が成立するのである。

補題1.4 ([3], Theorem 4)　$\bar{\pi}_N$ は $R(G)$ を $R(G/N)$ の上へうつす。同じことだが，$r_N|_{\Lambda(G)}$ は $\Lambda(G/N)$ の上への準同型である。∎

写像 $r_N|_{\Lambda(G)}$ の核を $\Lambda_N(G)$ とかく。すなわち，

$$\Lambda_N(G)=\{H\in\Lambda(G);\ H(\sigma)=0\quad(\sigma\in A(G,N))\}.$$

そうすれば，補題1.4から，

Corollary　$\Lambda(G/N)\cong\Lambda(G)/\Lambda_N(G)$.

更に，次の事実を証明できる。

補題1.5　$R(N)=\{\alpha\in R(G);\ h_G(\alpha)\in\Lambda_N(G)\}$,

$\Lambda(N)\cong\Lambda_N(G)$　(リー環として).

3) この稿の目的のためには、$\Lambda(G)$と$R(G)$との間の1対1対応の存在のほかに、$\Lambda(G)$が適切な位相的性質をもつことが必要である。

<u>定義1.3</u> $\mathfrak{N}_0(G)=\{N\in\mathfrak{N}(G)\ ;\ G/N$ はリー群または有限群$\}$. ▯

$\mathfrak{N}_0(G)$ は下方有向族である。いま、$N\subseteq N'$ なる $N, N'\in\mathfrak{N}_0(G)$ に対して、$\pi_{N'N}$ で自然準同型 $G/N\longrightarrow G/N'$ を、$\Sigma_{N'N}$ で制限写像 $\Lambda(G/N)\ni H\longmapsto H|_{A(G,N')}\in\Lambda(G/N')$ を表わすことにする。すると、リー群(または有限群)の逆系$\{G/N, \pi_{N'N}\}$と、リー環の逆系$\{\Lambda(G/N), \Sigma_{N'N}\}$が得られる。$G\cong\varprojlim\{G/N, \pi_{N'N}\}$ は周知である(構造定理)。さて、$\Lambda(G/N)$ $(N\in\mathfrak{N}_0(G))$ がリー群(または有限群)G/Nの通常の意味でのリー環に同型であることは、すでに注意してある。ここで、次の補題が成立する。

<u>補題1.6</u> (i) 写像 $\Psi:\Lambda(G)\ni H\longmapsto(\Sigma_N(H))_{N\in\mathfrak{N}_0(G)}$ はリー環 $\varprojlim\{\Lambda(G/N)\ ;\ \Sigma_{N'N}\}$ の上への同型写像である。

(ii) $\Sigma_{N'N}$ は $\pi_{N'N}$ の微分である。 ▯

従って結局、$\Lambda(G)$は、Gに対する構造定理から自然にひきだされるリー環である。このことから、特に、次の事実が得られる:

$\Lambda(G)$の次元は、コンパクト空間Gの被覆次元に一致する。$\Lambda(G)$が有限次元であるためには、$\mathfrak{N}_0(G)$が

完全不連結なmemberを含むことが必要十分である。

以下で、Gの次元といえば、被覆次元つまり$\Lambda(G)$の次元を意味するものとする。

<u>補題1.7</u> $\Lambda(G)$は$\Sigma(G)$の相対位相に関してBaire spaceである。従って、実線形空間として、樽型局所凸空間である。

(証明) 補題1.6で、$\{\Lambda(G/N), \chi_{N'N}\}$を有限次元局所凸空間の逆系とみなして、その極限を$\Lambda_1$で表わすと、写像$\Psi$は$\Lambda(G)$から$\Lambda_1$の上への同相写像になる。他方、積空間$\prod_{N\in\mathfrak{N}_0(G)}\Lambda(G/N)$は$\mathbb{R}^I$の型であり、$\Lambda_1$はこれの閉線形部分空間であるから、やはり$\mathbb{R}^J$の型である。これはBaire spaceである。局所凸空間がBaire spaceであれば、一般に樽型である。証了。

この稿では詳しく述べないが、次の補題も、G上の連続的微分可能関数の空間の構造をしらべるとき必要である。

<u>補題1.8</u> ([3], Theorem 5)

$$\bigcup\{\alpha(\mathbb{R})\ ;\ \alpha\in R(G)\}\ \text{は}\ C(G)\ \text{で dense.}$$

