数理解析研究所講究録
第485巻 1983年 187-200



# 特異摂動型離散線形システムの Riccati 方程式について

信州大工　木村盛茂 (Morishige Kimura)

## 1. まえがき

一般に方程式に正の微小パラメーターが含まれ，それが0になるとき方程式の階数が下がるならば，方程式は特異摂動型という。特異摂動型常微分方程式で記述される系の最適制御問題については，特にLQ問題を中心に最近15年間に種々の研究がなされている[1]−[9]。これに対して特異摂動型差分方程式で記述される系については，3年程前から論文があるものの非常に少ない[10]−[15]。

ここでは，特異摂動型の変数係数線形常微分方程式で記述される系のLQ問題への前進差分近似になっている離散系を考察する。これを特異摂動型離散線形システムのLQ問題と呼ぶ。正の微小パラメーターを含む元の系をfull系，それを0とおいて得られる系を退化系という。退化系を構成する代数方程式系により状態ベクトルの一部を消去して得られる系を縮小系という。Full系のRiccati方程式，最適制御，最適軌

道は正の微小パラメーターを0にしたとき，縮小系のそれらになるかどうかを議論する。

## 2. 問題の記述

次の差分方程式系の初期値問題を考える。

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1(i+1,\varepsilon) \\ \varepsilon\,\tilde{x}_2(i+1,\varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1(i,\varepsilon) & \tilde{A}_2(i,\varepsilon) \\ \tilde{A}_3(i,\varepsilon) & \tilde{A}_4(i,\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(i,\varepsilon) \\ \tilde{x}_2(i,\varepsilon) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1(i,\varepsilon) \\ \tilde{B}_2(i,\varepsilon) \end{bmatrix} \tilde{u}(i,\varepsilon)$$

$$i = t_0,\ t_0+1,\ \cdots,\ N, \qquad (2.1)$$

初期条件 $\tilde{x}_1(t_0,\varepsilon) = x_1^0$, $\tilde{x}_2(t_0,\varepsilon) = x_2^0$. (2.2)

ここで $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, $\tilde{u}$ はそれぞれ，$n_1$−，$n_2$−，$r$−実ベクトルであり，$\tilde{A}_k$ ($k=1,2,3,4$)，$\tilde{B}_\ell$ ($\ell=1,2$) は $\tilde{x}_j$, $\tilde{u}$ と適合する実行列とし，$\varepsilon$ は非負の微小パラメーターである。(2.1)の最初の $n_1$ 個，終りの $n_2$ 個のスカラー差分方程式はそれぞれ「遅い」，「速い」部分系を表わす。これは特異摂動型の変数係数線形常微分方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1(t,\varepsilon) \\ \varepsilon\,\dot{\bar{x}}_2(t,\varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1(t,\varepsilon) & \bar{A}_2(t,\varepsilon) \\ \bar{A}_3(t,\varepsilon) & \bar{A}_4(t,\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t,\varepsilon) \\ \bar{x}_2(t,\varepsilon) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1(t,\varepsilon) \\ \bar{B}_2(t,\varepsilon) \end{bmatrix} \bar{u}(t,\varepsilon), \quad t_0 \leqq t \leqq t_f$$

において微分を前進差分で置き換え，係数行列を取り直し，差分幅$h$を1と取れば得られる。このとき $h \gg \varepsilon$ と仮定する。それは $h < \varepsilon$ なら，差分近似に問題は生じないが，実際には $\varepsilon$ は非常に小さく，$h$ を $\varepsilon$ より小さくできないからである[16]。

しかし $h \gg \varepsilon$ とすることは境界層の「外部解」を求めることを意味し，[13] では $\tau = t/\varepsilon$ と変数変換した常微分方程式の前進差分近似を扱かっているのと対照的である．[10]－[12], [15] も [13] とおおむね同じ形の差分方程式を扱かっている。

系の2次評価関数として

$$J_\varepsilon = \tilde{x}^T(N,\varepsilon)\tilde{\Pi}(\varepsilon)\tilde{x}(N,\varepsilon) + \sum_{i=t_0}^{N-1}\left[\tilde{x}^T(i,\varepsilon)\tilde{Q}(i,\varepsilon)\tilde{x}(i,\varepsilon) + \tilde{u}^T(i,\varepsilon)\tilde{R}(i,\varepsilon)\tilde{u}(i,\varepsilon)\right] \tag{2.3}$$

