数理解析研究所講究録
第481巻 1983年 126-154

(ax+b)群の Chevalley-杉浦型複素化

京大 理　辰馬 伸彦
TATSUUMA NOBUHIKO

C. Chevalley は [1] で，淡中双対定理を用いて，コンパクト Lie 群 G より複素化群を構成している。淡中型双対定理は，群 G の双対上にテンソル積と可換な作用素場（複表現）を作ると，それが G のある元 g により与えられる作用素場 $\{T_g(D)\}$ と一致することを主張するものだが，双対定理が成立するためには，複表現の定義の中に実質上作用素場の値域がユニタリである事を与える条件が必要であった。複表現の定義から，このユニタリ性の条件を外した"拡大された"複表現の全体の作る群が G の複素化群と同型になるというのが Chevalley の理論であった。

本文ではこの理論を，定義体の拡大に対応して拡大群を構成するものと解釈して，他の型の群に適用することを考える。複素数体以外の体の上での表現の一般論は蓄積が少く，こゝで得られた結果は，具体的には Z_p 上の一次変換群（いわゆ

る（$ax+b$）群）についてのみで，不十分なものであるが，あらわれて来た現象は，今後 Lie 群の成分のない局所コンパクト群として全不連結群の表現論や構造論に示唆を与えるものと考えられる．

§1. 問題の設定

既知の如く淡中型双対定理には，G の既約ユニタリ表現の同値類の全体 $\hat{G}$ 上に複表現を構成する強双対性と，既約とは限らぬユニタリ表現の全体 Ω の上で構成する弱双対性の立場があり，前者は後者より導かれる．以下記述の簡便さのために，弱双対性の立場に立って説明する．

$\Omega \equiv \{ \mathcal{D} \equiv (\mathcal{H}(\mathcal{D}), \Pi_g(\mathcal{D})) : G$ のユニタリ表現$\}$

とする．こゝで $\mathcal{H}(\mathcal{D})$ は $\mathcal{D}$ の表現空間，$\Pi_g(\mathcal{D})$ を表現作用素とする．$\forall g \in G$ をとめて，$\mathcal{D}$ で $\Pi_g(\mathcal{D})$ を値にとる Ω 上の作用素場 $\Pi_g \equiv (\Pi_g(\mathcal{D}))_{\mathcal{D} \in \Omega}$ は定義から

(1) $\mathcal{D}_1 \simeq \mathcal{D}_2$，すなわち $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \in \Omega$ が intertwining operator A により同値である時，$A\Pi_g(\mathcal{D}_1)A^{-1} = \Pi_g(\mathcal{D}_2)$，

(2) $\Pi_g(\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2) = \Pi_g(\mathcal{D}_1) \oplus \Pi_g(\mathcal{D}_2)$ （直和と可換），

(3) $\Pi_g(\mathcal{D}_1 \otimes \mathcal{D}_2) = \Pi_g(\mathcal{D}_1) \otimes \Pi_g(\mathcal{D}_2)$ （テンソル積と可換），

(4) $\Pi_g(\mathcal{D}) \in \mathcal{U}(\mathcal{H}(\mathcal{D})) \equiv \{\mathcal{H}(\mathcal{D})$ 上のユニタリ作用素$\}$，

が $\forall \mathcal{D}, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \in \Omega$ で成立する．

逆に Ω 上 ϑ で $\mathcal{H}(\vartheta)$ 上の作用素を値にとる作用素場

$\mathfrak{T} = (T(\vartheta))_{\vartheta\in\Omega}$ が $\forall \vartheta, \vartheta_1, \vartheta_2 \in \Omega$ で

1) $\vartheta_1 \overset{A}{\sim} \vartheta_2$ なら $A\,T(\vartheta_1)A^{-1} = T(\vartheta_2)$,

2) $T(\vartheta_1 \oplus \vartheta_2) = T(\vartheta_1) \oplus T(\vartheta_2)$,

3) $T(\vartheta_1 \otimes \vartheta_2) = T(\vartheta_1) \otimes T(\vartheta_2)$,

4) $T(\vartheta) \in \mathcal{U}(\mathcal{H}(\vartheta))$,

をみたすとき, $\mathfrak{T}$ を Ω 上の複表現 (birepresentation) と呼ぶこととする. この時淡中型双対定理は次を主張する.

<u>命題 1-1.</u> 局所コンパクト群 G に対し, Ω 上の複表現 $\mathfrak{T}$ が与えられると, これに対応して G の元 g が一意的に定まって $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_g$ となる. ┘

こゝで条件 4) はたとえば次の 4'), 4'') の何れかに置換めることができる.

4') ϑ^*, T^* を夫々 ϑ, T の Mackey [2] の意味での共軛とするとき, $T(\vartheta^*) = (T(\vartheta))^* \ (\neq 0)$. ┘

4'') $T(\vartheta)$ は $\mathcal{H}(\vartheta)$ 上の稠密領域をもつ閉作用素で, 特に G の正則表現 $\mathcal{R}$ に対し $T(\mathcal{R})$ は 0 でない有界作用素. ┘

次に 4) に対応する条件を外した場合, すなわち 1)～3) のみをみたす作用素場を"広義複表現"と呼ぶこととし, その内特に $\forall\vartheta$ で $T(\vartheta) \neq 0$ となるものの全体を $\widehat{G}$ で示す. 双対定理により G は $\widehat{G}$ に埋め込まれるが, C. Cheva lleyの結果は次を与える.

命題 1-2. Gがコンパクト Lie 群なら, $\hat{G}$ は G の複素化群と同型の代数群を与える. ┘

この状況を他の群でしらべる. それには先ず淡中型双対定理の証明に立ち帰って考えよう.

双対定理の証明では G の正則表現が重要な役割を演じる. Gの右正則表現を $\mathcal{R} \equiv \{L^2(G), R_g\}$ とする. $\mathcal{R}\otimes\mathcal{R}$ は $\mathcal{R}$ の $[\dim\mathcal{R}]$次の重複 $\sum^\oplus \mathcal{R}$ と同値であって, $L^2(G)$ 中の正規直交基 $\{\varphi_\alpha\}$ を1つ定め, $\sum_\alpha^\oplus L^2(G) \ni \{f_\alpha\}$ に $\sum_\alpha \varphi_\alpha\otimes f_\alpha \in L^2(G)\otimes L^2(G)$ を対応させて, $\sum^\oplus_\alpha L^2(G) \cong L^2(G)\otimes L^2(G)$ と見たとき, この同値対応は Kac-竹崎作用素

$$W : \quad L^2(G)\otimes L^2(G) \ni f(g_1,g_2) \longmapsto f(g_1g_2, g_2) \in L^2(G)\otimes L^2(G),$$

で与えられる. すなわち表現作用素間の関係として

$$W(R_g\otimes R_g)W^{-1} = I\otimes R_g .$$

Wを直和とテンソル積の組合せの intertwining operator と考えると, 複表現 $\Pi = (\Pi(\mathcal{R}))$ について, その$\mathcal{R}$での値 $\Pi_0 \equiv \Pi(\mathcal{R})$ は 1) ~ 3) の条件から次式をみたす.