§2 G上のC^n-classの定義 $(n=\infty,1,2,\cdots)$

1) fはG上の$\mathbb{C}$-値関数, $\alpha\in R(G)$, $x\in G$ とする。$f(x\alpha(t))$ (resp. $f(\alpha(-t)x)$) が$t\in\mathbb{R}$の関数として$t=0$で

微分可能のとき，

$$d_\alpha^{(r)} f(x) = \frac{d}{dt} f(x\alpha(t))\Big|_{t=0}$$

$$\left(\text{resp. } d_\alpha^{(\ell)} f(x) = \frac{d}{dt} f(\alpha(-t)x)\Big|_{t=0}\right)$$

とおいて，この値を f の α に関する，x での右(resp.左)微分係数とよぶ。これが，すべての $x \in G$ に対して存在するとき，G 上で定義される関数 $x \longrightarrow d_\alpha^{(r)} f(x)$ (resp. $d_\alpha^{(\ell)} f(x)$) を f の α に関する右(resp.左)導関数とよんで，$d_\alpha^{(r)} f$ (resp. $d_\alpha^{(\ell)} f$) で表わす。

<u>定義2.1</u>　$\mathcal{E}_0(G)$ で G 上の $\mathbb{C}$-値連続関数全体の空間を表わす。$n=1,2,\cdots$ に対して $\mathcal{E}_n^{(r)}(G)$ (resp. $\mathcal{E}_n^{(\ell)}(G)$) は，$\mathcal{E}_0(G)$ の元 f で，n 階までのすべての右(resp.左)導関数

$$d_{\alpha_1}^{(r)} f,\quad d_{\alpha_2}^{(r)} d_{\alpha_1}^{(r)} f,\quad \cdots,\quad d_{\alpha_n}^{(r)} \cdots d_{\alpha_2}^{(r)} d_{\alpha_1}^{(r)} f$$

$$\left(\text{resp. } d_{\alpha_1}^{(\ell)} f,\quad d_{\alpha_2}^{(\ell)} d_{\alpha_1}^{(\ell)} f,\quad \cdots,\quad d_{\alpha_n}^{(\ell)} \cdots d_{\alpha_2}^{(\ell)} d_{\alpha_1}^{(\ell)} f\right)$$

($\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in R(G)$ は任意) が存在して $\in \mathcal{E}_0(G)$ となるもの全体の集合を表わす。(当然，$\mathcal{E}_1^{(r)}(G) \supseteq \mathcal{E}_2^{(r)}(G) \supseteq \cdots$，$\mathcal{E}_1^{(\ell)}(G) \supseteq \mathcal{E}_2^{(\ell)}(G) \supseteq \cdots$.) 更に，$\mathcal{E}_\infty^{(r)}(G) = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{E}_n^{(r)}(G)$，$\mathcal{E}_n^{(\ell)}(G) = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{E}_n^{(\ell)}(G)$ とおく。

<u>注意</u>　上の定義で，f の各階導関数の存在に加えて，f 自身の連続性を仮定したが，これは余分な仮定ではない。実際，すべての階の左右導関数の存在と連続性を仮定しても，原関数の連続性は必ずしも従わない(G が連結であっても)。■

$\mathcal{E}_n^{(r)}(G)$ と $\mathcal{E}_n^{(\ell)}(G)$ $(n=\infty,1,2,\cdots)$ が $\mathbb{C}$ 上の algebra をなすことは明らかである。G がリー群ならば、$\mathcal{E}_n^{(r)}(G)$ と $\mathcal{E}_n^{(\ell)}(G)$ は一致して、通常の C^n-class を与える。実は、一般の G の場合にも、この両者は一致するのである。