ととる。ここで $^T$ は行列の転置を表わし，$\tilde{x}^T = (\tilde{x}_1^T, \tilde{x}_2^T)$ である。$\tilde{\Pi}(\varepsilon)$, $\tilde{Q}(i,\varepsilon)$, $\tilde{R}(i,\varepsilon)$ は実対称行列で $\tilde{\Pi}(\varepsilon)$ と $\tilde{Q}(i,\varepsilon)$ は非負定値行列，$\tilde{R}(i,\varepsilon)$ は正定値行列とし，また

$$\tilde{\Pi} = \begin{bmatrix} \tilde{\Pi}_1 & \varepsilon\tilde{\Pi}_2 \\ \varepsilon\tilde{\Pi}_2^T & \varepsilon^2\tilde{\Pi}_3 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1 & \tilde{Q}_2 \\ \tilde{Q}_2^T & \tilde{Q}_3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Pi}_1,\ \tilde{Q}_1,\ n_1\times n_1;\quad \tilde{\Pi}_2,\ \tilde{Q}_2,\ n_1\times n_2;\quad \tilde{\Pi}_3,\ \tilde{Q}_3,\ n_2\times n_2$$

と区分けする．(2.1) の (2.3) のもとでの最適制御は周知で

$$\tilde{u}^*(i,\varepsilon) = -\tilde{K}(i,\varepsilon)\tilde{x}(i,\varepsilon), \tag{2.4}$$

$$\tilde{K}(i,\varepsilon) = \left[\tilde{R}(i,\varepsilon) + \tilde{B}^T(i,\varepsilon)\tilde{P}(i+1,\varepsilon)\tilde{B}(i,\varepsilon)\right]^{-1}\tilde{B}^T(i,\varepsilon)\tilde{P}(i+1,\varepsilon)\tilde{A}(i,\varepsilon),$$
$$i = t_0, \cdots, N-1 \tag{2.5}$$

と与えられる。ここで

$$\tilde{A}(i,\varepsilon) = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1(i,\varepsilon) & \tilde{A}_2(i,\varepsilon) \\ \frac{1}{\varepsilon}\tilde{A}_3(i,\varepsilon) & \frac{1}{\varepsilon}\tilde{A}_4(i,\varepsilon) \end{bmatrix}, \qquad \tilde{B}(i,\varepsilon) = \begin{bmatrix} B_1(i,\varepsilon) \\ \frac{1}{\varepsilon}B_2(i,\varepsilon) \end{bmatrix}$$

とおき，また実対称行列 $\tilde{P}(i,\varepsilon)$ は離散型 *Riccati* 方程式

$$\tilde{P}(i,\varepsilon) = \tilde{A}^T(i,\varepsilon)\tilde{P}(i+1,\varepsilon)\tilde{A}(i,\varepsilon) + \tilde{Q}(i,\varepsilon) - \tilde{A}^T(i,\varepsilon)\tilde{P}(i+1,\varepsilon)\tilde{B}(i,\varepsilon)\tilde{K}(i,\varepsilon)$$

の端点条件 $\tilde{P}(N,\varepsilon)=\tilde{\Pi}(\varepsilon)$ を満足する解である。従って $\tilde{\Pi}(\varepsilon)$, $\tilde{Q}(i,\varepsilon)$, $\tilde{R}(i,\varepsilon)$ の条件から $\tilde{P}(i,\varepsilon)$ は非負定値である[17]。そのとき $\tilde{R}(i,\varepsilon)+\tilde{B}^{T}(i,\varepsilon)\tilde{P}(i+1,\varepsilon)\tilde{B}(i,\varepsilon)$ は正定値，従って正則である。行列 $\tilde{P}(i,\varepsilon)$, $\tilde{K}(i,\varepsilon)$ を次のように区分けする。

$$\tilde{P}=\begin{bmatrix}\tilde{P}_1 & \varepsilon\tilde{P}_2\\ \varepsilon\tilde{P}_2^{T} & \varepsilon^2\tilde{P}_3\end{bmatrix},\qquad \tilde{K}=[\tilde{K}_1,\ \tilde{K}_2],$$

$\tilde{P}_1$, $n_1\times n_1$ ; $\tilde{P}_2$, $n_1\times n_2$ ; $\tilde{P}_3$, $n_2\times n_2$ ; $\tilde{K}_1$, $r\times n_1$ ; $\tilde{K}_2$, $r\times n_2$ .