$$(1\text{-}1) \qquad W(\Pi_0\otimes\Pi_0)W^{-1} = I\otimes \Pi_0 .$$

ここで, (a) 複表現 Π は $\Pi_0 \equiv \Pi(\mathcal{R})$ (≠0なら) によって一意的にきまる, (b) (1-1) をみたす0でない $L^2(G)$ 上の有界作用素に対して, Gの元gが一意的にきまり $\Pi_0 = R_g$,

が云えるので，　$\Pi = \Pi_g$ となり定理が結論された．

この場合，先の 4) にあたる條件は Π_0 の有界性である．
この条件を外した場合の結果としては次がある．（[10]）

命題 1-3.　局所コンパクト群 G の $L^2(G)$ 上，稠密領域を持つ閉作用素 $\Pi(\neq 0)$ が，

(1-2)　　$$W(\Pi \otimes \Pi)W^{-1} = I \otimes \Pi$$　※

をみたすならば，G の元 g と，G 中の1径数部分群 $\{g(t)\}$ が夫々一意的に定まって，

(1-3)　　$$\Pi = R_g(\exp X)$$

が Π の極分解を与える．但しこゝで，X は1径数作用素群 $R_{g(t)}$ の Stone の意味の生成作用素 $\left(X = \frac{1}{i}\left(\frac{d}{dt}R_{g(t)}\right)_{t=0}\right)$ である．

この結果について少し考察を加えよう．

i)　先ず広義積表現の定義に，"$\forall A \in \Omega$ で，$\Pi(A)$ が $H(A)$ 上稠密領域を持つ閉作用素"，を加えるなら，$\Pi(R) \neq 0$ となる広義積表現 $\Pi \in \tilde{G}$ は，弱双対性の証明と同様にして，R での値 $\Pi = \Pi(R)$ により一意的にきまることが判る．従ってこの意味で，　$\tilde{G} \cong \{0$ でない (1-2) の解 $\Pi\}$ と見てよいであろう．

たゞしこゝで，$\Pi(R) \neq 0$ の條件は必要であって，$\Pi(R) = 0$

※閉作用素のテンソル積についてはたとえば［6］参照．

だが自明でない複表現は，表現のテンソル環のイデアル構造を利用して容易に作ることができる。([8],[9])

ii) 実際に $SL(2,C)$ 等に命題1-3を適用して見ると判るが，$\exp X$ の領域が各々の X によってずれる為，(1-3)の Π の全体は一般には群とならない。すなわち命題1-3が G の複素化を与えているとは云えない。しかしコンパクト群や可換局所コンパクト群では，上の Π の全体は群を作る。

実際 C. Chevalley の結果命題1-2はその例であり，連結可換Lie群 $T^n\times R^m$ について行って見ると，$T^n\times R^{n+2m}$ が得られる。しかしたとえば T^∞ について行うと $T^\infty\times R^\infty$ となり，もはや局所コンパクト群とはならない。

iii) 命題1-3で iX は $g(t)$ の生成元よりなるLie環の表現となっているので，$\exp X$ は云わばLie環の複素化の表現を持ち上げた形になっている。そして $\hat{G}\equiv\{\Pi\}$ を G の複素化の候補としてつかまえるとき，G に新に加わった方向 $\{\exp X\}$ は，1 径数群 $g(t)$ に対してのみ導入される。すなわち G の連結方向に対してだけしか考えられない。」

これらの考察からすれば，C. Chevalley の結果はきれいな結論の得られるぎりぎりの線で構成されていることが判ると共に，Lie群以外で同様の事を考えるには，通常のユニタリ表現以外の表現を扱う必要のあることが推論される。

§2. K-表現

C. Chevalley の原理を Lie群以外の群に適用することを考えよう。この場合，前§の最後の考察をふまえて，空間の定義体をかえた表現を考え，そこでの拡大を使って群を拡大する問題として扱うこととする。その準備として以下定義を与えよう。

$\mathbb{Q}_p$ を p進体，$|\cdot|$ をその上の付値（乗法的）としそれにより $\mathbb{Q}_p$ に位相を与える。すなわち $\forall a \in \mathbb{Q}_p$ に対し，

i) $\mathbb{R}^+ \ni |a| \geq 0$ ，且つ $|a|=0 \Leftrightarrow a=0$,

ii) $|a+b| \leq \max(|a|, |b|)$,

iii) $|ab| = |a||b|$.

$\mathbb{Q}_p$ の代数的閉包 $\overline{\mathbb{Q}_p}$ 上にこの付値は一意的拡張をもち，それによる $\overline{\mathbb{Q}_p}$ の完備化 $\mathbb{C}_p$ は代数的閉体である。以下 $\mathbb{Q}_p \subset K \subset \mathbb{C}_p$ となる位相で完備な体 K を1つ固定する。K が局所コンパクトなら，K は $\mathbb{Q}_p$ 上の有限拡大である。

$\mathbb{Z}_p \equiv \{a \in \mathbb{Q}_p \mid |a| \leq 1\}$ を $\mathbb{Q}_p$ の整数環とし，対応して，$\mathbb{Z}_K \equiv \{a \in K \mid |a| \leq 1\}$ と示す。

$\mathbb{Z}_p$ は開コンパクトな，$0 \in \mathbb{Q}_p$ の近傍であり，$\{p^n \mathbb{Z}_p\}_n$ は 0の基本近傍系をなす。

定義 2-1. K上の線型空間 V の上に準ノルムの族 $\{p_\alpha\}$ が与えられ，$\bigcap p_\alpha^{-1}(0) = \{0\}$ となるとき，これに

よる位相を入れた $\mathbb{V}$ を $\mathcal{K}$-局所凸空間と呼ぶ。すなわち、

i) $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{V}$, $\forall a \in \mathcal{K}$ で、 $av_1,\ v_1+v_2 \in \mathbb{V}$,

ii) $\mathbb{R}^+ \ni p_\alpha(v_1) \geq 0$, $p_\alpha(av_1) = |a|\, p_\alpha(v)$,

iii) $p_\alpha(v_1+v_2) \leq \max(p_\alpha(v_1), p_\alpha(v_2))$.

さらにこゝで、 $p_\alpha(k) = |k|$ $(\forall\alpha)$ を仮定しておく。

只1つの準ノルム(ノルム) $\|v\| \equiv p(v)$ をもつ$\mathcal{K}$局所凸空間を$\mathcal{K}$-ノルム空間，完備な$\mathcal{K}$-ノルム空間を$\mathcal{K}$-Banach空間と呼ぶ。

$\mathcal{K}$-局所凸空間$\mathbb{V}$でも，通常の局所凸空間とほゞ同様に，線型作用素を定義出来る。$\mathbb{V}$上の連続な$\mathcal{K}$-線型作用素の全体を $\mathcal{B}(\mathbb{V})$ で示し，その上の強位相を， $\forall v \in \mathbb{V}$ で，

$\mathcal{B}(\mathbb{V}) \ni T \longrightarrow Tv \in \mathbb{V}$ が連続となる最弱の位相とする。

$\mathbb{V}$ が $\mathcal{K}$-Banach 空間のとき，

$$\mathcal{B}(\mathbb{V}) = \{T \,/\, \|T\| \equiv \sup_{v\neq 0}(\|Tv\|/\|v\|) < +\infty\}.$$

特に， $\mathcal{I}(\mathbb{V}) \equiv \{T \in \mathcal{B}(\mathbb{V}) \mid \|T\| = \|T^{-1}\| = 1\}$

とおく。

<u>定義 2-2.</u> 位相群 G の $\mathcal{K}$-表現 ($\mathcal{K}$-Banach表現)

$\mathcal{D} \equiv \{\mathcal{H}, T_g\}$ とは，次をいう。

i) $\mathcal{H}$ は $\mathcal{K}$-局所凸空間 ($\mathcal{K}$-Banach空間)，

ii) $G \ni g \longmapsto T_g \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ は強連続な準同型，

iii) $T_e = I$ (恒等作用素).