Theorem 1　各 $n=\infty,1,2,\cdots$ に対して、

$$\mathcal{E}_n^{(r)}(G)=\mathcal{E}_n^{(\ell)}(G)。$$

この定理を証明した上で、我々は、$\mathcal{E}_n^{(r)}(G)\,(=\mathcal{E}_n^{(\ell)}(G))$ を G 上の C^n-class と考える。それは、リー群の場合の自然な拡張になる。Theorem 1 なしに、$\mathcal{E}_n^{(r)}(G)\cap\mathcal{E}_n^{(\ell)}(G)$ を G 上の C^n-class と考えることは意味がない。そのときには、例えば'微分作用素' $d_\alpha^{(r)}d_\beta^{(\ell)}d_\gamma^{(r)}$ を $\mathcal{E}_n^{(r)}(G)\cap\mathcal{E}_n^{(\ell)}(G)$ $(n\geq 3)$ 上に作用させ得るという保証がない。Theorem 1 が確立されたならば、明らかに、$d_{\alpha_1}^{(r)}\cdots d_{\alpha_p}^{(r)}d_{\beta_1}^{(\ell)}\cdots d_{\beta_q}^{(\ell)}$ は $\mathcal{E}_n^{(r)}(G)=\mathcal{E}_n^{(\ell)}(G)$ $(n\geq p+q)$ 上に作用し得る。しかも、その際、$d_\alpha^{(r)}$ と $d_\beta^{(\ell)}$ は commute する。

2)　Theorem 1 の証明については後で述べるが、当面次のように定義しておく。

定義 2.2　　$\mathcal{E}_n(G)=\mathcal{E}_n^{(r)}(G)\cap\mathcal{E}_n^{(\ell)}(G)$　$(n=\infty,1,2,\cdots)$

とおく。更に、$N\in\mathfrak{N}(G)$ に対して、$\mathcal{E}_n(G)$ の subalgebra $\mathcal{E}_n(G,N)$ を次のように定義する：

$$\mathcal{E}_n(G,N)=\{f\in\mathcal{E}_n(G)\,;\ f(xy)=f(x)\quad(x\in G,\ y\in N)\}.$$

補題2.1　写像：$\mathcal{E}_n(G/N)\ni g \longmapsto g\circ\pi_N$ は algebra $\mathcal{E}_n(G,N)$ の上への isomorphism である（$N\in\mathfrak{N}(G)$）。

（証明．補題1.4 による。）▮

特に，$N\in\mathfrak{N}_0(G)$ のとき、$\mathcal{E}_\infty(G,N)$ はリー群（または有限群）G/N 上の C^∞-class $\mathcal{E}_\infty(G/N)$ と identify できるわけである。

定義2.3　$\mathcal{D}(G)=\bigcup\{\mathcal{E}_\infty(G,N)\,;\,N\in\mathfrak{N}_0(G)\}$．▮

$\mathcal{D}(G)$ は $\mathcal{E}_\infty(G)$ の subalgebra である。G 上の trigonometric polynomial はすべて $\mathcal{D}(G)$ に含まれる。$\mathcal{D}(G)$ の元は、Bruhat の意味での、G 上の regular function に外ならない（[1], Definition 1）。

3）　Theorem 1 の証明の論点のみ説明する（詳細は [2], §2）。本質的な部分は $n=1$ の場合，つまり $\mathcal{E}_1^{(r)}(G)=\mathcal{E}_1^{(l)}(G)$ をしめすことにある。$\mathcal{E}_1^{(r)}(G)\subseteq\mathcal{E}_1^{(l)}(G)$ をしめせば，逆の包含も同様にしてしめされる。

さて、$x\in G$ と $\alpha\in R(G)$ に対して，$x^{-1}\alpha x$ で $R(G)$ の元：$\mathbb{R}\ni t \longmapsto x^{-1}\alpha(t)x$ を表わすことにすれば，$f(\alpha(-t)x)=f(x\cdot(x^{-1}\alpha x)(t))$（$f$ は任意）。これから次のことは直ちにわかる：

$d_\beta^{(r)}f$ がすべての $\beta\in R(G)$ に対して存在するならば，$d_\alpha^{(l)}f$ もすべての $\alpha\in R(G)$ に対して存在して，

$$d_\alpha^{(l)}f(x) = -d_{x^{-1}\alpha x}^{(r)}f(x) \qquad (x\in G).$$

故に、$\mathcal{E}_1^{(r)}(G) \subseteq \mathcal{E}_1^{(\ell)}(G)$ には、次の命題の成立が必要十分である。

命題A　$f \in \mathcal{E}_1^{(r)}(G)$, $\alpha \in R(G)$ のとき、G 上の関数

$$x \longmapsto d^{(\ell)}_{x^{-1}\alpha x} f(x)$$

は連続である。

この命題の証明に、$R(G)$ と $\Lambda(G)$ との間に1対1の対応が存在すること、$\Lambda(G)$ が局所凸な位相線形構造をもち、同時に Baire space であること（補題1.7）を本質的にもちいる。まず次の定義を設ける。

