数理解析研究所講究録
第481巻 1983年 178-187

無限次元ユニタリ群のPeter-Weylの定理について

福岡教育大　　櫻井　孝俊
Sakurai Takatoshi

コンパクト．リーマン多様体M上の複素数値 C^∞ 関数のなす空間を $C^\infty(M)$、複素数値2乗可積分関数のなすヒルベルト空間を $L^2(M)$、$C^\infty(M)$ の双対空間を $C^\infty(M)^*$ で表わすことにする。以下では、E, H, E^* により、それぞれ $C^\infty(M)$, $L^2(M)$, $C^\infty(M)^*$ を表わすことにする。Eの線型変換 g で、Eの同相写像であり、Hのノルムを変えない（すなわち、$\|g\xi\| = \|\xi\|$, $\xi \in E$）もの全体からなる群を $U(E)$ で表わし、無限次元ユニタリ群と呼ぶ。さて、積多様体 $M \times M$ 上の複素数値関数空間 $C^\infty(M\times M) \cong E\hat{\otimes}E$, $L^2(M\times M) \cong H\bar{\otimes}H$, $C^\infty(M\times M)^* \cong (E\hat{\otimes}E)^*$（$E\hat{\otimes}E$ は $E\otimes E$ の完備化、$H\bar{\otimes}H$ は $H\otimes H$ の完備化を表わす）を考えよう。$\Omega = (E\hat{\otimes}E)^*$ とおく。$U(E)$ の元 g に対して、$E\hat{\otimes}E$ の線型写像 L_g, R_g を、

$$L_g(\xi\otimes\eta) = g\xi\otimes\eta, \quad R_g(\xi\otimes\eta) = \xi\otimes g\eta$$

により定義し、g の Ω への作用 gx, xg, を

$$\langle gz, \zeta\rangle = \langle z, L_{g^{-1}}\zeta\rangle, \quad \langle zg, \zeta\rangle = \langle z, R_g \zeta\rangle$$

により定義する。また、gは、

$$\langle g, \xi\otimes\eta\rangle = (\xi, g\eta)$$

と定義することにより、$E\hat{\otimes}E$ 上の線型変換と見なすことができる。このことより、$U(E)$をΩの部分集合と思うことができる。

Gel'fand triple

$$E\hat{\otimes}E \subset H\otimes H \subset (E\hat{\otimes}E)^*$$

をつくれば、Bochner-Minlosの定理によりΩ上に複素ガウス測度νで、

$$e^{-\|\zeta\|^2} = \int_{\Omega} e^{i\{\langle z,\zeta\rangle + \overline{\langle z,\zeta\rangle}\}} d\nu(z) \quad \zeta\in E\hat{\otimes}E$$

を満足するものが存在する。明らかに、測度νは、$U(E)$の左、右からの作用に対して不変ゆえ、$U(E)$の元gに対し、

$$(\pi_L(g)f)(z) = f(g^{-1}z), \quad (\pi_R(g)f)(z) = f(zg) \quad f\in L^2(\Omega,\nu)$$

と定義することにより、$U(E)$のユニタリ表現$(\pi_L, L^2(\Omega,\nu))$, $(\pi_R, L^2(\Omega,\nu))$を得る。さらに、$U(E)\times U(E)$の元(g_1, g_2)に対し

$$(\omega_*(g_1,g_2)f)(z) = f(g_1^{-1} z g_2) \quad f\in L^2(\Omega,\nu)$$

により、$U(E)\times U(E)$のユニタリ表現$(\omega_*, L^2(\Omega,\nu))$を得る。このω$_*$の既約分解(定理2)を与えることが目標である。

M上の実数値 C^∞ 関数からなる、Hの正規直交基底を、$\{\xi_1, \xi_2, \cdots\}$ とすれば、$\{\xi_i \otimes \xi_j ; i, j \in N\}$ により、$H \otimes H$ の正規直交基底が得られる。Nは自然数全体を表わす。そこで、複素エルミート多項式

$$H_{p,q}(t,\bar{t}) = (-1)^{p+q} e^{t\bar{t}} \frac{\partial^{p+q}}{\partial \bar{t}^p \partial t^q} e^{t\bar{t}} \quad (t \in \mathbb{C})$$