さらに R-Banach 表現については次も定義に加える。

iv) $\|T_g\| \leqq 1 \qquad (\forall g \in G).$ ⌟

(ii) ~ iv) から $T_g \in \mathcal{J}(\mathcal{H})$ となる。)

定義 2-3. R-表現 $\mathcal{D}$ が,

i) $\mathcal{H}$ が自明でない T_G-不変部分空間をもたぬ時,(空間的)既約であるという。(以下"空間的"を略記する).

ii) $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が $AT_g = T_g A \ (\forall g \in G)$ なら,
$^\exists a \in R$, $A = aI$ (スカラー作用素)となるとき,
作用素既約という。 ⌟

例 2-1. コンパクト空間 X 上の R-値連続関数の全体に,ノルム $\|f\| \equiv \sup_{x \in X} |f(x)|$ を入れたものは,
R-Banach 空間 $C_R(X)$ となる。 ⌟

例 2-2. コンパクト空間 X 上に位相群 G が連続変換群として作用しているとする。すなわち,$\forall g \in G$ で,
$X \ni x \longmapsto (x)g \in X$ は X 上の同相変換で,
$G \times X \ni (g, x) \longmapsto (x)g \in X$ は連続,$G \ni g$ について $g \longmapsto (\ )g$ が準同型であるとき,$f \in C_R(X)$ で

$$(R_g f)(x) \equiv f((x) \cdot g)$$

とおくと,$\mathcal{D} \equiv \{C_R(X), R_g\}$ は G の R-Banach 表現を与える。

特に,$X = G$ (コンパクト群),$(g_1)g \equiv g_1 g$ のとき,
$\mathcal{R} \equiv \{C_R(G), R_g\}$ を G の R-正則表現という。 ⌟

§3 R-Stone-Weierstraß の定理

全不連続コンパクト群 G に対して，次の結果を引用しておく．（証明はたとえば［3］参照）

<u>命題 3-1.</u> 全不連続コンパクト群 G には，開（従ってコンパクト）正規部分群より成る単位元 e の基本近傍系 $\{H_\alpha\}$ がある．

<u>系 1.</u> $K_\alpha \equiv G/H_\alpha$ は有限群で，$G = \varprojlim_\alpha K_\alpha$（射影極限）と考えられる．

<u>系 2.</u> G の元 g は，それの属する H_α-剰余類達を全て定めると決まる．

次の R-Stone-Weierstraß の定理は，［4］等に証明があるが，後の引用の必要上別証を与える．

<u>定理 3-2.</u>（R-Stone-Weierstraß の定理）．X をコンパクト空間，$C_R(X)$ をその上の R-値連続関数全体の作る空間に，例 2-1. の位相を入れたものとする．

$C_R(X)$ の部分集合 F が，次の 1)～3) をみたすとする．

1) F はノルム閉の部分関数環，

2) $C_R(X)$ により分離される 2 点 $x_1, x_2 \in X$ に対して
$\exists f \in F$ で $f(x_1) \neq f(x_2)$

3) $\mathbb{1}$（恒等的に 1 をとる関数）$\in F$．

このとき $F = C_R(X)$ となる．

証明. Step 1) $\forall h \in C_R(X)$ は次の様な一様展開をもつ.

(3-1) $$h(x) = \sum_{j=1}^{\infty} h_j(x)\,\pi_j,$$

i) $\pi_j \in R$ で $|\pi_1| > |\pi_2| > \cdots \downarrow 0$,

ii) $h_j \in C_R(X)$, $|h_j(x)| = 1$ 又は 0 の階段関数.

実際, $|h(x)|$ は X 上の R^+ 値~~連続関数~~で, その値域が, 集積点が 0 のみの階段関数である. その付値を上から2つ $|\pi_1| > |\pi_2'|$ $(\pi_1, \pi_2' \in R)$ とする.

$E_1 \equiv \{x \in X \mid |h(x)| = |\pi_1| = \sup_{y \in X} |h(y)| = \|h\|\}$ は開コンパクト集合で, $\forall x \in E_1$ に対してその近傍,

$V(x) \equiv \{y \in X \mid |h(y) - h(x)| \leqq |\pi_1|/2\}$ は又開コンパクトだから, E_1 を $\{V(x)\}_x$ で有限被覆して, $E_1 = \sum^{N} V_j$ $(V_j \equiv V(x_j))$ と, 互に交わらぬ集合の和とかける.

(3-2) $$h_1(x) \equiv \sum_j (h(x_j)/\pi_1)\,\chi_{V_j}(x),$$

(χ_{V_j} は集合 V_j の特性関数) は ii) の条件をみたし,

$\|h - h_1\| (\equiv |\pi_2|) \leqq \mathrm{Max}(|\pi_2'|, |\pi_1|/2)$ となるから, $h - h_1$ を新たに h と思って, 以下同じ操作をくり返すとよい.

Step 2). 展開 (3-1) 及び (3-2) をもつ $h \in C_R(X)$ で, $(h(x)/\pi_1)^{p^n}$ は $n \to \infty$ で, 階段関数

$\sum^{N} c_j \chi_{V_j}$ $(|c_j| = 1)$ に一様に収束する.

何故なら, 先ず $|a| \leqq 1$, $|b| \leqq {}^{\exists}\alpha < 1$ のときに,

$\beta \fallingdotseq \mathrm{Max}(\alpha, |p|)\ (<1)$, $\quad b_0 \fallingdotseq b$,

$b_{j+1} \fallingdotseq (a^{p^j} + b_j)^p - a^{p^{j+1}} \quad (j \geqq 0)$ とおけば，

$$a^{p^j} + b_j = (a+b)^{p^j}$$ であって，

$|b_j| \leqq \beta^{j+1}$ が，帰納法で示される．事実，$j=0$ なら明らかだから，$j=n-1$ で成立したとすると，

$$|b_n| = |p \cdot a^{p^{n-1}} \cdot b_{n-1} + (p(p-1)/2)\, a^{p^{n-2}} \cdot b_{n-1}^2 + \cdots + b_{n-1}^p|$$

$$\leqq \mathrm{Max}(|p|\,|b_{n-1}|, |b_{n-1}|^p) \leqq \beta^{n+1}.$$

このことは，$\lim_{j\to\infty} (a+b)^{p^j} = \lim_{j\to\infty} a^{p^j}$ を示す。

これを我々の場合に適用すれば，

$$(h(x)/\pi_1)^{p^n} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \lim_{n\to\infty} \sum^{N} (h(x_j)/\pi_1)^{p^n} \chi_{V_j}$$

