数理解析研究所講究録
第 485 巻 1983 年 159-169

半線形発展方程式の可制御性について

埼大理　辻岡邦夫

§ 序　ヒルベルト空間Xにおいて，非線形項をもった発展方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au + Bf + F(u), \quad 0<t<T & (1) \\ u(0) = u_0 \in X & (2) \end{cases}$$

の可制御性を論ずる。こゝで，AはXにおける C_0 半群 e^{tA} $(t \geq 0)$ の生成作用素とし，Bはヒルベルト空間YからXへの有界線形作用素，FはX上の非線形作用素で，リプシッツ条件

(F1)　$\|F(u) - F(v)\| \leq C\|u - v\|$

$(C$ は定数，$u, v \in X)$

をみたすものとする。$f \in L^2(0,T;Y)$ を制御とし，これに対応して (1)–(2) より定まる $u(t) = u_f(t)$ を軌道という。(F1) のもとで u_f は次の積分方程式の解である：

$$u(t) = e^{tA}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}(Bf(s) + F(u(s)))ds$$
$$(0 \leq t \leq T)$$

以後 (1)−(2) の解とはこの積分方程式の解のことゝする。簡単のため $u_0 = 0$ とし，時刻 $T > 0$ における到達可能集合を

$$R_F(T) = \{u_T \in X\ ;\ u_T = u_f(T),\ f \in L^2(0,T;Y)\}$$
$$R(T) = R_0(T) = \left\{\int_0^T e^{(T-s)A}Bf(s)ds\ ;\ f \in L^2(0,T;Y)\right\}$$

とおく．$\overline{R_F(T)} = X$ のとき (1) は可制御であるという．§1 では空間1次元の半線形熱方程式の可制御性を論じた Zhou ([1]) の概要を紹介し §2 で問題点を述べる。

§1 Zhou の結果 空間1次元における半線形熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, u) + g(x)f(t) \qquad (3)$$
$$(0 < x < l,\quad 0 < t < T)$$

に初期条件

$$u(x, 0) = 0 \qquad (4)$$

および境界条件

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \qquad (5)$$

を付したものについての可制御性が $X = L^2(0, l)$，$Y = R^1$
$Au = u''$ (導関数は $L^2(0, l)$ における超関数の意味)

$$u(t) = e^{tA}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}(Bf(s) + F(u(s)))ds$$

以後 (1)−(2) の解とはこの積分方程式の解のことゝする。簡単のため $u_0 = 0$ とし，時刻 $T > 0$ における到達可能集合を

$$R_F(T) = \{u_T \in X\ ;\ u_T = u_f(T),\ f \in L^2(0,T;Y)\}$$
$$R(T) = R_0(T) = \{\int_0^T e^{(T-s)A}Bf(s)ds\ ;\ f \in L^2(0,T;Y)\}$$

とおく．可制御性を論じるときには

(F 2) $\quad \sup_{u \in X} \|F(u)\| < \infty$

なる条件を置く。 $\overline{R_F(T)} = X$ のとき，(1) は可制御であるという。§1 では空間1次元の半線形熱方程式の可制御性を論じた Zhou ([1]) の結果を紹介し，§2 でその問題点を述べる。

§1 Zhou の結果 空間1次元における半線形熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,u) + g(x)f(t) \qquad (3)$$
$$(0 < x < l,\quad 0 < t < T)$$

に初期条件

$$u(x,0) = 0 \qquad (4)$$

および境界条件

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \qquad (5)$$

を付したものについての可制御性が

$$X = L^2(0,\ell),\quad Y = R^1$$

$$Au = u''$$ (導関数は $L^2(0,\ell)$ での超関数の意味で)

$$D(A) = H^2(0,\ell) \cap \{u\,;\, u(0) = u(\ell) = 0\}$$

$$Bf = g(x)f,\quad g(x) \in L^2(0,\ell)$$

として扱える。A は X における自己共役作用素であり，固有値 $\lambda_n = -\dfrac{\pi^2 n^2}{\ell^2}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ および対応する正規化された固有ベクトル $\varphi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\ell}} \sin \dfrac{\pi n}{\ell} x$ を持つ。

(F1) および (F2) に対応して

$$F(x, u) \;:\; [0,\ell] \times X \longrightarrow X$$

について，次の (F1)′，(F2)′ の仮定を置く。

(F1)′ $\quad \|F(x,u) - F(x,v)\| \leqq C\|u - v\|$

(F2)′ $\quad \sup\limits_{u \in X} \|F(x,u)\| < \infty$

g に関して，次の仮定をする。

仮定 (g)　ある $M_g > 0$ と整数 $I > 0$ が存在して

$$|g_n| \geqq M_g |\lambda_n|^{-I} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