定義2.4　bijection $h_G : R(G) \longmapsto \Lambda(G)$ を介して、$\Lambda(G)$ の局所凸線形空間の構造を $R(G)$ に移植する。（従って、$R(G)$ は Baire space かつ樽型局所凸空間である。）

この定義のもとで、写像 $G \times R(G) \ni (x, \alpha) \longmapsto x^{-1}\alpha x \in R(G)$ は連続である。それは、$h_G(x^{-1}\alpha x) = U_{x^{-1}} h_G(\alpha) U_x$ と、$\Lambda(G)$ の位相の定義から従う。よって、命題Aを得るには、次の補題を証明すれば十分である。

補題2.2　$f \in \mathcal{E}_1^{(r)}(G)$ のとき、写像

$$R(G) \times G \ni (\alpha, x) \longmapsto d_\alpha^{(r)} f(x) \in \mathbb{C}$$

は連続である。

これを次の順序で証明する。$\mathcal{E}_1^{(r)}(G)$ は複素共役に関して閉じているので、f は real-valued であると仮定してよい。

(I)　$\theta \in \mathcal{D}(G)$, $x \in G$ とせよ。$\theta = g \circ \pi_N$ なる $N \in \mathcal{N}_0(G)$ と g

$\in \mathcal{E}_\infty(G/N)$ をとると（補題2.1），$\alpha \in R(G)$ に対して

$$d_\alpha^{(r)}\theta(x) = d^{(r)}_{\overline{\pi}_N(\alpha)}\, g(\pi_N(x))$$

が成立する。写像 $R(G) \ni \alpha \longmapsto \overline{\pi}_N(\alpha) \in R(G/N)$ は $\mathbb{R}$-linearであり（補題1.3），G/Nはリー群（または有限群）であることから、写像 $R(G) \ni \alpha \longmapsto d_\alpha^{(r)}\theta(x) \in \mathbb{C}$ が $\mathbb{R}$-linearであることがわかる。fをregular関数で「近似」することによって、このことから、写像

$$\varphi_x : R(G) \ni \alpha \longmapsto d_\alpha^{(r)} f(x) \in \mathbb{R}$$

の線形性がしめされる。

(II) $R(G)$の位相の定義と，それがBaire spaceであることをもちいて、linear form φ_x の連続性を証明する。

(III) (I),(II)により，$\{\varphi_x ; x \in G\}$ は $R(G)'$（$R(G)$のdual space）のsubsetである。このsetが単純有界であることは明らか，しかも$R(G)$は樽型である。よって、このsetは等連続。補題2.2は、このことから直ちに検証できる。∎

これでTheorem 1が確認されたので、$\mathcal{E}_n(G) = \mathcal{E}_n^{(r)}(G) = \mathcal{E}_n^{(\ell)}(G)$ である。

§3 空間 $\mathcal{E}_n(G)$ の構造 ($n = \infty, 1, 2, \cdots$)

空間 $\mathcal{E}_n(G)$ の構造について結論だけ述べる（詳細は [2], §3）。

1) $\mathcal{E}_n(G)$に対する構造定理.

定義3.1

$\mathcal{N}_f(G)=\{N\in\mathcal{N}(G)\ ;\ G/N$が有限次元$\}$,

$\mathcal{N}_1(G)=\{N\in\mathcal{N}(G)\ ;\ G/N$が有限次元かつseparable$\}$. ▨

勿論, $\mathcal{N}_0(G)\subseteq\mathcal{N}_1(G)\subseteq\mathcal{N}_f(G)$である。$G$自身が有限次元のときは、$\mathcal{N}_f(G)=\mathcal{N}(G)$。

次の補題が基本的である。

補題3.1　$\mathcal{E}_1(G)$のsubset $\mathcal{B}$が, 各$\alpha\in R(G)$について, 条件

$$\sup_{x\in G,\, f\in\mathcal{B}}|d_\alpha^{(r)}f(x)|<\infty$$

を満足するとせよ。このとき、$N\in\mathcal{N}_f(G)$が存在して、$\mathcal{B}\subseteq\mathcal{E}_1(G,N)$となる。 ▨

この補題を$\mathcal{E}_1(G)$の任意singleton $\{f\}$に適用すれば, $f\in\mathcal{E}_1(G,N)$ for some $N\in\mathcal{N}_f(G)$が従う。これを少し精密にして、次の定理が得られる。

Theorem 2　任意の$f\in\mathcal{E}_1(G)$において、$f\in\mathcal{E}_1(G,N)$なる$N\in\mathcal{N}_1(G)$が存在する。 ▨

これより直ちに,

Corollary　$\mathcal{E}_n(G)=\bigcup\{\mathcal{E}_n(G,N)\ ;\ N\in\mathcal{N}_1(G)\}$

$(n=\infty,1,2,\cdots)$.