がえられた．さて $\mathbb{C}_p$ 中の有限集合 $\{h(x_j)/\pi_1\}_{j\leq N}$ に対し，$\mathbb{Q}_p$ の有限次代数拡大 R_0 と R_0 中の有限集合 $\{a_j\}_{j\leq N}$ をとって，$|h(x_j)/\pi_1 - a_j| < 1$ と出来る．

R_0 の剰余体 F は有限 p-体で，その位数を p^m とすると，各 a_j に対し $|a_j - c_j| < 1$ となる 1 の (p^m-1)-乗根 c_j をとることができる．すなわち，$|h(x_j)/\pi_1 - c_j| < 1$ だから再び上の事を用いて，$\lim_{n\to\infty} (h(x_j)/\pi_1)^{p^n} = \lim_{n\to\infty} c_j^{p^n} = c_j$ が得られ，結局．

$$(h(x)/\pi_1)^{p^n} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \sum^{N} c_j \chi_{V_j}$$

で結果がえられた。

Step 3). step 1) より，任意開コンパクト集合 E に対し，$\chi_E \in F$ が云えればよい。

所で，step 2) によって，$h \in F$ に対して，$\varphi \equiv \sum c_j \chi_{V_j} \in F$ が判った。$\{\varphi^{m}\}_n$ の一次結合を考えると，φ により分離される2点 x, y の一方を含み他方を含まぬ開コンパクト集合 V があり，$\chi_V \in F$ となる。h の代りに $h-\varphi$ を考え，同様につづけて，h で分離される2点 x, y に対して同じ事が云える。F の分離条件 2) により，$C_R(X)$ で分離される2点について同じ結論が出る。$\chi_{V_1}, \chi_{V_2} \in F$ で，

$\chi_{V_1 \cap V_2} = \chi_{V_1} \cdot \chi_{V_2} \in F$，$\chi_{V_1 \cup V_2} = \chi_{V_1} + \chi_{V_2} - \chi_{V_1 \cap V_2} \in F$ を考えれば，E, E^c のコンパクト性から容易に $\chi_E \in F$ を得る。　　証明了

全不連結コンパクト群 G に対して，命題 3-1 系 1 で与えた K_α の $C_R(K_\alpha)$ の元を G 上 H_α 剰余類上で一定値をとる連続階段関数と見て $C_R(G)$ にうめこむ。命題 3-2 の $X = G$，$F \equiv \overline{\bigcup_\alpha C_R(K_\alpha)}$ と考えると明らかに 1)〜3) をみたすから，

<u>系 1.</u>　$\bigcup_\alpha C_R(K_\alpha)$ は $C_R(G)$ 中で稠密である。

Z_R に対しては，その上の微分を次の様に定義できる。先ず，$f \in C_R(Z_R)$ が $\forall x \in Z_R$ において，

$\lim_{y\to 0}(f(x+y)-f(x))/y = f'(x)$ をもつ時, fを微分可能であると云い, $f'\in C_R(Z_R)$ となるfの全体を $C_R^1(Z_R)$ で示す. 以下通常のR-値関数と同様に, $C_R^m(Z_R)$, $C_R^\infty(Z_R)$, さらに多変数の $C_R^m(Z_R^m)$, $C_R^\infty(Z_R^m)$ 等を定義することが出来る. R-値関数と大きく異る点は, 任意の開コンパクト集合 $E\subset Z_R^m$ に対して, (χ_Eの微分)$\equiv 0$ となるので, $\chi_E\in C_R^\infty(Z_R^m)$ となる点である.

同様C^∞-R-多様体 X も, その各点 x が Z_R^m と同相の近傍をもち, 2つの座標近傍はそれ等の交わりの上で, 夫々の座標の間の変換がC^∞である, として定義できる. X がコンパクトなら有限ケの開コンパクト座標近傍の和に分割出来るから, その各々で座標系を定めて考える. 座標近傍 U_l の座標系 $(x_1,\cdots,x_m)$ に対して, $X_j f\equiv \frac{\partial}{\partial x_j}f$ $(1\leq j\leq m)$ とかく. $C_R^\infty(X)$ 上の準ノルム族

$$\left\{ p^l_{(j_1,\cdots,j_s)}(f)\equiv \sup_{x\in U_l}|X_{j_1}\cdots X_{j_s}f(x)|\right\}_{l,(j_1,\cdots,j_s)}$$

より生成される位相を τ_∞で示す.

<u>補題 3-3.</u> 定理3-2, の証明の step 2) での収束

$$(h(x)/\pi_1)^{p^n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\sum^{N} c_j\chi_{U_j} \quad \text{は,}\quad h\in C_R^\infty(X)$$

なら τ_∞ での収束である. ┘

<u>証明.</u> $X_j(\sum^N c_j\chi_{U_j})\equiv 0$ であるから, 有限ケの組 $\{(l;j_1,\cdots,j_s)\}_{(s\geq 1)}$ について, $p^l_{(j_1,\cdots,j_s)}((h/\pi_1)^{p^n})\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

を示せばよい。 これらの組の s の最大を N とする。

$M \equiv \underset{l;\ s\leq N;\ (m_1,\cdots,m_s)}{\mathrm{Max}} \left(\rho^{l}_{(m_1,\cdots,m_s)}(h),\ 1\right)$ とおく。

記法の簡便さの為に，h/π_1 を h と思い $\|h\|=1$ として示す，

$$
\begin{aligned}
|X_{j_1}\cdots\cdots X_{j_s}(h^{p^n})(x)| &= |p^n (X_{j_1}\cdots X_{j_{s-1}})(h^{p^n-1}(X_{j_s}h))(x)| \\
&\leqq |p|^n \,\mathrm{Max}\big(|(p^n-1)(X_{j_1}\cdots X_{j_{s-2}})(h^{p^n-2}(X_{j_{s-1}}h)(X_{j_s}h))(x)|, \\
&\qquad |(X_{j_1}\cdots X_{j_{s-2}})(h^{p^n-1}(X_{j_{s-1}}X_{j_s}h))(x)| \big) \\
&\leqq |p|^n \,\mathrm{Max}\big(|(X_{j_1}\cdots X_{j_{s-3}})(h^{p^n-3}(X_{j_{s-2}}h)(X_{j_{s-1}}h)(X_{j_s}h))(x)|, \\
&\qquad |(X_{j_1}\cdots X_{j_{s-3}})(h^{p^n-2}(X_{j_{s-2}}X_{j_{s-1}}h)(X_{j_s}h))(x)|, \\
&\qquad |(X_{j_1}\cdots X_{j_{s-3}})(h^{p^n-2}(X_{j_{s-1}}h)(X_{j_{s-2}}X_{j_s}h))(x)|, \\
&\qquad |(X_{j_1}\cdots X_{j_{s-3}})(h^{p^n-1}(X_{j_{s-2}}X_{j_{s-1}}X_{j_s}h))(x)| \big) \\
&\leqq \cdots\cdots \\
&\leqq |p|^n \,\mathrm{Max}\big(|((X_{j_1}h)(X_{j_2}h)\cdots(X_{j_{s-2}}h)(X_{j_{s-1}}h)(X_{j_s}h))(x)|, \\
&\qquad |((X_{j_1}X_{j_2}h)(X_{j_3}h)\cdots\cdots(X_{j_{s-1}}h)(X_{j_s}h))(x)|, \\
&\qquad - - - - - - - - - - \\
&\qquad |h^{p^n-s}(X_{j_1}\cdots\cdots X_{j_s}h)(x)| \big) \\
&\leqq |p|^n M^s \xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}
$$