たゞし，こゝで $g_n = (g, \varphi_n)_{L^2(0,\ell)}$

<u>定理 1</u> (Zhou [1]) (F1)′，(F2)′ および仮定 (g) のもとで (3)-(4)-(5) は可制御である。

この定理の証明は次の様に行われた：先ず $F(x,u)$ を Fourier 展開して

$$F(x,u)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(u)\varphi_n(x)$$

となるが (F2)′ より

$$\sup_{u\in X}\|F(x,u)\|^2=\sup_{u\in X}\sum_{n=1}^{\infty}|F_n(u)|^2$$

こゝで

$$\hat{F}^{(N)}(x,u)=\sum_{n=1}^{N}F_n(u)\varphi_n(x)$$

とおけば

$$\sup_{u\in X}\|\hat{F}^{(N)}(x,u)-F(x,u)\|^2$$
$$=\sup_{u\in X}\sum_{n=N+1}^{\infty}|F_n(u)|^2\to 0$$
$$(N\to\infty)\qquad \cdots (6)$$

$$\begin{cases}\text{第一段}\quad \text{任意の } N>0,\ k>0 \text{ に対して}\\ \qquad D=D(e^{kA^{\frac{1}{2}}})\subset R_{\hat{F}^{(N)}}(T)\\ \text{第二段}\quad D\subset\overline{R_F(T)}\end{cases}$$

が示されれば $\overline{D}=X$ だから $\overline{R_F(T)}=X$

すなわち (3)-(4)-(5) は可制御である。

第一段 ⇒ 第二段 X値関数として

$$F^{(N)}(u)=F^{(N)}(\cdot,u),\quad F(u)=F(\cdot,u)$$

$$u(t)=u(\cdot,t),\qquad g=g(\cdot)$$

などのようにかく。(6)により次のことがいえる：

$\forall\varepsilon>0,\ \forall u_T\in D\quad \exists N.$

$$\sup_{\substack{0\le t\le T\\ u\in X}}\left\|\int_0^t e^{(t-s)A}(\hat{F}^{(N)}(u(s))-F(u(s)))ds\right\|<\varepsilon$$

第一段より $u_T \in R_{\hat{F}^{(N)}}(T)$ だから

$\exists \hat{u}(t),\ \hat{f}(t)$

s.t. $\begin{cases} \hat{u}(T) = u_T \\ \hat{u}(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}(g\hat{f}(s) + \hat{F}^{(N)}(\hat{u}(s)))ds \end{cases}$

$u = u_{\hat{f}}$ とおくと

$$u(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}(g\hat{f}(s) + F(u(s)))ds$$

$\therefore \|u(t) - \hat{u}(t)\|$

$$= \left\| \int_0^t e^{(t-s)A}(\hat{F}^{(N)}(\hat{u}(s)) - F(u(s)))ds \right\|$$

$$\leq \left\| \int_0^t e^{(t-s)A}(\hat{F}^{(N)}(\hat{u}(s)) - F(\hat{u}(s)))ds \right\|$$

$$+ \left\| \int_0^t e^{(t-s)A}(F(\hat{u}(s)) - F(u(s)))ds \right\|$$

$$\leq \varepsilon + C\int_0^t \|\hat{u}(s) - u(s)\|ds$$

Gronwall の不等式により

$$\|u(t) - \hat{u}(t)\| \leq \varepsilon e^{Ct} \leq \varepsilon e^{CT}$$

$t = T$ とおいて

$$\|u(T) - u_T\| \leq \varepsilon e^{CT}$$

第一段を示すため Fattorini - Russell ([2]) のモーメント問題についての結果より、次の命題が導かれる：

$$\forall u \in L^2(0,T:X),\quad \exists f \in L^2(0,T:Y)$$

s.t.

$$\begin{cases} u_T = \int_0^T e^{(T-s)A}(g f(s) + \hat{F}^{(N)}(u(s)))ds & \cdots (7) \\ \|f\| \leq C_1(u_T) + C_2(N,F) & \cdots (8) \end{cases}$$

これがモーメント問題に帰着されるのは

$$u_T = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \varphi_n$$

i.e.,

$$\int_0^T e^{(T-s)\lambda_n}(g_n f(s) + \hat{F}_n^{(N)}(u(s)))ds = \beta_n$$

より

$$\int_0^T e^{(T-s)\lambda_n} f(s)\,ds = c_n \equiv \frac{1}{g_n}\left\{\beta_n - \int_0^T \hat{F}_n^{(N)}(u(s))ds\right.$$

とおけることから示される.

