数理解析研究所講究録
第481巻 1983年 155-177

階数1非コンパクト対称空間上の調和解析とその応用.

広島大(理) 橋爪道彦
Hashizume Michihiko

対称空間上の調和解析に於いて基本的な役割を果すものとして, R^nの場合のフーリエ変換に対応して球フーリエ変換が, ラドン変換の対応物として(アーベル・セルバーグ)・ハリシュチャンドラ変換が, 更にポアソン和公式に対応してセルバーグの跡公式がある。とりわけ球フーリエ変換に関しては その反転公式やプランシェレルの定理, ペーリー・ウィナー型定理等が与えられて居り 現在その応用に関心が集まっている。さてその応用(とりわけ局所対称空間上の調和解析への応用)となると まだまだ球フーリエ変換の性質について調べる必要が有ると思われる。周知の如く球フーリエ変換はハリシュ・チャンドラ変換とR^n上のフーリエ変換の合成として表わされる。従って球フーリエ変換の研究はハリシュ・チャンドラ変換のそれに帰着できるのであるが, ハリシュ・チャンドラ変換が応用上有用な形にまで書き直されていない事もあってか この立

場からの対称空間上の調和解析の研究はさほど進展してはいないようである。本稿ではハリシュ・チャンドラ変換とその反転公式を標題に記した対称空間の場合に具体的に与える事によりその種々の応用について述べる。

§1、準備.

Gを連結,非コンパクト半単純リー群で中心有限かつその実階数が1であるものとする。KをGの極大コンパクト部分群とする。G,Kのリー環を夫々$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$とし$\mathfrak{g}$のキリング形式$B(\ ,\ )$に関する$\mathfrak{k}$の直交補空間を$\mathfrak{p}$で表わす。$\mathfrak{a}$を$\mathfrak{p}$の極大アーベル部分環とすればGの実階数が1だから$\dim\mathfrak{a}=1$である。$\mathfrak{g}$の$\mathfrak{a}$に関するルート系をΣとし,その正のルート系Σ^+を一つ固定する。このとき$\alpha\in\Sigma^+$, $\alpha/2\notin\Sigma^+$なるルートαが唯一つ存在し$\Sigma^+=\{\alpha\}$又は$\Sigma^+=\{\alpha,2\alpha\}$が成立つ。$\mathfrak{a}$の元$H_0$を$\alpha(H_0)=1$を満たすように選ぶ。$\mathfrak{a}=\mathbb{R}H_0$だから$\mathfrak{a}$の複素双対空間$\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$は$\mathbb{C}$と同型でその同型対応は$\nu\in\mathbb{C}\mapsto\nu\alpha\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$で与えられる。以下$\mathbb{C}$と$\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$を上の対応で同一視する。ルート$\alpha$, 2αに対応する$\mathfrak{g}$のルート空間を$\mathfrak{g}_\alpha$, $\mathfrak{g}_{2\alpha}$とし,その次元を

$$p=\dim\mathfrak{g}_\alpha\ ,\qquad q=\dim\mathfrak{g}_{2\alpha}$$

で表わす。以下

$$\rho=p/2+q$$

とおく。$\mathfrak{n}=\mathfrak{g}_\alpha\oplus\mathfrak{g}_{2\alpha}$とすれば$\mathfrak{n}$は$\mathfrak{g}$の部分環である。$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{n}$に対応するGの連結部分群を夫々A, Nと記す。$A=\exp\mathfrak{a}=\exp(\mathbb{R}H_0)$より$A$の元は$a_t=\exp(tH_0)$ $(t\in\mathbb{R})$と一意的に書ける。又$N=\exp\mathfrak{n}=\exp(\mathfrak{g}_\alpha\oplus\mathfrak{g}_{2\alpha})$より$N$の元は$n=\exp(Y+Z)$ $(Y\in\mathfrak{g}_\alpha, Z\in\mathfrak{g}_{2\alpha})$と一意的に表わされる。$G$の元は$g=ka_tn$ $(k\in K, a_t\in A, n\in N)$と一意的に分解される。又$G$の元は$g=ka_tk'$ $(k,k'\in K, a_t\in A$かつ$t\geq 0)$とも表わされるがこの時a_t $(t\geq 0)$はgにより一意に定まる事を注意しておく(この分解をカルタン分解と呼ぶ)。

商空間G/Kは定数倍を除いて唯一のG−不変リーマン計量をもち，これは階数1の非コンパクト型リーマン対称空間と呼ばれる負の断面曲率をもつ完備単連結リーマン多様体である。G/Kの次元をdとするとき次の関係がある:

$$d=\dim G/K=p+q+1.$$

本稿ではG/KのG−不変計量を以下の如く正規化する。θをカルタン分解$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$に対応するカルタン包合とすると，$-B(X,\theta Y)$ $(X,Y\in\mathfrak{g})$は$\mathfrak{g}$上にユークリッド内積を与える。そこで$\mathfrak{g}$の内積$\langle\ ,\ \rangle$を

$$\langle X,Y\rangle=-B(X,\theta Y)/B(H_0,H_0)\qquad (X,Y\in\mathfrak{g})$$

で定義する。これを$\mathfrak{p}$に制限すれば$\mathfrak{p}$上に$Ad(K)$−不変内積が定まる。それをG/K上のG−不変リーマン計量に延長した

ものを考える。かく与えられたリーマン計量に関するG/K上の距離関数を$d(\,,\,)$，体積要素をdv，ラプラス作用素をΔで表わす。これらはすべてG－不変である。以下$x\in G$の定める剰余類$xK\in G/K$を単に$\bar{x}$と書く事にする。

次にハール測度の正規化について述べる。先ずKのハール測度は $\int_K dk=1$ を満たすものとする。Gのハール測度dxを

$$\int_G f(x)\,dx=\int_{G/K}\int_K f(xk)\,dk\,dv(\bar{x})\qquad (f\in C_0(G))$$

が成立つようにとる。Aのハール測度は

$$da_t = dt\qquad (a_t=\exp tH_0,\ t\in\mathbb{R}),\ (dt\text{ は }\mathbb{R}\text{ のルベーグ測度})$$

を採用する。$\mathfrak{g}_\alpha$, $\mathfrak{g}_{2\alpha}$ には$\mathfrak{g}$の計量$\langle\,,\,\rangle$から誘導されるユークリッド計量があり 対応するユークリッド測度を夫々dY，dZで表わす。これを用いてNのハール測度を

$$dn=2^{-(p+q)/2}\,dY\,dZ\qquad (n=\exp(Y+Z),\ Y\in\mathfrak{g}_\alpha,\ Z\in\mathfrak{g}_{2\alpha})$$

で与える。上に述べたように正規化されたハール測度のもとに 次の積分公式が成立つ： $f\in C_0(G)$ に対し，

$$\int_G f(x)\,dx=\int_K\int_{-\infty}^{+\infty}\int_N f(ka_tn)\,e^{2\rho t}\,dk\,dt\,dn\,.$$

更に $D(t)$ $(t\geq 0)$ を

$$D(t)=2\pi^{d/2}\cdot\Gamma(d/2)^{-1}(\operatorname{sh}t)^p(2^{-1}\operatorname{sh}2t)^q$$

とするとき

$$\int_G f(x)\,dx=\int_{K\times K}\int_0^\infty f(ka_tk')\,D(t)\,dt\,dk\,dk'\,.$$

§2 球フーリエ変換とハリシュ・チャンドラ変換.