証明了

定理 3-4. (C^∞型 R-Stone Weierstraß の定理)

X をコンパクト C^∞-R-多様体とする。 $F \subset C^\infty_R(X)$ で，

1) F は τ_∞-閉の部分関数環,

2) $\forall x_1 \neq x_2 \in X$ に対し，$\exists f\in F$ で $f(x_1)\neq f(x_2)$,

3) $\mathbb{1} \in \mathcal{F}$,

4) $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall N > 0$ と $\forall j \leq m$ に対し、

$\exists f^{x}_{(\varepsilon, N, j)} \in \mathcal{F}$ で、 イ) $X_j f^{x}_{(\varepsilon,N,j)}(x) = 1$,

ロ) $|(X_n f^{x}_{(\varepsilon,N,j)})(x)|$ $(n \neq j)$, $|(X_{j_1} \cdots X_{j_s} f^{x}_{(\varepsilon,N,j)})(x)| < \varepsilon$

(但し、$(j_1, \cdots, j_s)$, $(2 \leq s \leq N)$ を全て走る)

をみたすならば、 $\mathcal{F} = C^{\infty}_{R}(X)$. ┘

証明. Step 1). 1)～3) の條件と定理 3-2 の証明と補題 3-3. から、各点 $x \in X$ の任意の開コンパクト座標近傍 V について、$\chi_V \in \mathcal{F}$ となるので、$X = V \cong (\mathbb{Z}_R^m)$ の時に示せば十分である。

Step 2). 座標 $(x_1, \cdots, x_m)$ を1つ定めて、座標関数 $\varphi_j(x) \equiv x_j$ $(x = (x_1, \cdots, x_m))$ を考える。条件 4) は、$X \ni y$ の適当な近傍 V_y で関数

$\varphi^{y}_{j}(x) \equiv f^{y}_{(\varepsilon N, j)}(x) - f^{y}_{(\varepsilon, N, j)}(y) + \varphi_j(y) \in \mathcal{F}$,

が $\varphi_j(x)$ の $\mathcal{T}_\infty$ での近似になっていることを示している。要すれば V_y をちぢめて開コンパクトとしてよいから $\chi_{V_y} \cdot \varphi^{y}_{j}$ をつなぎあわせて、X 全体で φ_j の近似がえられる。

Step 3). $\forall f \in C^{\infty}_{R}(X)$ に対し、$\forall y \in X$ について、f の Taylor 級数の N 項迄の多項式

$$f^{y}_{N}(x) \equiv \sum_{j}^{N} \left(\frac{1}{j!}\right) \left(\left(\sum_{s} (x_s - y_s) \frac{\partial}{\partial y_s} \right)^{j} f \right)(y)$$

が $\mathcal{C}_0$ での f の近似を与えている様な y の近傍 V_y をとることができる。この近傍系で X を有限被覆すれば，f は $\mathcal{C}_0$ の意味で $\chi_{V_y}P(\varphi_1^y,\cdots,\varphi_m^y)$ （P は多項式）の和で近似され，従って step 2) によって F に入る。 ┘

<u>系 1.</u>　$X=\mathbb{Z}_R^m$ のとき，座標 $x\equiv(x_1,\cdots x_m)$ について，関数系 $\{\exp(\sum_j^m n_j x_j) \mid n_j\in\mathbb{Z}\}$ ではられる $C_R^\infty(X)$ の部分空間は，$C_R^\infty(X)$ で稠密である。 ┘

<u>証明.</u>　$\exp x_j$ が定理 3-4 の $f^x_{(\varepsilon,N_j)}$ を与える。┘

§4. 有限群の $\mathcal{R}$-双対性

有限群 K では，その巡回表現は常に有限次元である。その表現の行列表示 $T_g=(a_{ij}(g))$ を考えると，

$a_{ij}\in C_R(K)$ であるから，この表現を正則表現に埋込んで考えてよい。すなわち弱双対定理は強双対定理と一致するので，以下弱双対性の形で check して見る。

正則表現 $\mathcal{R}\equiv\{\mathcal{H},R_g\}$ は，$\mathcal{H}\equiv C_R(K)$ 上で

$(R_g f)(g_0)\equiv f(g_0 g)$　で与えられ，

$W\ ;\ \mathcal{H}\otimes\mathcal{H}\ni f(g_1,g_2)\longmapsto f(g_1g_2,\ g_2)\in\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$

が，$\mathcal{R}\otimes\mathcal{R}\simeq\Sigma^\oplus\mathcal{R}$ の intertwining operator を実現することは全く同様である。模表現 $\mathbb{T}=\{T(g)\}$ に対応して，

$$(4-1)\qquad W(T\otimes T)W^{-1}=I\otimes T$$

を解くことを考える。(4-1) を $f_1 \otimes f_2$ ($f_1, f_2 \in \mathcal{H}$) に行って見ると，($(L_{g_1}f)(g_2) \equiv f(g_1^{-1}g_2)$ とかいて)

$$(4\text{-}2) \qquad (Tf_1)(g_1g_2)(Tf_2)(g_2) = T(L_{g_1}^{-1}f_1 \times f_2)(g_2).$$

こゝで　$g_1 = e$　とおき　$(Tf_1)\times(Tf_2) = T(f_1 \times f_2)$,

又，$f_2 \equiv 1$　として　　$L_g T = T L_g$

となるから，容易に，　$T = R_{g_0}$ となる g_0 の存在が示される。

こゝで，表現空間の係数体に関する性質は全く使っていない。すなわち，

「定理 4-1.　有限群 K では，その表現を考えている空間の係数体の如何に拘わらず，淡中型双対定理が成立する。」

特に §1 で問題としたユニタリ性の條件 4) に相応するものはこの場合入る余地はなく，又，命題 1-3 の様に閉作用素と考えても，有限次元空間上の表現であるので，全て有界作用素となるから，§1 で述べた様な考え方に基いた拡大は得られないことが判る。

次に，全不連結コンパクト群 G を考える。命題 3-1 系1 によって，$G = \varprojlim_{\alpha} K_\alpha$ ($\# K_\alpha < +\infty$) と考える。$K_\alpha = G/H_\alpha$ の表現を G の表現にもち上げることにより，K_α の R-表現の全体 Ω_α を G の R-表現の空間 Ω_G にテンソル環の構造を保って埋め込むことができる。

Ω_G 上の広義複表現 $\mathcal{T}=\{T(\theta)\}$ について，その Ω_α への制限を見ると，定理 4-1 によって，対応する K_α の元，すなわち G 中の H_α 剰余類 $\bar{g}_\alpha$ が1つきまる。α をはしらせるとこの剰余類達は互に適合していて，命題 3-1 系2によって，その射影極限の先として G の元 g_0 が一意的に定まり，$\bigcup C_R(K_\alpha)$ 上で，R_{g_0} は $\mathcal{T}(R)$ の作用と一致する。定理 3-2. 系1により，$\bigcup C_R(K_\alpha)$ は $C_R(G)$ で稠密であるから，$\mathcal{T}(R)$ を閉作用素と仮定しても，有界作用素 R_{g_0} と稠密な空間で一致することから，$T(R)=R_{g_0}$． これより $\mathcal{T}=\mathcal{T}_{g_0}$ がえられる。*)