を用いて、$\mathcal{B}_{p,q}$ を次で定義する。

$$\mathcal{B}_{p,q} = \Big\{ \prod_{i,j=1}^{\infty} (p_{ij}!\, q_{ij}!)^{-\frac{1}{2}} H_{p_{ij}, q_{ij}}(\langle z, \xi_i \otimes \xi_j \rangle, \langle \bar{z}, \xi_i \otimes \xi_j \rangle) ;$$
$$\sum_{i,j=1}^{\infty} p_{ij} = p,\ \sum_{i,j=1}^{\infty} q_{ij} = q,\ p_{ij}, q_{ij} \geqq 0 \Big\}$$

このとき、$\bigcup_{n=0}^{\infty} \big(\bigcup_{p+q=n} \mathcal{B}_{p,q} \big)$ は、$L^2(\Omega, \nu)$ の正規直交基底となる。$\mathcal{H}_{p,q}$ を $\mathcal{B}_{p,q}$ により張られる閉部分空間とおけば、$L^2(\Omega, \nu)$ の Wiener-Itô 分解

$$L^2(\Omega, \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \sum_{p+q=n} \oplus \mathcal{H}_{p,q}$$

が得られる。$\mathcal{H}_{p,q}$ が、$\omega_*(U(E) \times U(E))$ 不変部分空間であることに注意すれば、$U(E) \times U(E)$ のユニタリ部分表現 $(\omega_{p,q}, \mathcal{H}_{p,q})$ を得る。

次に、$U(E)$ の既約ユニタリ表現を構成しよう。Mの $(p+q)$ 個の直積 $M \times \cdots \times M$ の点を $(u, v) = (u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q)$ で表わすことにする。r次の対称群を $\mathfrak{S}_r$ とする。$\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q$ は、次のよう

に $M\times\cdots\times M$ 上に右から作用する。

$$(u\cdot\sigma, v\cdot\tau) = (u_{\sigma(1)}, \cdots, u_{\sigma(p)}, v_{\tau(1)}, \cdots, v_{\tau(q)}) \quad (\sigma,\tau)\in\mathfrak{S}_p\times\mathfrak{S}_q$$

(ρ, V_ρ)を$\mathfrak{S}_p$の既約ユニタリ表現，(δ, V_δ)を$\mathfrak{S}_q$の既約ユニタリ表現とし、$M\times\cdots\times M$ ($p+q$個) の、$\mathrm{Hom}(V_\delta, V_\rho)$に値をもつ、2乗可積分関数のなすヒルベルト空間を、$L^2(M:p+q, \mathrm{Hom}(V_\delta, V_\rho))$で表わし、$\mathcal{H}_{p,q,\rho,\delta}$ を

$$\mathcal{H}_{p,q,\rho,\delta} = \{ f\in L^2(M:p+q, \mathrm{Hom}(V_\delta, V_\rho))\ ;$$
$$f(u\cdot\sigma, v\cdot\tau) = \rho(\sigma)^{-1} f(u,v)\delta(\tau),\ \sigma\in\mathfrak{S}_p,\ \tau\in\mathfrak{S}_q \}$$

で定義する。ここで

$$\mathcal{H}_{p,q,\rho,\delta} \subset L^2(M:p+q, V) \cong L^2(M:p+q)\otimes V \cong L^2(M)\bar{\otimes}\cdots\bar{\otimes}L^2(M)\otimes V$$