以下 $C^\infty(G/\!/K)=\{f\in C^\infty(G) \mid f(kxk')=f(x),\ k,k'\in K,\ x\in G\}$とし、$C_0^\infty(G/\!/K)=\{f\in C^\infty(G/\!/K) \mid \mathrm{supp}(f):\text{コンパクト}\}$とおく。$f\in C^\infty(G/\!/K)$のAへの制限$f(a_t)$は$t\in\mathbb{R}$の関数として$C^\infty(\mathbb{R})_e=\{F\in C^\infty(\mathbb{R}) \mid F(-t)=F(t)\}$に属す。逆に$F\in C^\infty(\mathbb{R})_e$に対しG上の関数$f$を$f(ka_tk')=F(t)$で定義すれば$f\in C^\infty(G/\!/K)$である。従って同型:

(2.1) $$C^\infty(G/\!/K)\cong C^\infty(\mathbb{R})_e \quad , \quad C_0^\infty(G/\!/K)\cong C_0^\infty(\mathbb{R})_e$$

を得る。$f\in C_0^\infty(G/\!/K)$に対し

(2.2) $$\hat{f}(\nu)=\int_G f(x)\,\varphi_{-\nu}(x)\,dx \qquad (\nu\in\mathbb{C})$$

をfの球フーリエ変換という。ここに$\varphi_\nu(x)$はハリシュ・チャンドラの球関数と呼ばれる$C^\infty(G/\!/K)$の元で積分表示

(2.3) $$\varphi_\nu(x)=\int_K e^{(i\nu-\rho)(t(xk))}\,dk \qquad (x\in G)$$

で与えられる。但し$t(xk)$は$xk\in Ka_{t(xk)}N$により一意的に定まる実数である。更に$\varphi_\nu(x)$は微分方程式

(2.4) $$\Delta\varphi_\nu+(\nu^2+\rho^2)\varphi_\nu=0 \quad , \quad \varphi_\nu(e)=1$$

の解としても一意的に決定される事も知られている(cf.[4]).

次に$f\in C_0^\infty(G/\!/K)$に対しハリシュ・チャンドラ変換$\mathcal{H}f$は

(2.5) $$(\mathcal{H}f)(a_t)=e^{\rho t}\int_N f(a_t n)\,dn \quad , \quad (t\in\mathbb{R})$$

により定義される。このとき球フーリエ変換は

(2.6) $$\hat{f}(\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty}(\mathcal{H}f)(a_t)\,e^{-i\nu t}\,dt$$

と表わされる([4])。即ち球フーリエ変換はハリシュ・チャンドラ変

換と$\mathbb{R}$上のフーリエ変換の合成に他ならぬ。この§ではハリシュ・チャンドラ変換をより具体的な形に表わす事を行う。

$f \in C^\infty(\mathbb{R})_e$ に対し $[1, +\infty)$ 上の関数 $\phi = \mathcal{C}f$ を

$$(2.7) \quad \phi(x) = (\mathcal{C}f)(x) = f(\log(x + \sqrt{x^2-1})) \qquad (x \geq 1)$$

で与える。更に写像$\mathcal{C}$による$C^\infty(\mathbb{R})_e$及び$C_0^\infty(\mathbb{R})_e$の像を夫々$C^\infty[1, +\infty)$, $C_0^\infty[1, +\infty)$と書く事にする。写像$\mathcal{C}$の逆$\mathcal{C}^{-1} : C^\infty[1, \infty) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R})_e$ は, $\mathrm{ch}\, t = \cosh t$ なる略記のもとに,

$$(2.8) \quad (\mathcal{C}^{-1}\phi)(t) = \phi(\mathrm{ch}\, t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

で与えられる。以上により $C^\infty(G/\!/K) \cong C^\infty(\mathbb{R})_e \cong C^\infty[1, +\infty)$ 及び $C_0^\infty(G/\!/K) \cong C_0^\infty(\mathbb{R})_e \cong C_0^\infty[1, +\infty)$ が成立つ事を注意しておく。更にハリシュ・チャンドラ変換$\mathcal{H}$は同型対応(2.1)のもとに$C_0^\infty(\mathbb{R})_e$上定義されるものと見なせる。又その像は再び$C_0^\infty(\mathbb{R})_e$の元を与える事も知られている([4]).

定理 2.1. (i) $\phi \in C_0^\infty[1, +\infty)$ に対し,

$$(2.9) \quad \mathcal{H}\circ\mathcal{C}^{-1}\phi\,(a_t) = \int_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{2\alpha}} \phi\left(\left((\mathrm{ch}\, t + |Y|^2/2)^2 + |Z|^2\right)^{1/2}\right) dY\, dZ$$

が成立つ。

(ii) $\mathcal{S} = \mathcal{C}\circ\mathcal{H}\circ\mathcal{C}^{-1} : C_0^\infty[1, +\infty) \longrightarrow C_0^\infty[1, +\infty)$ は

$$(2.10) \quad (\mathcal{S}\phi)(x) = \int_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{2\alpha}} \phi\left(\left((x + |Y|^2/2)^2 + |Z|^2\right)^{1/2}\right) dY\, dZ, \quad (x \geq 1)$$

で与えられる。

証明. Nの元は $n = \exp(Y+Z)$ $(Y \in \mathfrak{g}_\alpha, Z \in \mathfrak{g}_{2\alpha})$ と表わされ, このとき $dn = 2^{-(p+q)/2} dY\, dZ$ であった。従って(2.5)は

$$(\mathcal{H}f)(a_t) = 2^{-(p+q)/2} e^{\rho t}\int_{\mathfrak{g}_\alpha\times\mathfrak{g}_{2\alpha}} f(a_t\exp(Y+Z))\,dY\,dZ$$

と書ける。所で $a_t\exp(Y+Z)$ のカルタン分解を

$$a_t\exp(Y+Z) = k\,a_\tau\,k', \quad \tau=\tau(t,Y,Z)\geq 0, \quad k,k'\in K$$

として、$\tau(t,Y,Z)$ を求めよう。$\mathbb{R}Y$, $\mathbb{R}Z$ が $\mathfrak{g}$ の中で生成する部分リー環を $\mathfrak{g}(Y,Z)$ とすると、$\mathfrak{g}(Y,Z)\supset\mathfrak{a}$ であり、$\mathfrak{g}(Y,Z)\cong\mathfrak{su}(2,1)$ が成立つ（$\mathfrak{g}_{2\alpha}=(0)$ のときは $\mathfrak{g}(Y)\cong\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$）。更に $\mathfrak{g}(Y,Z)$ をリー環とする G の連結部分群 $G(Y,Z)$ は $SU(2,1)$ に同型で $a_t\exp(Y+Z)$ のカルタン分解は、それを $G(Y,Z)\cong SU(2,1)$ の元とみて行えばよい（いわゆる"$SU(2,1)$-還元" cf.[5]）。かくして次を得る：

$$\mathrm{ch}\,\tau(t,Y,Z) = \left\{(\mathrm{ch}\,t + e^{t}|Y|^2/4)^2 + e^{2t}|Z|^2/2\right\}^{1/2}.$$

これを用いれば

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\circ C^{-1}\phi\,(a_t) &= 2^{-(p+q)/2} e^{\rho t}\int_{\mathfrak{g}_\alpha\times\mathfrak{g}_{2\alpha}}(C^{-1}\phi)(a_t\exp(Y+Z))\,dY\,dZ\\ &= 2^{-(p+q)/2} e^{\rho t}\int_{\mathfrak{g}_\alpha\times\mathfrak{g}_{2\alpha}}(C^{-1}\phi)(a_{\tau(t,Y,Z)})\,dY\,dZ\\ &= 2^{-(p+q)/2} e^{\rho t}\int_{\mathfrak{g}_\alpha\times\mathfrak{g}_{2\alpha}}\phi(\mathrm{ch}\,\tau(t,Y,Z))\,dY\,dZ\\ &= 2^{-(p+q)/2} e^{\rho t}\int_{\mathfrak{g}_\alpha\times\mathfrak{g}_{2\alpha}}\phi\left(\left((\mathrm{ch}\,t+e^{t}|Y|^2/4)^2+e^{2t}|Z|^2/2\right)^{1/2}\right)dY\,dZ\end{aligned}$$

を得る。

これに変数変換 $Y\mapsto(2e^{t})^{1/2}Y$, $Z\mapsto(2e^{2t})^{1/2}Z$ を施し、$\rho=p/2+q$ に注意すれば (2.9) を得る。

（注意）. $\mathfrak{g}_\alpha$, $\mathfrak{g}_{2\alpha}$ に於ける単位球面の体積を ω_p, ω_q とすると我々の計量のもとでは夫々次で与えられる：

(2.11) $\omega_p = 2\pi^{p/2}/\Gamma(p/2)$, $\omega_q = 2\pi^{q/2}/\Gamma(q/2)$.