すなわち，この方法では，我々の考え方に基いて G の拡大群を得ることは出来ない。

§5. 加法群 $\mathbb{Z}_p$ と $(ax+b)$ 群

それでは，我々の構想に基いて拡大群を得ることは出来ぬかと云えば，容易に次の例に気付く．

((1)) $G=\mathbb{Z}_p$（加法群） の場合。$\forall a\in\mathbb{C}_p$ で，

$$\mathbb{Z}_p\ni x\longmapsto \chi_a(x)\equiv\exp ax\equiv\sum_{n=0}^{\infty}(a^nx^n/n!)\in\mathbb{C}_p$$

は収束半径 $|a^{-1}p|^{1/p-1}$ をもち，この範囲で，1対1の乗法的連続関数（character）を与える．

*) この形の淡中型双対定理については［5］参照．

G全体の上のcharacterであるためには，$|a^{-1}p|^{1/p-1} > 1$ すなわち，$|a| < |p|^{1/p-1}$ が必要十分である．〔11〕

Kが局所コンパクトであるとき，$|K|$は0以外に集積しないから，K-値 character の全体は，$\chi_a(1)$できまり，

$$\{\chi_a\} \cong \{\chi_a(1)\} \cong \{a \in K \mid |a| \leq |{}^{\exists}a_0|\} \cong a_0\mathbb{Z}_K,$$

と考えられる．

$G = \mathbb{Z}_p$ に対して，$\mathbb{Q}_p$-値 character の全体 $\hat{G}$（双対）は上より，$\hat{G} \cong p\mathbb{Z}_p$（$\sim \mathbb{Z}_p$（群同型））となるが，更にその上の$\mathbb{Q}_p$-値 character の全体（bidual）は $\hat{\hat{G}} \cong \mathbb{Z}_p \sim G$ となり，Pontrjagin の双対定理が成立している。こゝで $\hat{G}$ 上の character の値域を拡大し，局所コンパクト体 K に値をとる character 全体を考えると，

$$\tilde{G} \equiv \{\exp \beta a \,/\, \beta \in K,\ |\beta| \leq |a_0 p^{-1}|\}$$
$$\cong p^{-1}a_0\mathbb{Z}_K \quad (\sim \mathbb{Z}_K \text{ (群同型)})$$

となる．すなわち，表現のユニタリ性に対応する性質を，この場合"$\mathbb{Q}_p$-値（Galois不変）"と考えるなら，最初に我々が目論んだパターンでの拡大群 $\hat{G} \sim \mathbb{Z}_K$ が得られた。

((2)) 非可換群の最も簡単な場合としての，$(ax+b)$群，

$$G \equiv \{g \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \exp(p\mathbb{Z}_p) = 1 + p\mathbb{Z}_p,\ b \in \mathbb{Z}_p\},$$

を考える．Gはコンパクトである．その内部分群

$$A \equiv \{\hat{a} \equiv \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G\},\quad B \equiv \{\hat{b} \equiv \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G\}.$$

を考える。

<u>補題 5-1.</u>　1)　G の有限次元 $\mathbb{C}_p$-既約表現は1次元で、可換群 A の $\mathbb{C}_p$-値 character

$$G \ni g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \tilde{\tau}(a) \equiv a^{\tau} \equiv \exp(\tau \cdot \log a) \in \mathbb{C}_p$$

(但し　$\tau \in \mathbb{C}_p$, $|\tau| \leq 1$)　で与えられる。*)

2)　G 上の $\mathbb{Q}_p$-値 character 全体は $\hat{G}^* \equiv \{\tilde{\tau} \mid \tau \in \mathbb{Z}_p\}$ で与えられる。 ┘

<u>証明.</u>　G の有限次元 $\mathbb{C}_p$-表現 $\mathfrak{D} \equiv \{\mathcal{H}, T_g\}$ を B に制限すると、$T_{\tilde{\alpha}}$ の固有ベクトルは又 T_B の共通固有ベクトルで、その全体 $\mathcal{H}_0$ は $\{0\}$ でなく T_G-不変、従って既約の仮定から $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0$ となる。

$T_{\tilde{\alpha}} \cdot T_{\tilde{n}} = T_{\tilde{n}} \cdot T_{\tilde{\alpha}}$ であるから、固有ベクトル v の $T_{\tilde{\alpha}}^{-1}$ の固有値を λ とすると、ベクトル $T_{\tilde{n}}^{-1} v$ は固有値 λ^n の固有ベクトルである。$\dim \mathcal{H} < +\infty$ より ${}^{\exists}N$ で、$T_{\tilde{N}}^{-1} v = {}^{\exists}c v$, $\lambda^N \neq 1$. すなわち T_B-不変のベクトル $T_{\widetilde{N-1}}^{-1} v$ が存在する。T_B-不変ベクトルの全体は又 T_G-不変、従って又既約の仮定から $\mathcal{H}$ と一致し、すなわち $\mathfrak{D}$ は A の既約表現の G への持ち上げにすぎない。A の $\mathbb{C}_p$-既約表現が上の形の $\mathbb{C}_p$-値 character で与えられることは同様の議論で明らか。

2) は a^{τ} の値域の <u>check より直ち</u>に出る。 ┘

*)　$\log a \equiv \sum_{n \geq 1}^{\infty} \left((-1)^{n-1} (a-1)^n / n\right)$ については [11] 参照。

G には，$\mathbb{R}$上の$(ax+b)$群と全く同様に誘導表現が定義できる．すなわち B上の$\mathbb{Q}_p$-値character χ に対して，

$$\mathcal{F}_\chi \equiv \{ f \in C_{\mathbb{Q}_p}(G) \mid f(bg) = \chi(b) f(g),\ {}^\forall b \in B,\ {}^\forall g \in G \},$$

$$(T_{g_1}^\chi f)(g) \equiv f(g g_1),$$

により，$\mathbb{Q}_p$-Banach 表現，$\rho_\chi \equiv \operatorname{Ind}_{B\uparrow G} \chi \equiv \{\mathcal{F}_\chi, T_g^\chi\}$ を定義する．後の議論のためには，$f \in \mathcal{F}_\chi$ の代りに $f|_A$ (Aへの制限) $\in C_{\mathbb{Q}_p}(A)$ をとり，imprimitive型に，

$$\tilde{T}_{\hat{a}}^\chi f \equiv f(\cdot\, \hat{a}) \quad , \quad \tilde{T}_{\hat{b}}^\chi f \equiv \chi(\cdot\, b) f$$

として，ρ_χ を $\{C_{\mathbb{Q}_p}(A), \tilde{T}_g^\chi\}$ で実現しておく方が便利である．（以下 $C(A) \equiv C_{\mathbb{Q}_p}(A)$ と略記する）．