ここで次の仮定をおく。

仮定0．離散型 Riccati 方程式の解は有界である。

このとき離散型 Riccati 方程式で $\varepsilon=0$ とし，$\tilde{P}_k(i,0)$ を $P_k(i)$, $\tilde{A}_k(i,0)$ を $A_k(i)$ 等と表わせば次が得られる。

$$\begin{aligned}P_1(i)=&[A_1^T(i)P_1(i+1)+A_3^T(i)P_2^T(i+1)][A_1(i)-B_1(i)K_1(i)]\\&+[A_1^T(i)P_2(i+1)+A_3^T(i)P_3(i+1)][A_3(i)-B_2(i)K_1(i)]+Q_1(i),\end{aligned}\tag{2.6a}$$

$$\begin{aligned}0=&[A_1^T(i)P_1(i+1)+A_3^T(i)P_2^T(i+1)][A_2(i)-B_1(i)K_2(i)]\\&+[A_1^T(i)P_2(i+1)+A_3^T(i)P_3(i+1)][A_4(i)-B_2(i)K_2(i)]+Q_2(i),\end{aligned}\tag{2.6b}$$

$$\begin{aligned}0=&[A_2^T(i)P_1(i+1)+A_4^T(i)P_2^T(i+1)][A_2(i)-B_1(i)K_2(i)]\\&+[A_2^T(i)P_2(i+1)+A_4^T(i)P_3(i+1)][A_4(i)-B_2(i)K_2(i)]+Q_3(i).\end{aligned}\tag{2.6c}$$

また端点条件は

$$P_1(N)=\Pi_1,\qquad P_2(N)=\Pi_2,\qquad P_3(N)=\Pi_3\tag{2.7}$$

であり，次のように置いた。

$$K_k(i)=U^{-1}(i)V_k(i)\qquad(k=1,2)\tag{2.8a}$$

$$U(i) = R(i) + [B_1^T(i) P_1(i+1) + B_2^T(i) P_2^T(i+1)] B_1(i)$$
$$+ [B_1^T(i) P_2(i+1) + B_2^T(i) P_3(i+1)] B_2(i), \qquad (2.8b)$$

$$V_k(i) = [B_1^T(i) P_1(i+1) + B_2^T(i) P_2^T(i+1)] A_k(i)$$
$$+ [B_1^T(i) P_2(i+1) + B_2^T(i) P_3(i+1)] A_{k+2}(i) \quad (k=1,2). \qquad (2.8c)$$

なお $\Pi$ の非負定値性と Riccati 方程式の解の性質から $P(i)$，$P_1(i)$，$P_3(i)$ は非負定値で，$R(i)$ の正定値性とあわせて $U(i)$ の正則性がいえる。Full 系の最適制御は $\varepsilon=0$ と置くと

$$u^*(i) = -U^{-1}(i)[V_1(i)x_1(i) + V_2(i)x_2(i)] \qquad (2.9)$$

と書き直される。

## 3. 縮小系の Riccati 方程式

以後の議論のために次の仮定をおく。

仮定 1. $A_4(i)$，$i = t_0, \cdots, N$，は正則である。

式 (2.1)，(2.2)，(2.3) において $\varepsilon=0$ とおき，仮定 1 を用いて $x_2(i)$ を消去すると

$$\hat{x}_1(i+1) = \hat{A}(i)\hat{x}_1(i) + \hat{B}(i)\hat{u}(i), \qquad (3.1)$$

$$\hat{x}_1(t_0) = x_1^0, \qquad (3.2)$$

$$\hat{J}_0 = \hat{x}_1^T(N)\Pi_1\hat{x}_1(N) + \sum_{i=t_0}^{N-1}[\hat{x}_1^T(i)\hat{Q}_1(i)\hat{x}_1(i) + \hat{u}^T(i)\hat{R}(i)\hat{u}(i)$$
$$- 2\hat{x}_1^T(i)\hat{Q}_2(i)\hat{u}(i)] \qquad (3.3)$$