従って (2.10) は 夫々

$$(2.12)\qquad \mathcal{S}\phi(x) = 2^{p/2-1}\omega_p\int_0^\infty \phi(x+y)\,y^{p/2-1}dy \qquad (q=0\text{ の場合}),$$

$$(2.13)\qquad \mathcal{S}\phi(x) = 2^{p/2-1}\omega_p\omega_q\int_0^\infty\int_0^\infty \phi\left(((x+y)^2+z^2)^{1/2}\right)y^{p/2-1}z^{q-1}dy\,dz \quad (q\geq 1)$$

と書く事が出来る。

§3 セルバーグ変換 $\mathcal{S}_{p,q}$.

$p\geq 1$, $q\geq 0$ (整数) とし, $\omega_p = 2\pi^{p/2}\Gamma(p/2)^{-1}$, $\omega_q = 2\pi^{q/2}\Gamma(q/2)^{-1}$ $(p,q\geq 1)$ とする。変換 $\mathcal{S}_{p,q}: C_0^\infty[1,+\infty) \longrightarrow C_0^\infty[1,+\infty)$ を 夫々

(i) $q=0$ のとき

$$(3.1)\qquad \mathcal{S}_{p,0}\phi(x) = 2^{p/2-1}\omega_p\int_0^\infty \phi(x+y)\,y^{p/2-1}dy, \quad (x\geq 1)$$
$$= 2^{p/2-1}\omega_p\int_x^\infty \phi(y)(y-x)^{p/2-1}dy$$

(ii) $q\geq 1$ のとき

$$(3.2)\qquad \mathcal{S}_{p,q}\phi(x) = 2^{p/2-1}\omega_p\omega_q\int_0^\infty\int_0^\infty \phi\left(((x+y)^2+z^2)^{1/2}\right)y^{p/2-1}z^{q-1}dy\,dz$$
$$= 2^{p/2-1}\omega_p\omega_q\int_x^\infty\left\{\int_y^\infty \phi(w)(w^2-y^2)^{q/2-1}w\,dw\right\}(y-x)^{p/2-1}dy$$

により定義し この変換 $\mathcal{S}_{p,q}$ をセルバーグ変換と呼ぶ事にしよう。実際 $p=1$, $q=0$ の場合

$$(3.3)\qquad \mathcal{S}_{1,0}\phi(x) = 2^{1/2}\int_x^\infty \phi(y)(y-x)^{-1/2}dy$$

はセルバーグ([8])で導入された変換に他ならない。更に $p\geq 1$, $q=0$ の場合は 高橋礼司先生により考察されたものである。

以下セルバーグ変換 $\mathcal{S}_{p,q}$ の逆変換を決定する。先ず次の関係が成立つ事は容易である:

$$\mathcal{S}_{p+1,0}=\mathcal{S}_{p,0}\circ\mathcal{S}_{1,0}\qquad(p\geq 1).\tag{3.4}$$

$C^\infty[1,+\infty)$上の作用素 $\#$, $\flat$, D, $\mathcal{D}$ を夫々

$$(\#\phi)(x)=\phi^{\#}(x)=\phi(x^2)\quad,(\flat\phi)(x)=\phi^{\flat}(x)=\phi(x^{1/2})$$

$$D\phi(x)=\frac{d}{dx}\phi(x)\quad,\ \mathcal{D}\phi(x)=x^{-1}\frac{d}{dx}\phi(x)$$

で定義する。もちろん $\#^{-1}=\flat$ である。

補題 3.1. $p,q\geq 1$ のとき 次が成立つ：

$$\mathcal{S}_{p,q}=2^{-q/2}\mathcal{S}_{p,0}\circ\#\circ\mathcal{S}_{q,0}\circ\flat\ .\tag{3.5}$$

証明. (3.2) より

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{p,q}\phi(x)&=2^{p/2-1}\omega_p\omega_q\int_x^\infty\left\{\int_y^\infty\phi(w)(w^2-y^2)^{q/2-1}w\,dw\right\}(y-x)^{p/2-1}dy\\
&=2^{p/2-1}\omega_p\,2^{-1}\omega_q\int_x^\infty\left\{\int_{y^2}^\infty\phi(u^{1/2})(u-y^2)^{q/2-1}du\right\}(y-x)^{p/2-1}dy\\
&=2^{p/2-1}\omega_p\,2^{-q/2}\int_x^\infty\left\{2^{q/2-1}\omega_q\int_{y^2}^\infty\phi^{\flat}(u)(u-y^2)^{q/2-1}du\right\}(y-x)^{p/2-1}dy\\
&=2^{-q/2}2^{p/2-1}\omega_p\int_x^\infty(\mathcal{S}_{q,0}\phi^{\flat})(y^2)\,(y-x)^{p/2-1}dy\\
&=2^{-q/2}2^{p/2-1}\omega_p\int_x^\infty(\mathcal{S}_{q,0}\phi^{\flat})^{\#}(y)\,(y-x)^{p/2-1}dy\\
&=2^{-q/2}\mathcal{S}_{p,0}\left((\mathcal{S}_{q,0}\phi^{\flat})^{\#}\right)(x).
\end{aligned}$$

定理 3.2. セルバーグ変換 $\mathcal{S}_{p,q}$ の逆変換は夫々次で与えられる

(i) $q=0$ のとき（高橋[9]）.

a) p:(偶数) $\mathcal{S}_{p,0}^{-1}\phi(x)=\left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{p/2}D^{p/2}\phi(x)=\left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{p/2}\phi^{(p/2)}(x)$

b) p: 奇数, $\mathcal{S}_{p,0}^{-1}\phi(x)=\left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{(p+1)/2}(\mathcal{S}_{1,0}\circ D^{(p+1)/2}\phi)(x)$

$$=\left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{(p+1)/2} 2^{1/2}\int_x^\infty \phi^{((p+1)/2)}(y)\,(y-x)^{-1/2}\,dy$$

ii) $q \geq 1$ のとき

(3.6) $$\mathcal{S}_{p,q}^{-1} = 2^{q/2}\,\#\circ \mathcal{S}_{q,0}^{-1}\circ b\circ \mathcal{S}_{p,0}^{-1}$$

が成立つ，従って

c) p,q：偶数のとき

$$\mathcal{S}_{p,q}^{-1}\phi(x) = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{(p+q)/2}(\mathcal{D}^{q/2}\circ D^{p/2}\phi)(x)$$

d) p：奇数，q：偶数のとき

$$\mathcal{S}_{p,q}^{-1}\phi(x) = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{(p+q+1)/2}(\mathcal{S}_{1,0}\circ \mathcal{D}^{q/2}\circ D^{(p+1)/2}\phi)(x)$$

e) p：偶数，q：奇数のとき

$$\mathcal{S}_{p,q}^{-1}\phi(x) = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{(p+q+1)/2}(\tilde{\mathcal{S}}_{1,0}\circ \mathcal{D}^{(q+1)/2}\circ D^{p/2}\phi)(x)$$

$$= 2\left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{(p+q+1)/2}\int_x^\infty \left(y^{-1}\frac{d}{dy}\right)^{(q+1)/2}\left(\frac{d}{dy}\right)^{p/2}\phi(y)\,\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-x^2}}.$$

f) p,q：奇数のとき

$$\mathcal{S}_{p,q}^{-1}\phi(x) = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{(p+q)/2+1}(\tilde{\mathcal{S}}_{1,0}\circ \mathcal{S}_{1,0}\circ \mathcal{D}^{(q+1)/2}\circ D^{(p+1)/2}\phi)(x)$$

但しe)，f)の場合で，$\tilde{\mathcal{S}}_{1,0}$は

$$(\tilde{\mathcal{S}}_{1,0}\phi)(x) = 2^{-1/2}\#\circ \mathcal{S}_{1,0}\circ b\,\phi(x) = 2\int_x^\infty \phi(y)\,\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-x^2}}$$