<u>補題 5-2.</u> $\chi \neq 1$ なら，ρ_χ は空間的にも，作用素的にも既約である． ┘

注） これは χ を $\mathbb{Q}_p$-値characterに限ったからで，1 の原始 p^n 乗根を含む拡大体 K-値をとるcharacterでは，B について循環するcharacterがあらわれて，それでは ρ_χ は既約ではない．

しかし，コンパクト群 G の無限次元既約表現がえられたわけで，この点興味深い． ┘

(補題 5-2の)<u>証明.</u> (空間的既約性). $C(A)$ 上の実現で考える． $f\ (\neq 0) \in C(A)$ を含む閉 T_G-不変空間は，

$$\tilde{T}_{\hat{b}}^\chi f(\hat{a}) \equiv \chi(b a) f(\hat{a}) \quad ({}^\forall b \in \mathbb{Z}_p)$$ を全て含むか

る, 定理 3-2 により, $\forall \varphi \in C(A)$ で $\varphi \times f$ の形の元を全て含む。従って, 集合 $E_\varepsilon \equiv \{\hat{a} \in A \mid |f(\hat{a})| > \varepsilon\}$ で χ_{E_ε} を含む. $\hat{T}_{\hat{a}}^{\varkappa} \chi_{E_\varepsilon} = \chi_{E_\varepsilon \hat{a}^{-1}}$ より, 定理 3-2 Step 3) の議論同様にして, 全ての開コンパクト集合 E について χ_E, 従って $C(A)$ の元全てを含む.

(作用素既約性). $\hat{T}_g^{\varkappa} S = S \hat{T}_g^{\varkappa}$ $(\forall g \in G)$ を満たす有界作用素 S を考える。B の元に対する可換性と定理 3-2 より, S は全ての $\varphi \in C(A)$ を掛ける作用素と可換で, それ自体ある $\psi \in C(A)$ を掛ける作用素となる. 次に $\hat{T}_{\hat{a}}^{\varkappa}$ との可換性より $\psi = \mathrm{const.}$ が出る. 証明了.

G は $\mathbb{Q}_p$-多様体であるから, $C^\infty(G)$ が定義される.
$\mathcal{F}_\varkappa^\infty \equiv \mathcal{F}_\varkappa \cap C^\infty(G)$ は, 代数的に $T_G^\varkappa$-不変であるが, τ_∞-位相について完備な局所凸空間で, $\rho_\varkappa^\infty \equiv \{\mathcal{F}_\varkappa^\infty, T_g^\varkappa\}$ は G の表現となる. $\rho_\varkappa$ 同様に $C^\infty_{\mathbb{Q}_p}(A) (\equiv C^\infty(A))$ 上で, 同じ形の作用素により実現される.

<u>補題 5-3.</u> $\varkappa \neq 1$ なら, $\rho_\varkappa^\infty$ は空間的にも, 作用素的にも既約である.

<u>証明.</u> 定理 3-2 の代りに定理 3-4 を用いて, $\{\varkappa(b\cdot)\}_b$ の生成する関数環が, τ_∞ で, $C^\infty(A)$ 中稠密であることを示せば, 前補題 5-2 と全く同様にして証明する事ができる。

さて, $\rho_\varkappa$ の表現系列を使って淡中型双対定理を考えて見る.

与えられた複表現を $\mathbb{\Pi} \equiv \{\Pi(\theta)\}$ とする.

Step 1). $\Pi(\tau)$ 部分，すなわち A の character 群の上で考えると，《1》で述べた Pontryagin duality によって，
$A \cong \mathbb{Z}_p \longrightarrow \hat{A} \cong p\mathbb{Z}_p \longrightarrow \hat{\hat{A}} \cong \mathbb{Z}_p \sim A$ として，対応する $\tilde{a} \in A$ が一意的にきまる．すなわち $\Pi(\tau) = \tau(\hat{a})$.
以下 $\{\Pi(\theta) T_{\tilde{a}^{-1}}(\theta)\}$ を $\mathbb{\Pi}$ とおき直して，$\Pi(\tau) = 1$ として考える．

Step 2) テンソル積 $\tau \otimes \rho_x$ は，$f(\hat{a}) \longmapsto \mathbb{\Pi} f(\hat{a}) \equiv (\tau^{-1} \times f)(\hat{a})$ の対応で，ρ_x と同値である．複表現の定義から

$$\Pi(\rho_x)(\tau^{-1} \times f)(\hat{a}) = \tau^{-1}(\hat{a})\, \Pi(\rho_x) f(\hat{a}) \quad (\forall \tau)$$

定理 3-2. を用いて，$\Pi(\rho_x)$ は，$x \in \hat{B}$ によってきまる関数 $h(x, \hat{a}) \in C(A)$ を掛ける作用素である．

Step 3) 次に $\rho_x \otimes \rho_\sigma$ を考える．$f(\hat{a}_1, \hat{a}_2) \in C(A \times A)$ で，

$$(T^{x \otimes \sigma}_{(\tilde{a}_0, \tilde{b}_0)} f)(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = x(b_0 a_1)\, \sigma(b_0 a_2) f(\hat{a}_1 \tilde{a}_0, \hat{a}_2 \tilde{a}_0),$$

$a' \equiv a_2 a_1^{-1}$ を係数と見て，$a \equiv a_1$ を変数にとり，

$$(T^{x(a')}_{(\tilde{a}_0, \hat{b}_0)} f)(a) \equiv x(b_0 a)\, \sigma(b_0 a' a) f(\hat{a} \tilde{a}_0, \tilde{a}' \hat{a} \hat{a}_0)$$

$(\ x(a')(a) \equiv x(b_0 a)\, \sigma(b_0 a' a)\ )$ と比較すると，
$\rho_x \otimes \rho_\sigma$ は表現 $\{\rho_{x(a')}\}_{a'}$ が連続的にならんだものと考えられる．複表現の $\Pi(\rho_x) \otimes \Pi(\rho_\sigma)$ の値を計算すると，

$$h(x, \hat{a})\, h(\sigma, \hat{a}' \hat{a}) = h(x(a'), \hat{a}).$$

左辺の $(\hat{a}', \hat{a})$ についての連続性より右辺，従って $h(x, \hat{a})$

の $(x,\hat{a})$ についての連続性が出る。特に $\hat{a}=\hat{a}=e$ で、

$$h(x,e)\,h(\sigma,e)=h(x\cdot\sigma,e),$$

は $\exists b_0\in\hat{\hat{B}}\sim B$ で $h(x,e)=b_0(x)$ を示す。

$$h(\sigma,\hat{a}')=h(x(a'),e)/h(x,e)=b_0(x(a'))/b_0(x),$$

より、$\Pi(\rho_x)=T^{x}_{b_0}$.