となる。ここで $\hat{x}_1(i)$ は縮小系の $x_1(i)$ を表わし，他も同様である。また次のように置いた。

$$\left.\begin{aligned}\hat{A} &= A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3, \qquad \hat{B} = B_1 - A_2 A_4^{-1} B_2, \\ \hat{Q}_1 &= Q_1 - Q_2 A_4^{-1} A_3 - A_3^T A_4^{T-1} Q_2^T + A_3^T A_4^{T-1} Q_3 A_4^{-1} A_3, \\ \hat{Q}_2 &= [Q_2 - A_3^T A_4^{T-1} Q_3] A_4^{-1} B_2, \qquad \hat{R} = R + B_2^T A_4^{T-1} Q_3 A_4^{-1} B_2 .\end{aligned}\right\} \quad (3.4)$$

縮小系の最適制御は周知のように動的計画法を用いて

$$\hat{u}^*(i) = -[\hat{R}(i) + \hat{B}^T(i) S(i+1) \hat{B}(i)]^{-1} [\hat{B}^T(i) S(i+1) \hat{A}(i) - \hat{Q}_2^T(i)] \hat{x}_1(i),$$

$$i = t_0, \cdots, N-1, \qquad (3.5)$$

と与えられる。ここで $S(i)$ は離散型 Riccati 方程式

$$\left.\begin{aligned}S(i) &= \hat{A}^T(i) S(i+1) \hat{A}(i) + \hat{Q}_1(i) - [\hat{B}^T(i) S(i+1) \hat{A}(i) - \hat{Q}_2^T(i)]^T \\ &\quad \times [\hat{R}(i) + \hat{B}^T(i) S(i+1) \hat{B}(i)]^{-1} [\hat{B}^T(i) S(i+1) \hat{A}(i) - \hat{Q}_2^T(i)] \\ S(N) &= \Pi_1\end{aligned}\right\} \quad (3.6)$$

を満たす。

## 4. 諸命題

この節では以下の議論で必要となる命題を用意する。

命題 4.1. $R(i)$ が正定値行列, $\Pi$ と $Q(i)$ は非負定値行列とする。仮定 1 のもとで

$$\hat{R}(i) + \hat{B}^T(i) P_1(i+1) \hat{B}(i) = W^T(i) U^{-1}(i) W(i) \qquad (4.1)$$

が成立する。ここで

$$W(i) = U(i) - V_2(i) A_4^{-1}(i) B_2(i) \qquad (4.2)$$

である。(4.1) の左辺は正定値, 従って正則である。よって $W(i)$ も正則で次が成立する。

$$[\hat{R}(i) + \hat{B}^T(i) P_1(i+1) \hat{B}(i)]^{-1} = W^{-1}(i) U(i) W^{T-1}(i). \tag{4.3}$$

命題 4.2. 命題 4.1 と同じ仮定のもとで行列

$$I - K_2(i) A_4^{-1}(i) B_2(i) = U^{-1}(i) W(i) \tag{4.4}$$

は正則である。

ここで次の仮定を設ける。

仮定 2. $I - A_4^{-1}(i) B_2(i) K_2(i)$, $i = t_0, \cdots, N$, は正則である。

命題 4.3. 仮定 2 と命題 4.1 の仮定のもとで次が成立する。

$$[I - A_4^{-1}(i) B_2(i) K_2(i)]^{-1} = I + A_4^{-1}(i) B_2(i) [I - K_2(i) A_4^{-1}(i) B_2(i)]^{-1} K_2(i), \tag{4.5}$$

あるいは

$$[A_4(i) - B_2(i) K_2(i)]^{-1} = A_4^{-1}(i) + A_4^{-1}(i) B_2(i) W^{-1}(i) U(i) K_2(i) A_4^{-1}(i). \tag{4.6}$$