で与えられるものである。

証明．(3.1)より $\mathcal{S}_{2,0}\phi(x) = 2\pi\int_x^\infty \phi(y)\,dy$. 従って $\mathcal{S}_{2,0}^{-1} = (-1/2\pi)\frac{d}{dx} = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)D$ を得る。$\left(\frac{-1}{2\pi}\right)D\circ \mathcal{S}_{p,0} = \mathcal{S}_{p-2,0}$（ここで(3.4)を用いた）より p が偶数のとき $\left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{p/2}D^{p/2} = \mathcal{S}_{p,0}^{-1}$ を得る。p が奇数のとき，(3.4)より $\mathcal{S}_{p,0}^{-1} = \mathcal{S}_{1,0}\circ \mathcal{S}_{p+1,0}^{-1}$ であり更に $(p+1)$ が偶数である

事に注意すれば $\mathcal{S}_{p,0}^{-1}=\left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{(p+1)/2}\mathcal{S}_{1,0}\circ D^{(p+1)/2}$ を得る。ii) の場合，まづ (3.6) は (3.5) の逆写像を考えれば明らかである。c)〜f) の証明は皆同様であるので後で使う e) を示す。この場合 (i) より $\mathcal{S}_{p,0}^{-1}=\left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{p/2}D^{p/2}$，$\mathcal{S}_{q,0}^{-1}=\left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{(q+1)/2}\mathcal{S}_{1,0}\circ D^{(q+1)/2}$ で，これを (3.6) に代入すれば $\mathcal{S}_{p,q}^{-1}=2^{q/2}(-1/2\pi)^{(p+q+1)/2}\#\circ\mathcal{S}_{1,0}\circ D^{(q+1)/2}\circ b\circ D^{p/2}$ を得る。

所で
$$\#\circ\mathcal{S}_{1,0}\circ D^{(q+1)/2}\circ b\circ D^{p/2}=\#\circ\mathcal{S}_{1,0}\circ b\circ\#\circ D^{(q+1)/2}\circ b\circ D^{p/2}$$
$$=2^{1/2}\tilde{\mathcal{S}}_{1,0}\circ\#\circ D^{(q+1)/2}\circ b\circ D^{p/2}$$
であり，更に $\#\circ D^{(q+1)/2}\circ b=2^{-(q+1)/2}\mathcal{D}^{(q+1)/2}$ に注意すれば $\#\circ\mathcal{S}_{1,0}\circ D^{(q+1)/2}\circ b\circ D^{p/2}=2^{-q/2}\tilde{\mathcal{S}}_{1,0}\circ\mathcal{D}^{(q+1)/2}\circ D^{p/2}$ となり従って e) を得る。

§4. ハリシュ・チャンドラ変換の逆変換.

初めに標題に記した対称空間の分類表を与えておく。

階数1 非コンパクト対称空間: M	$I(M)^0$	p, q, s
$(\mathrm{I})_0$ (2n+1)次元実双曲空間 $(n\geq 1)$	$SO_0(2n+1,1)$	$2n$, 0, n
$(\mathrm{I})_e$ 2n次元実双曲空間 $(n\geq 1)$	$SO_0(2n,1)$	$2n-1$, 0, $n-1/2$
(II) 2n次元複素双曲空間 $(n\geq 2)$	$SU(n,1)$	$2(n-1)$, 1, n
(III) 4n次元4元数双曲空間 $(n\geq 2)$	$Sp(n,1)$	$4(n-1)$, 3, $2n+1$
(IV) 16次元8元数双曲空間	$F_{4(-20)}$	8, 7, 11

我々は §2 で ハリシュ・チャンドラ変換 $\mathcal{H}: C_0^\infty(G/\!/K)\cong C_0^\infty(\mathbb{R})_e\to C_0^\infty(\mathbb{R})_e\cong C_0^\infty(G/\!/K)$ と，$\mathcal{S}=\mathcal{C}\circ\mathcal{H}\circ\mathcal{C}^{-1}: C_0^\infty[1,\infty)\to C_0^\infty[1,\infty)$ を導入した。この§では $\mathcal{H}$ 及び $\mathcal{S}$ の逆変換を前§の結果を用いて与えよう。$C^\infty(\mathbb{R})_e$ 上の作用素 $\mathcal{D}$ を

(4.1) $$\vartheta = (\mathrm{sh}\,t)^{-1}\frac{d}{dt} \qquad (\text{但、} \mathrm{sh}\,t = \sinh t)$$

で与える。このとき

(4.2) $$D = \frac{d}{dx} = \mathcal{C}\circ\vartheta\circ\mathcal{C}^{-1} = \mathcal{C}\circ(\mathrm{sh}\,t)^{-1}\frac{d}{dt}\circ\mathcal{C}^{-1}$$

に注意する。

定理 4.1. 変換 $\mathcal{S} = \mathcal{C}\circ\mathcal{H}\circ\mathcal{C}^{-1}$ 及び $\mathcal{H}$ の逆変換は夫々次で与えられる。但し (I)$_0$ ~ (IV) は上の分類表に対応している。

(I)$_0$ $$(\mathcal{S}^{-1}\phi)(x) = (-1/2\pi)^n\,\phi^{(n)}(x)$$

$$(\mathcal{H}^{-1}F)(t) = (-1/2\pi)^n(\vartheta^n F)(t)$$

(I)$_e$ $$(\mathcal{S}^{-1}\phi)(x) = 2^{1/2}(-1/2\pi)^n\int_x^\infty \phi^{(n)}(y)\,(y-x)^{-1/2}\,dy$$

$$(\mathcal{H}^{-1}F)(t) = 2^{1/2}(-1/2\pi)^n\int_t^\infty (\vartheta^n F)(\tau)\,(\mathrm{ch}\,\tau-\mathrm{ch}\,t)^{-1/2}\,\mathrm{sh}\,\tau\,d\tau$$

(II) $$(\mathcal{S}^{-1}\phi)(x) = 2(-1/2\pi)^n\int_x^\infty \phi^{(n)}(y)\,(y^2-x^2)^{-1/2}\,dy$$

$$(\mathcal{H}^{-1}F)(t) = 2(-1/2\pi)^n\int_t^\infty (\vartheta^n F)(\tau)\,(\mathrm{ch}^2\tau-\mathrm{ch}^2 t)^{-1/2}\,\mathrm{sh}\,\tau\,d\tau$$

(III) $$(\mathcal{S}^{-1}\phi)(x) = 2(-1/2\pi)^{2n}\int_x^\infty \{y\,\phi^{(2n)}(y)-\phi^{(2n-1)}(y)\}\,y^{-2}(y^2-x^2)^{-1/2}\,dy$$

$$(\mathcal{H}^{-1}F)(t) = 2(-1/2\pi)^{2n}\int_t^\infty \{\mathrm{ch}\,\tau\,(\vartheta^{2n}F)(\tau)-\vartheta^{2n-1}F(\tau)\}\,\mathrm{ch}^{-2}\tau\,(\mathrm{ch}^2\tau-\mathrm{ch}^2 t)^{-1/2}$$
$$\times\,\mathrm{sh}\,\tau\,d\tau$$

(IV) $$(\mathcal{S}^{-1}\phi)(x) = 2(-1/2\pi)^8\int_x^\infty \{y^3\phi^{(8)}(y)-6y^2\phi^{(7)}(y)+15y\,\phi^{(6)}(y)-15\phi^{(5)}(y)\}\,y^{-6}$$
$$\times\,(y^2-x^2)^{-1/2}\,dy$$

$$(\mathcal{H}^{-1}F)(t) = 2(-1/2\pi)^8\int_t^\infty \{(\mathrm{ch}\,\tau)^3\vartheta^8F(\tau)-6\,\mathrm{ch}^2\tau\,\vartheta^7F(\tau)+15\,\mathrm{ch}\,\tau\,\vartheta^6F(\tau)-15\vartheta^5F(\tau)\}$$
$$\times\,\mathrm{ch}^{-6}\tau\,(\mathrm{ch}^2\tau-\mathrm{ch}^2 t)^{-1/2}\,\mathrm{sh}\,\tau\,d\tau$$

証明. (2.12), (2.13) より分類表に与えた p, q をとれば, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{p,q}$ に他ならず 従って定理 3.2 が適用できる。(I)$_0$, (I)$_e$ は

定理3.2 (i)より明らかである。(II), (III), (IV)については 分類表より p:偶数, q:奇数であり従って定理3.2の ii) e)が適用できる。更に $q = 1, 3, 7$ に注意すればこの場合の $\mathcal{S}^{-1}$ も容易に求められる。(4.2)と $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}^{-1}$ の定義を使えば $\mathcal{H}^{-1}$ が上記の如く与えられる事は $\mathcal{S}^{-1}$ の公式より明らかである。

§5 応用.