(但し、$V=\mathrm{Hom}(V_\delta, V_\rho)$) なる同型があるので、$U(E)$ の $\mathcal{H}_{p,q,\rho,\delta}$ 上へのユニタリ表現を次のように構成する。gを$U(E)$の元とし

$$\hat{\pi}_{p,q}(g)(\xi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\xi_{i_p}\otimes\xi_{k_1}\otimes\cdots\otimes\xi_{k_q}) = g\xi_{i_1}\otimes\cdots\otimes g\xi_{i_p}\otimes g^*\xi_{k_1}\otimes\cdots\otimes g^*\xi_{k_q}$$
$$(\xi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\xi_{i_p}\otimes\xi_{k_1}\otimes\cdots\otimes\xi_{k_q}\in L^2(M)\bar{\otimes}\cdots\bar{\otimes}L^2(M))$$

と定義する。ここでg^*はgの随伴作用素を表わす。このとき次の可換な図式

$$\begin{array}{ccccc}
L^2(M:p+q, V) & \cong & L^2(M:p+q)\otimes V & \cong & L^2(M)\bar{\otimes}\cdots\bar{\otimes}L^2(M)\otimes V \\
\downarrow \tilde{\pi}_{p,q,\rho,\delta}(g) & \circlearrowright & \downarrow \tilde{\pi}_{p,q}(g)\otimes I & \circlearrowright & \downarrow \hat{\pi}_{p,q}(g)\otimes I \\
L^2(M:p+q, V) & \cong & L^2(M:p+q)\otimes V & \cong & L^2(M)\bar{\otimes}\cdots\bar{\otimes}L^2(M)\otimes V
\end{array}$$

(但し、IはV上の恒等写像を表わす)

を満足するような、$L^2(M:p+q)$ 上のユニタリ作用素 $\tilde{\pi}_{p,q}(g)$ 及び、$L^2(M:p+q, Hom(V_\delta, V_\rho))$ 上のユニタリ作用素 $\tilde{\pi}_{p,q,\rho,\delta}(g)$ が存在する。また、$\hat{\lambda}(\sigma,\tau)$, $\tilde{\lambda}(\sigma,\tau)$ をそれぞれ

$$\hat{\lambda}(\sigma,\tau)(\xi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\xi_{i_p}\otimes\xi_{k_1}\otimes\cdots\otimes\xi_{k_q}) = \xi_{i_{\sigma(1)}}\otimes\cdots\otimes\xi_{i_{\sigma(p)}}\otimes\xi_{k_{\tau(1)}}\otimes\cdots\otimes\xi_{k_{\tau(q)}}$$

$$(\tilde{\lambda}(\sigma,\tau)f)(u,v) = f(u\cdot\sigma, v\cdot\tau) \qquad (f\in L^2(M:p+q,V))$$

と定義すれば、次の可換な図式

$$\begin{tikzcd}
L^2(M:p+q,V) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "\tilde{\lambda}(\sigma,\tau)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & L^2(M)\overline{\otimes}\cdots\overline{\otimes}L^2(M)\otimes V \arrow[d, "\hat{\lambda}(\sigma,\tau)\otimes I"] \\
L^2(M:p+q,V) \arrow[r, phantom, "\cong"] & L^2(M)\overline{\otimes}\cdots\overline{\otimes}L^2(M)\otimes V
\end{tikzcd}$$

が得られる。$\tilde{\pi}_{p,q,\rho,\delta}(g)$ と $\tilde{\lambda}(\sigma,\tau)$ とが可換ゆえ、$\mathcal{H}_{p,q,\rho,\delta}$ は、$\tilde{\pi}_{p,q,\rho,\delta}(g)$ 不変部分空間である。したがって、$U(E)$ のユニタリ表現 $(\pi_{p,q,\rho,\delta}, \mathcal{H}_{p,q,\rho,\delta})$ が得られる。

定理1　1) (ρ, V_ρ) を $\mathfrak{S}_p$ の既約表現，(δ, V_δ) を $\mathfrak{S}_q$ の既約表現とすれば、$(\pi_{p,q,\rho,\delta}, \mathcal{H}_{p,q,\rho,\delta})$ は既約表現である。

2) $\pi_{p,q,\rho,\delta}$ と $\pi_{p',q',\rho',\delta'}$ とが同値な表現となる必要十分条件は、$p=p'$, $q=q'$ かつ、ρ と ρ'、δ と δ' とが、それぞれ同値な表現となることである。