## 5. Full 系と縮小系の Riccati 方程式の一致

(2.8c), (3.4), (2.6c), (2.6b), (2.8a) を用いて

$$A_3^T(i) P_2^T(i+1) \hat{A}(i) + A_3^T(i) A_4^{T-1}(i) \{A_2^T(i) P_1(i+1) \hat{A}(i) + Q_2^T(i) - Q_3(i) A_4^{-1}(i) A_3(i)\}$$
$$= A_3^T(i) A_4^{T-1}(i) V_2^T(i) U^{-1}(i) \{B_1^T(i) P_1(i+1) + B_2^T(i) P_2^T(i+1)\} \hat{A}(i) \tag{5.1}$$

$$\hat{Q}_2(i) = \hat{A}^T(i) [\{P_1(i+1) B_1(i) + P_2(i+1) B_2(i)\} U^{-1}(i) V_2(i)$$
$$- \{P_1(i+1) A_2(i) + P_2(i+1) A_4(i)\}] A_4^{-1}(i) B_2(i) \tag{5.2}$$

が得られる。(2.6a), (2.6b), (4.6), (2.8), (5.1) を用いて変形をくり返して

$$P_1(i) = \hat{Q}_1(i) + \hat{A}^T(i) P_1(i+1) \hat{A}(i) - \hat{A}^T(i) [P_1(i+1) B_1(i) + P_2(i+1) B_2(i)]$$
$$\times U^{-1}(i) [P_1(i+1) B_1(i) + P_2(i+1) B_2(i)]^T \hat{A}(i) \tag{5.3}$$

を示すことができる。またこの右辺の第3項は

$$[\hat{B}^T(i)P_1(i+1)\hat{A}(i) - \hat{Q}_2^T(i)]^T W^{-1}(i)\, U(i)\, W^{T-1}(i)\,[\hat{B}^T(i)P_1(i+1)\hat{A}(i) - \hat{Q}_2^T(i)]$$

$$= [\hat{B}^T(i)P_1(i+1)\hat{A}(i) - \hat{Q}_2^T(i)]^T [\hat{R}(i) + \hat{B}^T(i)P_1(i+1)\hat{B}(i)]^{-1}$$

$$\times [\hat{B}^T(i)P_1(i+1)\hat{A}(i) - \hat{Q}_2^T(i)] \qquad (5.4)$$

となることがかなりの計算の結果わかる。よって

$$P_1(i) = \hat{A}^T(i)P_1(i+1)\hat{A}(i) + \hat{Q}_1(i) - [\hat{B}^T(i)P_1(i+1)\hat{A}(i) - \hat{Q}_2^T(i)]^T$$

$$\times [\hat{R}(i) + \hat{B}^T(i)P_1(i+1)\hat{B}(i)]^{-1} [\hat{B}^T(i)P_1(i+1)\hat{A}(i) - \hat{Q}_2^T(i)],$$

$$i = t_0, \cdots, N-1. \qquad (5.5)$$

この方程式と端点条件 $P_1(N) = \Pi_1$ は (3.6) に他ならない。よって

定理 5.1. $R(i)$ が正定値, $\Pi$ と $Q(i)$ は非負値行列とする。仮定 1 と 2 が成り立てば, (2.6) および $P_1(N) = \Pi_1$ を満たす $P_1(i)$ は (3.6) を満たす $S(i)$ と同じ値をとる ( $i = t_0, \cdots, N-1$ )。

## 6. Full 系と縮小系の最適制御の一致

Full 系の最適制御 (2.4) を (2.1) に代入し，仮定 0 のもとで $\varepsilon = 0$ とおく。そのとき定理 5.1 と同じ仮定のもとで

$$\left.\begin{aligned} x_1(i+1) &= [A_1(i) - B_1(i)U^{-1}(i)V_1(i)]x_1(i) + [A_2(i) - B_1(i)U^{-1}(i)V_2(i)]x_2(i), \\ x_2(i) &= -[A_4(i) - B_2(i)U^{-1}(i)V_2(i)]^{-1}[A_3(i) - B_2(i)U^{-1}(i)V_1(i)]x_1(i). \end{aligned}\right\} \qquad (6.1)$$