最初に セルバーグ変換は次のようにも書ける事に注意する。

$$
(5.1)\begin{cases}
\mathcal{S}_{p,0}\phi\ (x) = 2^{p/2-1}\omega_p\, x^{p/2}\displaystyle\int_0^1 \phi(xu^{-1})\, u^{-p/2-1}(1-u)^{p/2-1}\,du, \\
\mathcal{S}_{p,q}\phi\ (x) = 2^{p/2-1}\omega_p\omega_q\, 2^{-1} x^{p/2+q}\displaystyle\int_0^1\!\!\int_0^1 \phi(xu^{-1}v^{-1/2})\, u^{-(p/2+q)+1}(1-u)^{p/2-1} v^{-q/2-1}(1-v)^{q/2-1}\,du\,dv.
\end{cases}
$$

$s \in \mathbb{C}$ として $f_s \in C^\infty(G/\!/K)$ を

$$
(5.2)\qquad f_s(ka_tk') = (\mathrm{ch}\,t)^{-(s+\rho)}
$$

で定義する。このとき $\phi_s(x) = (\mathcal{C}f_s)(x) = x^{-(s+\rho)}$ である。

命題5.1. 関数 f_s に対し次が成立つ.

i) $\Delta f_s = (s^2-\rho^2)f_s - (s+\rho)(s+p/2+1)f_{s+2}$

ii) $\mathrm{Re}(s) > 0$ のとき, $\mathcal{H}f_s$ は収束して それは

$$
(\mathcal{H}f_s)(t) = \frac{\pi^{d/2}\, 2^{1-s}\,\Gamma(s)}{\Gamma((s+\rho)/2)\,\Gamma((s+p/2+1)/2)}(\mathrm{ch}\,t)^{-s}
$$

で与えられる。

iii) $\mathrm{Re}(s) > 0$ かつ $\mathrm{Re}(s \pm i\nu) > 0$ のとき, f_s の球フーリエ変換は存在して

$$
\hat{f}_s(\nu) = \frac{\pi^{d/2}\,\Gamma((s+i\nu)/2)\,\Gamma((s-i\nu)/2)}{\Gamma((s+\rho)/2)\,\Gamma((s+p/2+1)/2)}
$$

で与えられる。

証明. (i) $\delta(\Delta) = d^2/dt^2 + (D'(t)/D(t))\frac{d}{dt} = d^2/dt^2 + (p \coth t + 2q \coth 2t)\frac{d}{dt}$ とおけば $f \in C^\infty(G/\!/K)$ に対し $(\Delta f)/_A = \delta(\Delta)(f/_A)$ が成立つ。これより (i) は容易である。(ii) は $\mathcal{H} = C^{-1}\circ\delta\circ C$ より $\delta\phi_s$ を求める事に帰着する。$\delta\phi_s$ は (5.1) を用いれば容易に計算される。(iii) は $Re(s \pm i\nu) > 0$ のとき

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (ch\, t)^{-s} e^{-i\nu t} dt = \Gamma((s+i\nu)/2)\Gamma((s-i\nu)/2)\, 2^{s-1}\Gamma(s)^{-1}$$

が成立つ事及び $\hat{f}_s(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{H}f_s)(t)\, e^{-i\nu t} dt$ に注意すれば容易。

(注意) この関数 f_s は対称空間上の調和解析に於いて重要な役割を果す関数である (cf. [1], [6])。尚 f_s は $Re(s) > \rho$ のとき対称空間上のシュワルツ空間 $\mathcal{C}^1(G/\!/K)$ に属す事を注意しておく。

$N \geq [d/2]+1$ (整数), $\varepsilon > 0$ とし $D_\varepsilon = \{\nu \in \mathbb{C}\, ;\, |Im(\nu)| < \rho + \varepsilon\}$ とおく。$\mathcal{A}^{N,\varepsilon} = \{h : D_\varepsilon \text{ 上正則}, h(-\nu) = h(\nu), \exists M > 0\ \ |h(\nu)| \leqq M(1+|\nu|)^{-N-\varepsilon}\}$ とおく。次の命題はセルバーグ [8] の拡張である。

命題 5.2. $h \in \mathcal{A}^{N,\varepsilon}$ に対しその逆フーリエ変換 f が存在して f は $(N-[d/2]-1)$ 階連続微分可能 (即ち $f \in C^{N-[d/2]-1}(G/\!/K)$) で,

$$|f^{(j)}(a_t)| \leqq C_j (ch\, t)^{-(2\rho+\varepsilon/2+j)} \qquad (0 \leq j \leq N-[d/2]-1)$$

を満たす。

証明の概略. $F(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\nu) e^{i\nu t} d\nu$ とするとき, $F \in C^{N-1}(\mathbb{R})_e$ かつ $|F^{(k)}(t)| \leq {}^{\exists}M_k (ch\, t)^{-(\rho+\varepsilon/2)}$ $(0 \leq k < N-1)$ が成立つ。$\phi = CF$ と

おけば $\phi\in C^{N-1}[1,\infty)$ かつ $|\phi^{(k)}(x)|\le{}^{\exists}B_k\,x^{-(\rho+\varepsilon/2+k)}$ $(0\le k\le N-1)$ が言える。これを用いて定理4.1で与えた $\delta^{-1}\phi$ の式を各場合に応じて評価すればよい。

最後に局所対称空間のラプラス作用素のスペクトルに関連したあるディリクレイ型級数とその解析接続について述べる。これは Huber [6] の結果の拡張である (cf. [2])。

Γ を G の離散部分群で $\Gamma\backslash G$ はコンパクトとし，更に Γ は G/K に固定点なしに働くものとする。このとき $\Gamma\backslash G/K$ は負断面曲率をもつ局所対称空間と呼ばれる。さて f_s $(s\in\mathbb{C})$ を (5.2) で与えられる $C^\infty(G/\!/K)$ の元とし 級数 $\sum_{\gamma\in\Gamma}f_s(x^{-1}\gamma y)$ $(x,y\in G)$ を考える。

命題 5.3. (i) $x,y\in G$, $\mathrm{Re}(s)>\rho$ に対し級数 $\sum_{\gamma\in\Gamma}f_s(x^{-1}\gamma y)$ は広義一様絶対収束する。以下その和を $K(s:x,y)$ と書く。

(ii) $K(s:x,y)$ は $\mathrm{Re}(s)>\rho$ で正則かつ $(x,y)\in G\times G$ に関し C^∞-関数で

$$K(s:\gamma_1xk_1,\ \gamma_2yk_2)=K(s:x,y)\qquad(\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma,\ k_1,k_2\in K)$$