以上で複表現 Π に対応する $g\in G$ がきまり、淡中型双対定理が結論される。

Step 4). ここで複表現 $\Pi\equiv\{\Pi(\theta)\}$ の代りに、その値域が $\mathbb{Q}_p$-値, i.e. $\mathbb{Q}_p$線型空間上の作用素とせずに、R-線型空間に拡大したものをこの場合の"広義複表現" $\mathbb{T}\equiv\{T(\theta)\}$ と見て、その特長づけを考える。

先ず表現 τ, ρ_x だが、共に R, $R\otimes C_{\mathbb{Q}_p}(A)=C_R(A)$ の上へ自然に拡張され、G の表現として"ユニタリ性(=Galois不変)"の條件を満すものとして特長づけられている。この上で、Step 1) ~ Step 3) の手順をこの設定の上にもう一度たどって見る。先ず Step 1) で、Pontrjagin duality を用いて、$\hat{a}\in A$ を定めたが、ここでは $\hat{A}$ 上の R-値 character $\hat{a}_0\in\hat{A}\wedge\mathbb{Z}_R$ がきまる。次の Step で $\Pi(\theta)T^{-1}_{\hat{a}_0}(\theta)$ を作りたいが、$T_{\hat{a}_0}(\theta)$ を定義するために準備を要する。

Step 5) $\mathbb{Z}_p^2\ni(\alpha,b)\longmapsto\begin{pmatrix}\exp p\alpha & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in G$ の対応で、G を $\mathbb{Z}_p$-多様体 $\mathbb{Z}_p^2$ と見る。(同相の意味で)

こゝで R-値関数の族（解析関数族）

$A_R(\mathbb{Z}_p^2)(\equiv A_R(G)) \equiv \{ f \in C_R(G) \mid f(\alpha, b) \equiv \sum_{n,m \geq 1}^{\infty} c_{n,m} \alpha^{n-1} b^{m-1} \}$

（$\sum_{n,m}^{\infty}$ は一様収束となる）　$(R \ni c_{n,m} \xrightarrow[n \times m \to \infty]{} 0)$,

を考える．又同様 G の R-表現 $\mathfrak{D} \equiv \{\mathcal{H}, T_g\}$ で，

$v \in \mathcal{H}$ が解析ベクトルであるとは，

$$T_g v \equiv T_{(\alpha, b)} v = \sum_{n,m \geq 1} \alpha^{n-1} b^{m-1} v_{n,m}.$$

$(\mathcal{H} \ni v_{n,m} \xrightarrow[n \times m \to \infty]{} 0)$　の展開をもつことを云う．

$X_\alpha v = (\partial / \partial \alpha) T_\alpha v |_{\alpha = 0}$,　$X_b v = (\partial / \partial b) T_b v |_{b=0}$ は常に解析ベクトル v について存在して，上の展開は，

$$T_g v = T_{(\alpha, b)} v = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} (\alpha X_\alpha + b X_b)^m v$$

とあらわされる。

$\mathbb{Z}_p$ 上の R-値 character は解析関数であると共に，1次元表現のベクトルは解析ベクトルである．又 $A_R(G)$ の元は，G の正則表現に関し解析ベクトルで，先の ρ_x を $C_R(A)$ 上に実現したとき，$A_R(A)$ の元は ρ_x で解析ベクトルである。

Step 6）．再び Step 4）の段階にもどる．こゝで $\hat{A} \cong p\mathbb{Z}_p$ であらわす時，((1)) より，　$a \in p\mathbb{Z}_p$ を変数として，

$$\hat{A} \equiv \{ \exp \beta a \mid \beta \in R,\ |\beta| \leq |a_0 p^{-1}| \}$$

（a_0：R の生成元）と見てよかった。こゝで $\beta \in \mathbb{Q}_p$ に対応するのが Pontrjagin duality により A の元である。

すなわち，　$\exp \beta a = \sum_{m=0} (\beta^n a^n / m!)$　の展開で係数を

$\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_R$としたものと考えてよい．1次表現と見て，その表現ベクトルを解析ベクトルと見る立場からは，$\hat{a} \in A$での展開を　$T_{\hat{a}} v = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \alpha^m X_\alpha^m v$　$(\hat{a} \leftarrow \exp\alpha)$ とした時，$\alpha \in \mathbb{Z}_p$であったのを，$\hat{a}_0 \in \hat{A}$に拡げるには，$\hat{\alpha} \in \mathbb{Z}_R$　としたものと考えてよい．この考え方を他の表現に拡げて，解析ベクトルの上で定義された作用素$T_{\hat{a}_0}(\theta)$を考えることとする．

こうすると以下の段階も同様で，広義複表現に対応する $h(x, e) = b_0(x)$　を　$b_0 \in \tilde{B}$　の元として定めることが出来る．そして結論として広義複表現の全体は上の意味で，

$$\hat{G} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a_1 \in \exp(a_0 p^{-1} \mathbb{Z}_R),\ b_1 \in \mathbb{Z}_R \right\}$$

の群として表示され，すなわち我々の目論んだパターンによる複素化がえられた．

§6.　考察

こゝで，§4　と §5の一見矛盾する結果について考察を加えよう．　§5で得た複素化の作用素は，解析ベクトルの上丈に定義される．所で §4 で重要な役目を演じた $C_R(K_\alpha)$ の元は階段関数であって，1以外は C^∞ ではあるが解析的ではない．従ってこの上では拡大群の作用素は定義出来ない．そしてこの上の拡大群の表現は，各元の Galois 不変部分を

とりその表現，すなわち実質的に G の表現としてでも定義する他はない．

所で定理3-2より $\bigcup C_R(K_\alpha)$ は $C_R(G)$ で稠密であるからこう見ると拡大の余地はない．所で今空間の位相を変えて $C_R^\infty(G)$ で考えて見よう．この時 ρ_π^∞ を考えると議論は全く同様であることが容易にわかる．そして $A_R(G)$, $A_R(A)$ 等は夫々の空間の中で稠密で，拡大群に対する広義換表現の作用素は，C^∞-型作用素として定義される．一方こうすると $\bigcup C_R(K_\alpha)$ はもはや $C_R^\infty(G)$ で稠密ではない．従って $C_R(K_\alpha)$ 上の表現を上記の様に拡大解釈しても，我々の命題1-3型の拡大操作は問題がない．つまり表現の位相は，Banach表現ではなくなるが，C^∞-型の位相が適切である様に思われる．

文献

[1] C. Chevalley : Theory of Lie groups. I. Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press 1946.

[2] G. W. Mackey : Induced representations of locally compact groups. I. Ann. Math. 55 101-140 (1952).

[3] D. Montgomery, L. Zippin : Topological transformation groups. New York, N.Y.: Interscience Publishers (1955).

[4] L. Narici, E. Beckenstein, G. Bachman : Functional Analysis and valuation theory. New York : Marcel Dekker, inc (1971)

[5] W. H. Schikhof : Non-archimedean representation of compact groups. Compositio Math. 23 215-232 (1971).

[6] S. Stratila, L. Zsido : Lectures on von Neumann algebras. Kent England : Abacus Press (1975).

[7] M. Sugiura : The Tanaka duality theorem for semi-simple Lie groups and the unitarian trick. , Manifolds and Lie groups. Birkäuser. Basel (1981).

[8] N. Tatsuuma : A duality theorem for locally compact groups. J of Math. Kyoto Univ. 6 187-293 (1967)

[9] 〃 : Prime ideals in the dual objects of locally compact groups. Proc. Japan Acad., 47 249-25[illegible] (1971)

[10] 〃 : Duality theorem for locally compact groups and some related topics. Colloques internationaux du CNRS N°274 Marseille 387-408 (1977)

[11] 森田 康夫 : P進特殊関数について. 都立大学 数学教室セミナー報告 (1981).