この第 2 式を (2.9) に代入し，変形をくり返すと

$$u^* = -U^{-1}[V_1 - V_2(A_4 - B_2U^{-1}V_2)^{-1}(A_3 - B_2U^{-1}V_1)]x_1$$

$$= -W^{-1}UW^{T-1}W^TU^{-1}(B_1^TP_1 + B_2^TP_2^T)\hat{A}x_1$$

$$= -\left[\hat{R}(i)+\hat{B}^T(i)P_1(i+1)\hat{B}(i)\right]^{-1}\left[\hat{B}^T(i)P_1(i+1)\hat{A}(i)-\hat{Q}_2^T(i)\right]x_1(i),$$

$$i = t_0, \cdots, N-1 \tag{6.2}$$

となる。これと(3.5)を比較し，定理5.1を用いて

定理6.1. 定理5.1と同じ仮定および仮定0が成り立ち，また極限操作$\varepsilon\to 0$をRiccatiの方程式で行なうものとする。そのときfull系の$\varepsilon=0$とした最適制御は縮小系の最適制御に等しい。

## 7. Full系の「遅い」部分系の最適軌道と縮小系のそれの一致

(6.1)の第2式を第1式に代入し，展開してからまとめると

$$x_1(i+1) = \hat{A}(i)x_1(i) - \hat{B}(i)W^{-1}(i)\left[V_1(i) - V_2(i)A_4^{-1}(i)A_3(i)\right]x_1(i)$$

となり，さらに次のようになる。

$$x_1(i+1) = \hat{A}(i)x_1(i) - \hat{B}(i)\left[\hat{R}(i)+\hat{B}^T(i)P_1(i+1)\hat{B}(i)\right]^{-1}$$
$$\times\left[\hat{B}^T(i)P_1(i+1)\hat{A}(i)-\hat{Q}_2^T(i)\right]x_1(i). \tag{7.1}$$

一方，(3.5)を(3.1)に代入し

$$\hat{x}_1(i+1) = \hat{A}(i)\hat{x}_1(i) - \hat{B}(i)\left[\hat{R}(i)+\hat{B}^T(i)S(i+1)\hat{B}(i)\right]^{-1}$$
$$\times\left[\hat{B}^T(i)S(i+1)\hat{A}(i)-\hat{Q}_2^T(i)\right]\hat{x}_1(i) \tag{7.2}$$

を得る。これと(7.1)を比較し，定理5.1を用いれば

定理7.1. 定理6.1と同じ仮定が成り立つとする。Full系の「遅い」部分系の$\varepsilon=0$とした最適制御は縮小系の最適制御に一致する。

## 8. 簡単な例

$$\left.\begin{aligned} \tilde{x}_1(i+1,\varepsilon) &= \frac{1}{2}\tilde{x}_1(i,\varepsilon), \\ \varepsilon\,\tilde{x}_2(i+1,\varepsilon) &= -\varepsilon\,\tilde{x}_1(i,\varepsilon) - \tilde{x}_2(i,\varepsilon) + \tilde{u}(i,\varepsilon) \end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

で表わされる系を考える。ここで $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, $\tilde{u}$ は $i = 0, 1, \cdots, N$ で定義されたスカラー関数で，初期条件は $\tilde{x}_1(0,\varepsilon) = x_1^0$, $\tilde{x}_2(0,\varepsilon) = 0$，評価関数は

$$J_\varepsilon = \tilde{x}_1^2(N,\varepsilon) + \sum_{i=0}^{N-1}\{(1+\varepsilon^2)\tilde{x}_1^2(i,\varepsilon) + \tilde{u}^2(i,\varepsilon)\} \tag{8.2}$$

とする。動的計画法を用いて (6.2) を最小とする最適制御は

$$\tilde{u}^*(i,\varepsilon) = -\tilde{K}(i,\varepsilon)\,\tilde{x}(i,\varepsilon) \tag{8.3}$$

である。ここで，$\tilde{x}(i,\varepsilon) = (\tilde{x}_1(i,\varepsilon),\ \tilde{x}_2(i,\varepsilon))^T$ および

$$\tilde{K}(i,\varepsilon) = \left\{1 + \left(0,\ \frac{1}{\varepsilon}\right)\tilde{P}(i,\varepsilon)\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\varepsilon}\end{pmatrix}\right\}^{-1}\left(0,\ \frac{1}{\varepsilon}\right)\tilde{P}(i,\varepsilon)\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -1 & -\frac{1}{\varepsilon}\end{pmatrix} \tag{8.4}$$