このCorollaryは空間$\mathcal{E}_n(G)$に対する構造定理とよぶのがふさわしい。

2) $\mathcal{D}(G)$ と $\mathcal{E}_\infty(G)$ の比較

前項の構造定理と、有限次元コンパクト群の構造定理から、次の定理を導ける。

<u>Theorem 3</u> 次の4条件は同値である。

(a) $\mathcal{E}_\infty(G) = \mathcal{D}(G)$. (b) $\mathcal{H}_1(G) = \mathcal{H}_0(G)$.

(c) $\mathcal{H}(G) = \mathcal{H}_0(G)$. (d) G は局所連結.

<u>注意</u> 有限次元の G については、

局所連結 $\Longleftrightarrow$ リー群または有限群.

結局、局所連結でない場合に、regularでない C^∞ 級関数が現れるわけである。そのような関数の具体例はFourier級数によって構成できる([2], §2)。しかし、$\mathcal{E}_\infty(G)\setminus\mathcal{D}(G)$ 全体の把握は、G が連結の場合であっても難しい問題のように思われる。

3) 位相的性質

構造定理によって、$\mathcal{E}_n(G)$ には自然な順極限位相がはいる。これについて述べる。

$\alpha_1,\cdots\alpha_p,\beta_1,\cdots,\beta_q \in R(G)$ $(p,q\geq 0)$ に対して、$\mathcal{E}_{p+q}(G)$ 上のseminorm $P^{\beta_1\cdots\beta_q}_{\alpha_1\cdots\alpha_p}$ を次のように定義する:

$$P^{\beta_1\cdots\beta_q}_{\alpha_1\cdots\alpha_p}(f) = \sup_{x\in G}\left|d^{(r)}_{\alpha_1}\cdots d^{(r)}_{\alpha_p} d^{(l)}_{\beta_1}\cdots d^{(l)}_{\beta_q} f(x)\right|$$

$(f\in\mathcal{E}_{p+q}(G))$.

$n=\infty,1,2,\cdots$ に対して，

$$\mathfrak{F}_n^{(r)}=\{P_{\alpha_1\cdots\alpha_p}\ ;\ 0\le p<n+1,\ \alpha_1,\cdots,\alpha_p\in R(G)\},$$
$$\mathfrak{F}_n^{(l)}=\{P^{\beta_1\cdots\beta_q}\ ;\ 0\le q<n+1,\ \beta_1,\cdots,\beta_q\in R(G)\},$$
$$\mathfrak{F}_n=\{P_{\alpha_1\cdots\alpha_p}^{\beta_1\cdots\beta_q}\ ;\ 0\le p+q<n+1,\ \alpha_1,\cdots,\alpha_p,\beta_1,\cdots,\beta_q\in R(G)\}$$

とおく。seminorm族 $\mathfrak{F}_n^{(r)}$, $\mathfrak{F}_n^{(l)}$ 及び $\mathfrak{F}_n$ によって定義される $\mathcal{E}_n(G)$ の位相を，それぞれ，n に拘りなく，τ_r, τ_l 及び τ_+ で表わす。τ_r, τ_l より τ_+ が強い。写像 $f\longmapsto\check{f}$ (inversion) によって，τ_r を備えた $\mathcal{E}_n(G)$ は τ_l を備えた $\mathcal{E}_n(G)$ に位相線形同型にうつる。

<u>補題3.2</u> 位相 τ_r, τ_l 及び τ_+ は，部分空間 $\mathcal{E}_n(G,N)$ ($N\in\mathfrak{N}(G)$) では一致して，その空間を Fréchet space にする。∎