を満たし 従って $\Gamma\backslash G/K\times\Gamma\backslash G/K$ 上の C^∞-関数とみなせる。

この命題の証明には 次の2つの補題が用いられる。

補題 5.4. $r>0$, $x,y\in G$ に対し Γ の部分集合 $\Gamma(r:x,y)$ を $\Gamma(r:x,y)=\{\gamma\in\Gamma;\ d(\bar{x},\gamma\bar{y})\le r\}$ で定め，その元の個数を $N(r:x,y)$ で表わす。このとき r,x,y に依らぬ定数 $C_0>0$ が存在して，

$$N(r:x,y)\le C_0\,(\mathrm{ch}\,r)^{2\rho}.$$

証明．$r_0 = 2^{-1}\inf\{d(\bar{x},\gamma\bar{x}) : x\in G,\ \gamma\in\Gamma\setminus\{e\}\}$ とするとき $r_0>0$ が成立つ．r_0 は $\Gamma\backslash G/K$ の単射半径と呼ばれる。r_0 の定義より $y\in G$ を任意に固定するとき測地球の族 $\{B_{r_0}(\overline{\gamma y}) : \gamma\in\Gamma\}$ は互いに交りをもたぬ。$\gamma\in\Gamma(r : x,y)$ なら $B_{r_0}(\overline{\gamma y})\subset B_{r+r_0}(\bar{x})$ だから $\sum_{\gamma\in\Gamma(r:x,y)} vol.(B_{r_0}(\overline{\gamma y}))\leqq vol(B_{r+r_0}(\bar{x}))$ が成立つ。所で $t>0$ と $z\in G$ に対し，$b_0>0$ がそれらと無関係に存在して，$vol(B_t(\bar{z})) = vol(B_t(\bar{e}))\leqq b_0(\mathrm{ch}\,t)^{2\rho}$ である事に注意すれば 上の不等式より $N(r : x,y)\,vol(B_{r_0}(\bar{e}))\leqq b_0(\mathrm{ch}(r+r_0))^{2\rho}$ であり従って ${}^{\exists}C_0>0$ が存在して $N(r:x,y)\leqq C_0(\mathrm{ch}\,r)^{2\rho}$ が言える。

補題 5.5．$x,y\in G$，$0\leqq r_1\leqq r_2$ とする。$\sigma>\rho$ なら

$$\sum_{\gamma\in\Gamma,\ r_1\leqq d(\bar{x},\overline{\gamma y})\leqq r_2} f_\sigma(x^{-1}\gamma y) < C_0(1+2\rho/(\sigma-\rho))(\mathrm{ch}\,r_1)^{-(\sigma-\rho)}$$

が成立つ。従って特に $r_1=0$，$r_2=r$ とすれば次が成立つ：

$$\sum_{\gamma\in\Gamma(r:x,y)} f_\sigma(x^{-1}\gamma y) < C_0(1+2\rho/(\sigma-\rho)).$$

証明．$N(r:x,y)$ の定義より

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma\in\Gamma:\ r_1\leqq d(\bar{x},\overline{\gamma y})\leqq r_2} f_\sigma(x^{-1}\gamma y) &= N(r_1:x,y)(\mathrm{ch}\,r_1)^{-(\sigma+\rho)}+\int_{r_1}^{r_2}(\mathrm{ch}\,\tau)^{-(\sigma+\rho)}dN(\tau:x,y)\\ &= N(r_2:x,y)(\mathrm{ch}\,r_2)^{-(\sigma+\rho)}+(\sigma+\rho)\int_{r_1}^{r_2}N(\tau:x,y)(\mathrm{ch}\,\tau)^{-(\sigma+\rho)-1}\mathrm{sh}\,\tau\,d\tau.\end{aligned}$$

これに補題 5.4 の評価を用いて

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma\in\Gamma:\ r_1\leqq d(\bar{x},\overline{\gamma y})\leqq r_2} f_\sigma(x^{-1}\gamma y) &\leqq C_0(\mathrm{ch}\,r_2)^{-(\sigma-\rho)}+C_0(\sigma+\rho)\int_{r_1}^{r_2}(\mathrm{ch}\,\tau)^{-(\sigma-\rho)-1}\mathrm{sh}\,\tau\,d\tau\\ &= C_0\left(1+\frac{2\rho}{\sigma-\rho}\right)(\mathrm{ch}\,r_1)^{-(\sigma-\rho)}-C_0\frac{2\rho}{\sigma-\rho}(\mathrm{ch}\,r_2)^{-(\sigma-\rho)}<C_0\left(1+\frac{2\rho}{\sigma-\rho}\right)(\mathrm{ch}\,r_1)^{-(\sigma-\rho)}.\end{aligned}$$

命題 5.3 の証明．$x_0\in G$，$r>0$ を任意にとり固定する。$\bar{x}$ $\bar{y}\in B_r(\bar{x}_0)$，$\sigma=\mathrm{Re}(s)>\rho$ に対し $\sum_{\gamma\in\Gamma} f_\sigma(x^{-1}\gamma y)$ が収束する事を示せば

よい。先ず次は明らか:(イ) ${}^{\forall}\varepsilon>0$ に対し ${}^{\exists}r_\varepsilon>0$ が存在し, $C_0(1+\frac{2\rho}{\sigma-\rho})(\mathrm{ch}\, r_\varepsilon)^{-(\sigma-\rho)}<\varepsilon$ とできる。Γ は離散的だから Γ の元に番号をつけて $\Gamma=\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots\}$ とする。Γ は G/K に真性不連続に作用するから
(ロ) ${}^{\forall}\varepsilon>0$ に対し ${}^{\exists}$番号 j_0 があって $j>j_0$ ならば $\gamma_j\cdot B_r(\bar{x}_0)\cap B_{r+r_\varepsilon}(\bar{x}_0)=\emptyset$.
$\bar{x},\bar{y}\in B_r(\bar{x}_0)$ とすると (ハ) $d(\bar{x},\gamma_j\bar{y})>r_\varepsilon$ $(j>j_0)$ が成立つ。
(ハ)より $n\geq m>j_0$ とするとき補題5.5を用いて

$$\sum_{j=m}^{n} f_\sigma(x^{-1}\gamma_j y)\leq\sum_{\gamma\in\Gamma,\ r_\varepsilon<d(\bar{x},\gamma\bar{y})\leq{}^{\exists}r_2} f_\sigma(x^{-1}\gamma y)<C_0(1+\frac{2\rho}{\sigma-\rho})(\mathrm{ch}\, r_\varepsilon)^{-(\sigma-\rho)}<\varepsilon$$

を得る。これより $\sum_{\gamma\in\Gamma} f_\sigma(x^{-1}\gamma y)$ が収束する事がわかる。他の主張の証明は省略する。

G/K 上のラプラス作用素 Δ は G-不変だから $\Gamma\backslash G/K$ 上のラプラス作用素 Δ_Γ を自然に誘導する。このとき $-\Delta_\Gamma$ は $L^2(\Gamma\backslash G/K)$ 上の正値自己共役作用素に拡張され, $\Gamma\backslash G/K$ がコンパクトだからその固有値は離散的である。今それらを $0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots$ とし対応する固有空間を $L^2(\Gamma\backslash G/K)^{\lambda_n}$ $(n\geq 0)$, その次元を m_n と書く事にする。各固有空間 $L^2(\Gamma\backslash G/K)^{\lambda_n}$ の正規直交基底を $\{f_{\lambda_n,k}:1\leq k\leq m_n\}$ としよう。このとき (イ) 各 $f_{\lambda_n,k}$ は左 Γ-不変,右 K-不変な G 上の C^∞-関数. (ロ) $\Delta f_{\lambda_n,k}+\lambda_n f_{\lambda_n,k}=0$ $(1\leq k\leq m_n)$ である。特に $m_0=1$, $f_{\lambda_0,1}=\mathrm{vol}(\Gamma\backslash G/K)^{-1/2}$ (定数関数) である。

$-\Delta_\Gamma$ のスペクトル分解は表現論の立場からは次のように解釈できる。$(R_\Gamma, L^2(\Gamma\backslash G))$ を G の $L^2(\Gamma\backslash G)$ への右正則表現, $\hat{G}$ を G の既約ユニタリ表現の同値類の集合とすると $L^2(\Gamma\backslash G)$ は $L^2(\Gamma\backslash G)=$