任意の $u_T \in D$ に対して

$$\begin{cases} u_T = \int_0^T e^{(T-s)A}(g f_{k+1}(s) + \hat{F}^{(N)}(u_k(s)))ds & \cdots (9) \\ u_{k+1}(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}(g f_{k+1}(s) + F^{(N)} & \cdots (10) \\ \|f_k\| \leq C(u_T, N, F) & (11) \end{cases}$$

をみたす $\{u_k\} \subset L^2(0,T:X)$, $\{f_k\} \subset L^2(0,T:Y)$

を選ぶことができる 「(11)により $\{f_k\}$ は $L^2(0,T;Y)$ の有界列だから，部分列をとれば弱収束する。この部分列を同じ $\{f_k\}$ で表わすことにする。写像

$$f\in L^2(0,T;Y)\longrightarrow \int_0^t e^{(t-s)A}g\,f(s)ds\in L^2(0,T;X)$$

は完全連続だから $\{u_k\}$ は $L^2(0,T;X)$ で強収束する。Zhou によれば $\{f_k\}$，$\{u_k\}$ の $L^2(0,T;Y)$，$L^2(0,T;X)$ における弱，強極限を f，u とすると (9)，(10)で極限移行ができて

$$u_T=\int_0^T e^{(T-s)A}(g\,f(s)+\hat{F}^{(N)}(u(s)))ds$$

$$u(t)=\int_0^t e^{(t-s)A}(g\,f(s)+\hat{F}^{(N)}(u(s)))ds$$

i.e

$$u_T\in R_{\hat{F}^{(N)}}(T)$$ 」

Remark　上の証明中「…」で ～～ を施した部分を詳しくいえば $\{f_k\}$ の弱収束する部分列 $\{f_{n_k}\}$ が存在し (10)より

$$u_{n_k}(t)=\int_0^t e^{(t-s)A}(g\,f_{n_k}(s)+\hat{F}^{(N)}(u_{n_k}(s)))ds$$

$k\to\infty$ として

$$u(t)=\int_0^t e^{(t-s)A}(g\,f(s)+\hat{F}^{(N)}(u(s)))ds$$

は確かであるが　(9) より

$$u_T = \int_0^T e^{(T-s)A}(gf_{n_k}(s) + \hat{F}^{(N)}(u_{n_k-1}(s)))ds$$

となり，右辺第2項において　$k \to \infty$ のとき　極限移行ができない．従って　$u_T \in R_{\hat{F}}(T)$ が結論されない．

§2　問題提起　(F1)(F2) のもとで (1) の可制御性が 線形系

$$\frac{du}{dt} = Au + Bf \qquad 0<t<T \qquad (12)$$

の可制御性に帰着されるのではないか，すなわち

$$(Z) \qquad \overline{R(T)} = X \Rightarrow \overline{R_F(T)} = X$$

が成り立つのではないかと．筆者は試みたが．講演中，神戸大学の中桐氏にその証明の誤まりを指摘された．又、大阪大学の坂和，藤井の両氏には文献（[3]）を教えて頂いた。これによると，A が解析半群の生成作用素のとき，次が成り立つ。

「任意の $x \in X$ と $\varepsilon > 0$ に対して，十分小さい $T>0$ をとれば　$u_f(T) \in R_F(T)$ が存在して

$$\| x - u_f(T) \| < \varepsilon$$ 」

証明は次の通り：　$\varepsilon > 0$ に対して　$T > 0$ を十分小さくとれば

$$\int_0^T \| e^{(T-s)A} F(u(s)) \| ds < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (13)$$

が，すべての $u \in L^2(0, T; X)$ に対して成り立つ．e^{tA} の解析性と (12) の可制御性により．$\overline{R(T)} = X$ であるから $f \in L^2(0, T; Y)$ が存在して

$$\left\| x - \int_0^T e^{(T-s)A} Bf(s) ds \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (14)$$

が成り立つ。(13), (14) により

$$\begin{aligned} &\| x - u_f(T) \| \\ &= \left\| x - \int_0^T e^{(T-s)A} Bf(s) ds - \int_0^T e^{(T-s)A} F(u(s)) ds \right\| \\ &\leq \left\| x - \int_0^T e^{(T-s)A} Bf(s) ds \right\| + \left\| \int_0^T e^{(T-s)A} F(u(s)) ds \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad . \end{aligned}$$

上の結果は

$$\overline{R(T)} = X \Rightarrow \bigcup_{T>0} \overline{R_F(T)} = X$$

と表わせる，与えられた $T>0$ に対して．(Z) 又は Zhou の結果が正しいかどうかは未解決である。

References

[1] Zhou, X. Z. A note on approximate controllability for semilinear one-dimensional

heat equation, Appl. Math. Optim 8 : 275-285 (1982).

[2] Fattorini, H.O., Russell, D.L., Exact controllability theorem for linear parabolic equations in one space dimension, Arch. Rat. Mech. Anal. 43 : 272-292. (1971)

[3] Fujii, N, Sakawa, Y, Controllability for nonlinear differential equations in Banach space, Automatic Control Theory and Applications, Vol. 2. No. 2, 44-46 May (1974).