この補題をふまえた上で，上記3位相よりもっと自然な順極限位相を導入する。$\mathfrak{N}(G)$ が下方有向族であることを注意しておく。

<u>定義3.1</u> $N\in\mathfrak{N}(G)$ に対して，$\mathcal{E}_n^{(+)}(G,N)$ で，τ_+ を備えた $\mathcal{E}_n(G,N)$ を表わす。$\{\mathcal{E}_n^{(+)}(G,N)\ ;\ N\in\mathfrak{N}(G)\}$ は Fréchet space の上方有向族で，その合併は $\mathcal{E}_n(G)$ である (Theorem 2)。故に，$\mathcal{E}_n(G)$ を，この族の順極限であるように位相づけることができる。この位相を，n に拘りなく，τ_* で表わす。τ_* を備えた $\mathcal{E}_n(G)$ を $\mathcal{E}_n^{(*)}(G)$ とかく。∎

$\mathcal{E}_n^{(*)}(G)$ は，Fréchet spaces の順極限として，樽型かつ有界

型である。

<u>注意</u>　$\mathcal{E}_n(G)$ は，族 $\{\mathcal{E}_n^{(+)}(G,N);N\in\mathfrak{N}_1(G)\}$ の順極限であるように位相づけることもできる。しかし，この位相は τ_* に一致する。

補題3.1から，直ちに，

<u>Theorem 4</u>　$\mathcal{E}_n^{(*)}(G)$ の部分集合について、次の5条件は equivalent である：

τ_*-有界 $\Leftrightarrow$ τ_+-有界 $\Leftrightarrow$ τ_ℓ-有界 $\Leftrightarrow$ τ_r-有界 $\Leftrightarrow$

或る $\mathcal{E}_n^{(+)}(G,N)$ $(N\in\mathfrak{N}(G))$ の有界部分集合である。 ∎

こゝで，最後の条件における $\mathfrak{N}(G)$ を $\mathfrak{N}_1(G)$ でおきかえることはできない。実際，$\mathfrak{N}(G)\neq\mathfrak{N}_1(G)$ である場合には，$\mathcal{E}_\infty^{(*)}(G)$ の有界集合で，$\mathcal{D}(G)$ に含まれるが，どの $\mathcal{E}_\infty(G,N)$ $(N\in\mathfrak{N}_1(G))$ にも含まれないものが存在する。このため，τ_* の定義では，$\mathfrak{N}_1(G)$ ではなく，$\mathfrak{N}(G)$ をもちいた。

族 $\{\mathcal{E}_n^{(+)}(G,N);N\in\mathfrak{N}(G)\}$ に対する可算性の仮定なしに，「τ_*-有界 $\Longrightarrow$ 或る $\mathcal{E}_n^{(+)}(G,N)$ の部分集合」が成立することが、Theorem 4 の論点である。同じことが完備性についてもいえる。

<u>Theorem 5</u>　$\mathcal{E}_n^{(*)}(G)$ は完備である $(n=\infty,1,2,\cdots)$。 ∎

G が局所連結でないとき，空間 $\mathcal{E}_n^{(*)}(G)$ は Montel ではない，従って，核型でもない（∵ 完備かつ核型であるから）。

最後に，$\mathfrak{T}(G)$ を trigonometric polynomial 全体の集合として，

$$\mathcal{T}(G,N) = \mathcal{T}(G) \cap \mathcal{E}_\infty(G,N)$$

とおく（$N \in \mathcal{N}(G)$）。

<u>Theorem 6</u>　各 $N \in \mathcal{N}(G)$ と $n = \infty, 1, 2, \cdots$ に対して、$\mathcal{T}(G,N)$ は $\mathcal{E}_n^{(+)}(G,N)$ で dense。 ∎

勿論，この定理から，「$\mathcal{T}(G)$ は $\mathcal{E}_n^{(*)}(G)$ で dense」は従う。これは、torus に対する Weierstrass 近似定理の一般化である。

文献

[1] F. Bruhat, Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étude des représentations des groupes p-adiques, Bull. Soc. Math. France, 89 (1961).

[2] T. Edamatsu, Spaces of differentiable functions on compact groups, to appear.

[3] K. Mckennon, The structure space of the trigonometric polynomials on a compact group, J. Reine Angew. Math., 307/308 (1979).

[4] J. Riss, Éléments de calcul différentiel et theorie des distributions sur les groupes abéliens localement compacts, Acta Math., 89 (1953).