$(M:r)' = \{(u_1,\dots,u_r)\in M\times\cdots\times M;\ u_i\neq u_j\ (i\neq j)\}$ とおく。

このとき、$M\times\cdots\times M$（p個）の開集合F_pと$M\times\cdots\times M$（q個）の開集合F_qを、次の写像

$$F_p\times F_q\times\mathfrak{S}_p\times\mathfrak{S}_q\ni(u,v,\sigma,\tau)\longmapsto(u\cdot\sigma,v\cdot\tau)\in(M:p)'\times(M:q)'$$

が全単射となるように、とることができる。$L^2(\mathfrak{S}_r)$を$\mathfrak{S}_r$上の関数全体とし、$\mathfrak{S}_r$に正規化されたハール測度を入れると、$\mathfrak{S}_r$に対するPeter-Weylの定理により、

$$L^2(\mathfrak{S}_r)=\sum_{\rho\in\hat{\mathfrak{S}}_r}\oplus(V_\rho\otimes V_\rho^*)$$

を得る。以上より次の同型が得られる。

$$\begin{aligned}
L^2(M:p+q)&\cong L^2(F_p\times F_q\times\mathfrak{S}_p\times\mathfrak{S}_q)\\
&\cong(L^2(F_p)\otimes L^2(\mathfrak{S}_p))\,\overline{\otimes}\,(L^2(F_q)\otimes L^2(\mathfrak{S}_q))\\
&\cong\Big(\sum_{\rho\in\hat{\mathfrak{S}}_p}L^2(F_p)\otimes V_\rho\otimes V_\rho^*\Big)\overline{\otimes}\Big(\sum_{\delta\in\hat{\mathfrak{S}}_q}L^2(F_q)\otimes V_\delta\otimes V_\delta^*\Big)\\
&\cong\sum_\rho\sum_\delta(L^2(F_p)\,\overline{\otimes}\,L^2(F_q)\otimes V_\rho\otimes V_\delta^*)\otimes V_\rho^*\otimes V_\delta\\
&\cong\sum_\rho\sum_\delta L^2(F_p\times F_q,\mathrm{Hom}(V_\delta,V_\rho))\otimes V_\rho^*\otimes V_\delta\\
&\cong\sum_\rho\sum_\delta\mathcal{H}_{p,q,\rho,\delta}\otimes V_\rho^*\otimes V_\delta
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\sum_\rho\sum_\delta(\dim(V_\rho^*\otimes V_\delta))^2&=\Big(\sum_\rho(\dim V_\rho)^2\Big)\Big(\sum_\delta(\dim V_\delta)^2\Big)\\
&=p!\,q!
\end{aligned}$$

となる。したがって、定理1の証明は、$L^2(M:p+q)$上のintertwining作用素の空間$\mathrm{Hom}_{U(E)}(L^2(M:p+q),L^2(M:p+q))$の次元が$p!\,q!$であることを示せばよい。しかし、この為には

まだ準備が必要なので、ここでは省略する（［4］を参照）。

ω_* の既約成分は、“Peter-Weylの定理”の類似として、次の定理2により与えられる。

定理2（Peter-Weylの定理）　ω_* は、次の既約分解をもつ。

$$L^2(\Omega,\nu)=\sum_{n=0}^{\infty}\oplus\sum_{p+q=n}\oplus\sum_{\rho\in\hat{\mathfrak{S}}_p}\sum_{\sigma\in\hat{\mathfrak{S}}_q}\oplus(\mathcal{H}_{p,q,\rho,\sigma}\overline{\otimes}\mathcal{H}^*_{p,q,\rho,\sigma})$$

ここで、$\omega_{p,q}(g_1,g_2)$ は、$\pi_{p,q,\rho,\sigma}(g_1)\otimes\pi^*_{p,q,\rho,\sigma}(g_2)$ と対応している。