である。$\tilde{P}(i,\varepsilon)$ は Riccati 方程式を満足し，区分けした結果を示せば

$$\left.\begin{aligned} \tilde{P}_1(i,\varepsilon) &= \{1+\tilde{P}_3(i+1,\varepsilon)\}^{-1}\Big[\frac{1}{4}\tilde{P}_1(i+1,\varepsilon) - \varepsilon\,\tilde{P}_2(i+1,\varepsilon) + 1 + \varepsilon^2 + (1+2\varepsilon^2) \\ &\qquad \times \tilde{P}_3(i+1,\varepsilon) + \frac{1}{4}\tilde{P}_1(i+1,\varepsilon)\tilde{P}_3(i+1,\varepsilon) - \frac{1}{4}\{\tilde{P}_2(i+1,\varepsilon)\}^2\Big] \\ \varepsilon\,\tilde{P}_2(i,\varepsilon) &= -\{1+\tilde{P}_3(i+1,\varepsilon)\}^{-1}\Big\{\frac{1}{2}\tilde{P}_2(i+1,\varepsilon) - \varepsilon\,\tilde{P}_3(i+1,\varepsilon)\Big\} \\ \varepsilon^2\tilde{P}_3(i,\varepsilon) &= \{1+\tilde{P}_3(i+1,\varepsilon)\}^{-1}\tilde{P}_3(i+1,\varepsilon) \end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

であり，最適制御は上を用いて

$$\begin{aligned} \tilde{u}^*(i,\varepsilon) = -\{1+\tilde{P}_3(i+1,\varepsilon)\}^{-1}\Big[&\Big\{\frac{1}{2}\tilde{P}_2(i+1,\varepsilon) - \varepsilon\,\tilde{P}_3(i+1,\varepsilon)\Big\}\tilde{x}_1(i,\varepsilon) \\ &- \tilde{P}_3(i+1,\varepsilon)\,\tilde{x}_2(i,\varepsilon)\Big] \end{aligned}$$

$$= \varepsilon \tilde{P}_2(i,\varepsilon)\tilde{x}_1(i,\varepsilon) + \varepsilon^2 \tilde{P}_3(i,\varepsilon)\tilde{x}_2(i,\varepsilon) \tag{8.6}$$

と書き直される。(8.5)の解は有界であると仮定して(仮定0) $\varepsilon=0$ とおくと，第3式，第2式，第1式から順に

$$P_3(i) = 0, \qquad P_2(i) = 0, \qquad P_1(i) = \frac{1}{4}P_1(i+1) + 1 \tag{8.7}$$

となることがわかる。また(8.6)から *full* 系の最適制御は $u^*(i,0) = 0$ となる。

一方，退化系の状態方程式，評価関数はそれぞれ

$$\left.\begin{aligned} \hat{x}_1(i+1) &= \frac{1}{2}\hat{x}_1(i) \\ 0 &= -\hat{x}_2(i) + \hat{u}(i) \end{aligned}\right\}$$

$$J_0 = \hat{x}_1^2(N) + \sum_{i=0}^{N-1}\{\hat{x}_1^2(i) + \hat{u}^2(i)\}$$

であり，初期条件は前のままである。この場合の *Riccati* 方程式は(3.6)式を導いたのと同様にして

$$S(i) = \frac{1}{4}S(i+1) + 1, \qquad S(N) = \Pi_1 = 1$$

であることがわかる。最適制御は明らかに $\hat{u}^*(i) = 0$ である。この系と前の系の「遅い」部分系の最適軌道はともに $x_1(i) = (\frac{1}{2})^i x_1^0$ で一致している。以上は定理5.1，6.1，7.1の主張を例で見た。

次に本来の問題，すなわち *Riccati* 方程式の解の挙動を上の例で調べてみる。端点条件 $P_3(N) = \Pi_3$，$P_2(N) = \Pi_2$ のもとでの(8.5)の第3式，第2式の解はそれぞれ

$$\tilde{P}_3(i,\varepsilon) = \Pi_3\{\varepsilon^{2(N-i)} + \sum_{k=1}^{N-i}\varepsilon^{2k}\Pi_3\}^{-1}$$

$$\tilde{P}_2(i,\varepsilon) = \Pi_2 \ (-2\varepsilon)^{i-N} \prod_{k=1}^{N-i} \{1+\tilde{P}_3(i+k,\varepsilon)\}^{-1}$$
$$+ \sum_{\ell=0}^{N-i-1} \tilde{P}_3(i+\ell+1,\varepsilon)\ (-2\varepsilon)^{-\ell} \prod_{k=1}^{\ell+1} \{1+\tilde{P}_3(i+k,\varepsilon)\}^{-1}$$