$\bigoplus_{\pi\in\hat{G}} m(\pi)H_\pi$ と既約分解される。ここに H_π は $L^2(\Gamma\backslash G)$ の閉不変部分空間で $R_\Gamma|H_\pi$ は π と同値であり重複度 $m(\pi)$ は有限である。$\hat{G}^K=\{(\pi,V_\pi)\in\hat{G} : V_\pi^K\neq(0)\}$ とするとき $(\pi,V_\pi)\in\hat{G}^K$ に対し $\dim V_\pi^K=1$ が知られている（但 $V_\pi^K=\{v\in V_\pi : \pi(k)v=v\ \forall k\in K\}$）. 従って $L^2(\Gamma\backslash G/K)=L^2(\Gamma\backslash G)^K=\bigoplus_{\pi\in\hat{G}^K} m(\pi)H_\pi^K$ が成立つ。Δ_p は H_π^K を不変にし, $\dim H_\pi^K=1$ よりそれは Δ_p の固有空間でその固有値は $\pi(\Delta)$ に等しい。所で G は実階数 1 だから $\hat{G}^K=\{\pi_{i\nu} : 0\le i\nu\le\rho$ 又は $i\nu\in\sqrt{-1}\mathbb{R}^+\}$ である。ここに $\pi_{i\nu}$ は G のクラス 1 主系列表現と呼ばれるものであるが重要な事は $\pi_{i\nu}(\Delta)=-(\nu^2+\rho^2)$ が成立つ事である。さて $-\Delta_p$ の各固有値 λ_n に対し $\nu_n\in\mathbb{C}$ を

$$\nu_n=\sqrt{\lambda_n-\rho^2}\quad(\lambda_n>\rho^2 \text{ のとき}),\ -i\sqrt{\rho^2-\lambda_n}\quad(\rho^2\ge\lambda_n\ge 0 \text{ のとき})$$

で定める。このとき $0\le\lambda_n\le\rho^2\iff 0\le i\nu_n\le\rho$, $\lambda_n>\rho^2\iff i\nu_n\in\sqrt{-1}\mathbb{R}^+$ に注意する。更に上に述べた事から

$$L^2(\Gamma\backslash G/K)^{\lambda_n}=m(\pi_{i\nu_n})H^K_{\pi_{i\nu_n}},\quad m_n=m(\pi_{i\nu_n})\quad(n\ge 0)$$

が成立つ事が分る。以下 $x,y\in G$ に対し

$$K_n(x,y)=\sum_{k=1}^{m_n} f_{\lambda_n,k}(x)f_{\lambda_n,k}(y)\qquad(n\ge 0)$$

とおく。次はセルバーグの "Pre-trace formula" の一形であるが;

定理 5.6. $Re(s)>\rho$ とする。$K(s:x,y)=\sum_{\gamma\in\Gamma} f_s(x^{-1}\gamma y)$ は次の形に表わせる：但し $h(s,\nu)=\Gamma((s+i\nu)/2)\Gamma((s-i\nu)/2)$ とおいた。

$$\begin{aligned}K(s:x,y)&=\sum_{n\ge 0}\hat{f}_s(\nu_n)K_n(x,y)\\&=\pi^{d/2}\Gamma((s+\rho)/2)^{-1}\Gamma(((s+\rho/2+1)/2)^{-1}\sum_{n\ge 0}h(s,\nu_n)K_n(x,y).\end{aligned}$$

証明. $\mathrm{Re}(s)=\sigma>\rho$ とすると $|K(s;x,y)|\le K(\sigma;x,y)=\sum_{\gamma\in\Gamma} f_\sigma(x^{-1}\gamma y)$ であるが 補題5.5より $\sum_{\gamma\in\Gamma} f_\sigma(x^{-1}\gamma y) < C_0\left(1+\frac{2\rho}{\sigma-\rho}\right)$ に注意すると $\int_{\Gamma\backslash G/K}|K(s:x,y)|^2dy < C_0^2\,(1+2\rho/(\sigma-\rho))^2\,\mathrm{vol}(\Gamma\backslash G/K)<\infty$。故に $\mathrm{Re}(s)>\rho$ のとき $K(s;x,y)$ は y に関し $L^2(\Gamma\backslash G/K)$ に属す。x に関しても同様。

$\{f_{\lambda_n,k} : 1\le k\le m_n,\ n\ge 0\}$ は $L^2(\Gamma\backslash G/K)$ の正規底であるから

$$a_{\lambda_n,k}(s:x)=\int_{\Gamma\backslash G/K}K(s:x,y)\,f_{\lambda_n,k}(y)\,dy$$

とおくと

$$K(s:x,y)=\sum_{n\ge 0}\sum_{k=1}^{m_n} a_{\lambda_n,k}(s:x)\,f_{\lambda_n,k}(y)$$

が成立つ。所で

$$a_{\lambda_n,k}(s:x)=\int_{\Gamma\backslash G/K}\sum_{\gamma\in\Gamma} f_s(x^{-1}\gamma y)\,f_{\lambda_n,k}(y)\,dy=\int_G f_s(x^{-1}y)\,f_{\lambda_n,k}(y)\,dy$$
$$=\int_G f_s(y)\,(R_\Gamma(y)f_{\lambda_n,k})(x)\,dy=:R_\Gamma(f_s)f_{\lambda_n,k}(x).$$

$f_{\lambda_n,k}\in H^K_{\pi_{i\nu_n}}$ より, $a_{\lambda_n,k}(s:x)\in H_{\pi_{i\nu_n}}$ が言えるが更に $a_{\lambda_n,k}(s:x)$ は右 K-不変が成立つから $a_{\lambda_n,k}(s:x)\in H^K_{\pi_{i\nu_n}}$ であり, $\dim H^K_{\pi_{i\nu_n}}=1$ より $a_{\lambda_n,k}(s:x)=a_{\lambda_n,k}(s)\,f_{\lambda_n,k}(x)$ と書ける。所で

$$a_{\lambda_n,k}(s)=(a_{\lambda_n,k}(s:\cdot),f_{\lambda_n,k})_{L^2(\Gamma\backslash G)}=(R_\Gamma(f_s)f_{\lambda_n,k},\,f_{\lambda_n,k})_{L^2(\Gamma\backslash G)}$$

であり更に $R_\Gamma|H_{\pi_{i\nu_n}}\cong\pi_{i\nu_n}$, $f_{\lambda_n,k}\in H^K_{\pi_{i\nu_n}}$ に注意すれば $a_{\lambda_n,k}(s)=\int_G f_s(y)\,\varphi_{\nu_n}(y)\,dy=\hat{f}_s(\nu_n)$ $(1\le k\le m_n)$ を得る。以上より

$$K(s:x,y)=\sum_{n\ge 0}\sum_{k=1}^{m_n}\hat{f}_s(\nu_n)\,f_{\lambda_n,k}(x)\,f_{\lambda_n,k}(y)=\sum_{n\ge 0}\hat{f}_s(\nu_n)\,K_n(x,y)。$$

以下では定理5.6の右辺の級数 $\sum_{n\ge 0}\hat{f}_s(\nu_n)K_n(x,y)$ が全 s-平面に有理型関数として解析接続できる事を示す。$h(s,\nu_0)=\Gamma((s+\rho)/2)$

$\times\Gamma((s-\rho)/2)$ だから級数 $\sum_{n\geq 1} h(s,\nu_n)K_n(x,y)$ を考察すれば十分である。

定理5.7. (i) 級数 $\sum_{n\geq 1} h(s,\nu_n)K_n(x,y)$ は $Re(s)>\rho$ で広義一様絶対収束し 更に全平面に有理型に解析接続される。又その極は $P=\{i\nu_n-2j,\ -i\nu_n-2k\ ;\ n\geq 1,\ j,k\geq 0\}$ に在る。

(ii) 級数 $\sum_{n\geq 1} m_n h(s,\nu_n)$ も全s-平面に有理型に解析接続されその極はPにある。

この定理は次の3つの補題のもとに示される。

補題5.8. $s=\sigma+i\tau\in\mathbb{C}$ で $\rho+2\leq\sigma\leq\sigma_0$ を満たすとき $C_1>0$ が存在して

$$\sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{m_n}\left|h(s,\nu_n)f_{\lambda_n,k}(x)\right|^2\leq C_1 e(\sigma_0)^2$$

が成立つ。ここに $e(\sigma_0)=\Gamma((\sigma_0+\rho)/2)\Gamma((\sigma_0+\rho/2+1)/2)$ とおいた。