（証明）　$L^2(\Omega,\nu)$ のWiener-Itô分解は、

$$L^2(\Omega,\nu)=\sum_{n=0}^{\infty}\oplus\sum_{p+q=n}\oplus\mathcal{H}_{p,q}$$

であった。ここに現われる $\mathcal{H}_{p,q}$ は、以下のような特徴づけがなされる。$L^2(\Omega,\nu)$ の元 f を、$E\hat{\otimes}E$ 上の汎関数に写す写像 $\mathcal{T}$ を、

$$(\mathcal{T}f)(\zeta)=\int_{\Omega}e^{i\{\langle z,\zeta\rangle+\overline{\langle z,\zeta\rangle}\}}\,\overline{f(z)}\,d\nu(z)$$

で定義する。例えば、$\mathcal{H}_{p,q}$ の元として

$$\varphi=\prod_{i,j=1}^{\infty}(p_{ij}!\,q_{ij}!)^{-\frac{1}{2}}H_{p_{ij},q_{ij}}(\langle\cdot,\xi_i\otimes\xi_j\rangle,\overline{\langle\cdot,\xi_i\otimes\xi_j\rangle})$$

をとれば、

$$(\mathcal{T}\varphi)(\zeta)=e^{-\|\zeta\|^2}i^{p+q}\prod_{i,j=1}^{\infty}\overline{(\zeta,\xi_i\otimes\xi_j)}^{p_{ij}}(\zeta,\xi_i\otimes\xi_j)^{q_{ij}}$$

となる。$\sum_{i,j} p_{ij} + \sum_{i,j} q_{ij} = p+q$ ゆえ $\prod_{i,j} \overline{(\zeta, \xi_i \otimes \xi_j)}^{p_{ij}} (\zeta, \xi_i \otimes \xi_j)^{q_{ij}}$ は、$(M\times M)\times\cdots\times(M\times M)$ ($p+q$ 個) 上の積分となる。そこで、$(M\times M)$ の $p+q$ 個の積多様体 $(M\times M)\times\cdots\times(M\times M)$ の2乗可積分関数のなすヒルベルト空間を $L^2(M\times M : p+q)$ で表わし、$L^2(M\times M : p+q)^\wedge$ を、

$$L^2(M\times M : p+q)^\wedge = \{ F \in L^2(M\times M : p+q);$$
$$F((u^1_{\sigma(1)}, u^2_{\sigma(1)}), \cdots, (u^1_{\sigma(p)}, u^2_{\sigma(p)}), (v^1_{\tau(1)}, v^2_{\tau(1)}), \cdots, (v^1_{\tau(q)}, v^2_{\tau(q)}))$$
$$= F((u^1_1, u^2_1), \cdots, (u^1_p, u^2_p), (v^1_1, v^2_1), \cdots, (v^1_q, v^2_q)),\ \sigma \in \mathfrak{S}_p,\ \tau \in \mathfrak{S}_q \}$$

とおく。このとき、$\mathfrak{F}_{p,q}$ の任意の元 f に対して、$L^2(M\times M : p+q)^\wedge$ の元 F が唯ひとつ存在して

$$(\mathcal{J}f)(\zeta) = e^{-\|\zeta\|^2} i^{p+q} \int_{(M\times M)\times\cdots\times(M\times M)} F((u^1_1, u^2_1), \cdots, (u^1_p, u^2_p), (v^1_1, v^2_1), \cdots, (v^1_q, v^2_q))$$
$$\times \zeta(u^1_1, u^2_1) \cdots \zeta(u^1_p, u^2_p)\, \zeta(v^1_1, v^2_1) \cdots \zeta(v^1_q, v^2_q)\, du^1_1\, du^2_1 \cdots dv^1_q\, dv^2_q$$

となる。したがって、次の同型が得られる。

$$\mathfrak{F}_{p,q} \cong L^2(M\times M : p+q)^\wedge$$

$\mathfrak{S}_p$ の元 σ と、$\mathfrak{S}_q$ の元 τ、及び、$L^2(M : p+q)$ の元 f に対して、

$$(\lambda(\sigma, \tau) f)(u, v) = f(u\cdot\sigma, v\cdot\tau)$$

と定義すれば、$L^2(M : p+q) \cong \sum_\rho \sum_\delta \mathcal{H}_{p,q,\rho,\delta} \otimes V^*_\rho \otimes V_\delta$ において、$\lambda(\sigma, \tau)$ は $I \otimes \rho^*(\sigma) \otimes \delta(\tau)$ と対応する。但し I は、$\mathcal{H}_{p,q,\rho,\delta}$ 上の恒等写像を表わす。したがって、以下の同型が

得られる。

$$\mathfrak{h}_{p,q} \cong L^2(M\times M : p+q)^{\wedge}$$
$$\cong \{ f\in L^2(M:p+q)\overline{\otimes} L^2(M:p+q) ; (\lambda(\sigma,\tau)\otimes\lambda(\sigma,\tau))f=f \quad \sigma\in\mathfrak{S}_p, \tau\in\mathfrak{S}_q \}$$
$$\cong \{ \gamma\in\textstyle\sum_{\rho_1}\sum_{\delta_1}\sum_{\rho_2}\sum_{\delta_2}(\mathcal{H}_{p,q,\rho_1,\delta_1}\otimes V_{\rho_1}^*\otimes V_{\delta_1})\overline{\otimes}(\mathcal{H}_{p,q,\rho_2,\delta_2}\otimes V_{\rho_2}^*\otimes V_{\delta_2}) ; (I\otimes\rho_1^*(\sigma)\otimes\delta_1(\tau)\otimes I\otimes\rho_2^*(\sigma)\otimes\delta_2(\tau))\gamma=\gamma, \sigma\in\mathfrak{S}_p, \tau\in\mathfrak{S}_q \}$$
$$\cong \textstyle\sum_\rho\sum_\delta \mathcal{H}_{p,q,\rho,\delta}\overline{\otimes}\mathcal{H}_{p,q,\rho^*,\delta^*}$$
$$\cong \textstyle\sum_\rho\sum_\delta \mathcal{H}_{p,q,\rho,\delta}\overline{\otimes}\mathcal{H}^*_{p,q,\rho,\delta}$$

なお、上記の式変形において

$$\dim\{ w\in V_{\rho_1}^*\otimes V_{\delta_1}\otimes V_{\rho_2}^*\otimes V_{\delta_2} ; (\rho_1^*(\sigma)\otimes\delta_1(\tau)\otimes\rho_2^*(\sigma)\otimes\delta_2(\tau))w=w, \quad \sigma\in\mathfrak{S}_p, \tau\in\mathfrak{S}_q \}$$
$$=\begin{cases} 0 & (\rho_1\not\simeq\rho_2^* \text{ または } \delta_1^*\not\simeq\delta_2) \\ 1 & (\rho_1\simeq\rho_2^* \text{ かつ } \delta_1^*\simeq\delta_2) \end{cases}$$

となることを用いた。$\rho_1\simeq\rho_2^*$ は ρ_1 と ρ_2^* とが同値な表現であることを表わす。

以上により、$L^2(\Omega,\nu)$ の既約分解が証明された。$\omega_{p,q}(g_1,g_2)$ が、$\pi_{p,q,\rho,\delta}(g_1)\otimes\pi^*_{p,q,\rho,\delta}(g_2)$ に対応していることは、明らかであろう。

参考文献

[1] T. Hida, Brownian motion, Springer-Verlag (1980).

[2] H. Matsushima, K. Okamoto and T. Sakurai, On a certain class of irreducible unitary representations of the infinite dimensional rotation group I, Hiroshima Math. J. 11 (1981), 181-193.

[3] K. Okamato and T. Sakurai, On a certain class of irreducible unitary representations of the infinite dimensional rotation group II, Hiroshima Math. J. 12 (1982), 385-397.

[4] K. Okamoto and T. Sakurai, An analogue of Peter-Weyl theorem for the infinite dimensional unitary group, Hiroshima Math. J. to appear.