証明. $K(s:x,y)=\pi^{d/2}\Gamma((s+\rho)/2)^{-1}\Gamma((s+\rho/2+1)/2)^{-1}\sum_{n\geq 0}\sum_{k=1}^{m_n}h(s,\nu_n)f_{\lambda_n,k}(x)f_{\lambda_n,k}(y)$ は $Re(s)>\rho$ のときyに関し $L^2(\Gamma\backslash G/K)$ に属していた。Besselの不等式より

$$\pi^d\left|\Gamma((s+\rho)/2)\Gamma((s+\rho/2+1)/2)\right|^{-2}\sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{m_n}\left|h(s,\nu_n)f_{\lambda_n,k}(x)\right|^2\leq\int_{\Gamma\backslash G/K}\left|K(s:x,y)\right|^2dy\ .$$

所で補題5.5より $|K(s:x,y)|\leq C_0\left(1+\frac{2\rho}{\sigma-\rho}\right)$ であった。これを用いて

$$\sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{m_n}\left|h(s,\nu_n)f_{\lambda_n,k}(x)\right|^2\leq\pi^{-d}\left|\Gamma((s+\rho)/2)\Gamma((s+\rho/2+1)/2)\right|^2C_0^2\left(1+\frac{2\rho}{\sigma-\rho}\right)^2 vol(\Gamma\backslash G/K)$$

$\sigma=Re(s)\geqq\rho+2$ より Γ-関数は単調増加, 従って $\left|\Gamma((s+\rho)/2)\Gamma((s+\rho/2+1)/2)\right|^2\leq e(\sigma_0)^2$ //

さて Minakushisundaram-Pleijel [7] によれば $\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{m_n}f_{\lambda_n,k}(x)^2\right)\lambda_n^{-s}$ 及び $\sum_{n\geq 1}m_n\lambda_n^{-s}$ は $Re(s)>d/2$ で絶対一様収束する事が知られている。以下Nを $N>Max\{(2+\sqrt{2})[d/4],\ \rho+2\}$ をみたす整数とし $Q_N=\{s=\sigma+i\tau\in\mathbb{C}\ ;\ |\sigma|\leq N,\ |\tau|\leq N\}$ とおく。

補題 5.9. $s\in Q_N$, $\nu\geq 2N$ ならば, N にのみ依る定数 $A_N>0$ が存在して次が成立つ：

$$|h(s,\nu)|\leq A_N\,\nu^{-2([d/4]+1)}\,|h(s+2N,\nu)|.$$

証明. 紙数の都合で省く。

補題 5.10. $N>\mathrm{Max}\{(2+\sqrt{2})[d/4],\ \rho+2\}$ なる整数とし, 更に $n_0=\mathrm{Max}\{n\,;\ \nu_n<2N\}$ とおく。

(i) 各 $(s,x,y)\in Q_N\times G\times G$, 各 $l\geq m>n_0$ なる整数に対し, $C_2>0$ が存在して

$$\sum_{n=m}^{l}\sum_{k=1}^{m_n}|h(s,\nu_n)f_{\lambda_n,k}(x)f_{\lambda_n,k}(y)|\leq C_2A_N\,e(3N)\Big\{\sum_{n=m}^{l}K_n(y,y)\,\nu_n^{-4([d/4]+1)}\Big\}^{1/2}.$$

(ii) 各 $s\in Q_N$, 各 $l\geq m>n_0$ なる整数に対し $C_3>0$ が存在して,

$$\sum_{n=m}^{l}|m_n h(s,\nu_n)|\leq C_3A_N\,e(3N)\Big(\sum_{n=m}^{l}m_n\,\nu_n^{-4([d/4]+1)}\Big)^{1/2}.$$

証明. $l\geq m>n_0$ より $l\geq n\geq m$ なる n に対し $\nu_n\geq 2N$ に注意すると前補題より

$$\sum_{n=m}^{l}\sum_{k=1}^{m_n}|h(s,\nu_n)f_{\lambda_n,k}(x)f_{\lambda_n,k}(y)|\leq A_N\sum_{n=m}^{l}\sum_{k=1}^{m_n}|h(s+2N,\nu_n)f_{\lambda_n,k}(x)|\,|f_{\lambda_n,k}(y)\nu_n^{-2([d/4]+1)}|$$

これに Cauchy-Schwarz の不等式を用いて

$$\leqq A_N\Big\{\sum_{n=m}^{l}\sum_{k=1}^{m_n}|h(s+2N,\nu_n)f_{\lambda_n,k}(x)|^2\Big\}^{1/2}\Big\{\sum_{n=m}^{l}\sum_{k=1}^{m_n}f_{\lambda_n,k}^2(y)\,\nu_n^{-4([d/4]+1)}\Big\}^{1/2}.$$

$s\in Q_N$ より, $\rho+2\leq N\leq \mathrm{Re}(s+2N)\leq 3N$ に注意すれば補題 5.8 が使えて　上式 $\leqq C_1^{1/2}A_N\,e(3N)\Big\{\sum_{n=m}^{l}K_n(y,y)\,\nu_n^{-4([d/4]+1)}\Big\}^{1/2}$.

(ii) は (i) で $x=y$ とおいて両辺を $\Gamma\backslash G/K$ 上で積分する事により得られる。

系 5.11. 補題 5.10 と同じ仮定のもとに

$\sum_{n\geq n_0} h(s,\nu_n)K_n(x,y)$ および $\sum_{n\geq n_0} m_n h(s,\nu_n)$ は広義一様絶対収束する。

証明．前に注意した Minakushisundaram -Pleijel の結果より従う。

以上の結果を用いて定理5.7が示せる。

定理5.7の証明．先ず $h(s,\nu)=\Gamma((s+i\nu)/2)\Gamma((s-i\nu)/2)$ は s の有理型関数でその極は $s=i\nu-2j$, $-i\nu-2k$ $(j=0,1,2,\cdots,\ k=0,1,2,\cdots)$ にある事に注意する。N, Q_N, n_0 を上述のように選ぶと上の主張より $\sum_{n\geq n_0} h(s,\nu_n)K_n(x,y)$ は $s\in Q_N$ で正則であり，一方 $\sum_{n_0\geq n\geq 1} h(s,\nu_n)\times K_n(x,y)$ は $s\in Q_N$ で高々有限個の極をもつ有理型関数である。従って $\sum_{n\geq 1} h(s,\nu_n)K_n(x,y)$ は Q_N で有理型でその極は $h(s,\nu_n)$ $(1\leq n\leq n_0)$ の Q_N 内の極に一致する。所で N はいくらでも大きくとれるから これより $\sum_{n\geq 1} h(s,\nu_n)K_n(x,y)$ は全 s-平面で有理型でありその極は P に在ることが言える。$\sum_{n\geq 1} m_n h(s,\nu_n)$ についても同様である。//

命題5.2と5.3より $h\in\mathcal{A}^{N,\varepsilon}$ の球フーリエ逆変換を f とすれば $\sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma y)$ は広義一様絶対収束し 更に定理5.6の証明と同様にして

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma y)=\sum_{n\geq 0} h(\nu_n)K_n(x,y)$$

が成立つ事を注意しておく。

なお筆者は研究集会に於いて局所対称空間における格子点分布に関する評価を与えたが 後に浦川氏より Günther の仕

事[3]を教えて頂いた。筆者にとって残念な事に彼の結果の方がより秀れていた事を報告しておく。ここで改めて浦川氏に感謝する。参考文献は書き挙げれば際限ないので文中に引用したものに限る事を許して頂きたい。

[1] L. Berard-Bergery, Seminaire Bourbaki 24 1971-72 Exp. 406.

[2] R. Gangolli, J. Differential Geometry 12 (1977).

[3]. P. Günther, Math. Nachr. 94 (1980).

[4] Harish-Chandra, Amer. J. Math. 80 (1958).

[5] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces.

[6] H. Huber, Math. Ann. 138 (1959).

[7] Minakushisundaram-Pleijel, Canad. J. Math. 1 (1949).

[8] A. Selberg, J. Indian Math. Soc. 20 (1956).

[9] R. Takahashi, Bull. Soc. Math. France 91 (1963).