である。今考えている例では $\Pi_3 = \Pi_2 = 0$ だから

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \tilde{P}_3(i,\varepsilon) = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \tilde{P}_2(i,\varepsilon) = 0 \quad (i = 0, 1, \cdots, N-1, N)$$

となって(8.7)と一致する。

状態方程式と初期条件は上の例と同じで評価関数として

$$J_\varepsilon = \tilde{x}_1^2(N,\varepsilon) + \varepsilon^2 \tilde{x}_2^2(N,\varepsilon) + \sum_{i=0}^{N-1} \{(1+\varepsilon^2)\tilde{x}_1^2(i,\varepsilon) + \tilde{u}^2(i,\varepsilon)\}$$

ととった場合には，$\Pi_3 \neq 0$ であるから

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \tilde{P}_3(i,\varepsilon) = 1 \ (i = 0, 1, \cdots, N-2), \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \tilde{P}_3(N-1,\varepsilon) = \frac{1}{2},$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \tilde{P}_2(i,\varepsilon) = 1 \ (i = 0, 1, \cdots, N-2), \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \tilde{P}_2(N-1,\varepsilon) = \frac{1}{2}$$

となり，$\varepsilon\to 0$ のとき $\tilde{P}_3(i,\varepsilon)$ $(i = 0, 1, \cdots, N-1)$ は有界でない。なおこの場合でも最適制御は有界である。しかし縮小系のそれには一致しない。$\varepsilon\to 0$ のとき $\tilde{P}(i,\varepsilon)$ が有界であるための十分条件は残された問題である。

## 9. おわりに

特異摂動型離散線形システムの最適制御問題において *full* 系の Riccati 方程式で $\varepsilon=0$ とすると，それは縮小系の Riccati 方程式になり，この結論を用いて，2つの系の最適制御と最適軌道の一致性を調べた。しかし *full* 系の Riccati 方程式の解が $\varepsilon\to 0$ のとき縮小系のそれに近づくことはいえていない。最適

制御と最適軌道についても同様である。特異摂動型常微分方程式で記述される系の最適制御問題では特異摂動型常微分方程式の結果[18]が使えるのに対して，特異摂動型差分方程式の結果は殆んど知られていない。そのため連続系で[2]においてとった立場で上に述べたことを示したのである。§5～§7の証明は省略したが詳細は[19]に発表する予定である。

文献

[1] P.V. Kokotović and P. Sannuti, IEEE Trans. Autom. Contr., 13 (1968), 377.

[2] A.H. Haddad and P.V. Kokotović, IEEE Trans. Autom. Contr., 16 (1971), 279.

[3] P.V. Kokotović and R.A. Yackel, IEEE Trans. Autom. Contr., 17 (1972), 29.

[4] R.R. Wilde and P.V. Kokotović, IEEE Trans. Autom. Contr., 18 (1973), 616.

[5] R.E. O'Malley Jr., Introduction to Singular Parturbations (New York: Academic Press).

[6] V. Drăgan and A. Halanay, Rev. Roum. Sci. Techn.-Electrotechn. et Energ., 21 (1976), 585.

[7] P.V. Kokotović, R.E. O'Malley Jr. and P. Sannuti, Automatica,

12 (1976), 123.

[8] V. Ya. Glizer and M.G. Dmitriev, Diff. Eqs., 14 (1978), 423.

[9] P. K. Rajagopalan and D. S. Naidu, IEE Proc. Pt. D, 127 (1980), 194.

[10] R. G. Phillips, Int. J. Contr., 31 (1980), 765.

[11] P. K. Rajagopalan and D. S. Naidu, Int. J. Contr., 32 (1980), 925.

[12] D. S. Naidu and A. K. Rao, Int. J. Contr., 33 (1981), 953.

[13] G. Blankenship, IEEE Trans. Autom. Contr., 26 (1981), 911.

[14] P. K. Rajagopalan and D. S. Naidu, IEE Proc. Pt. D, 128 (1981), 142.

[15] A. K. Rao and D. S. Naidu, Optim. Contr. Appl. & Methods, 3 (1982), 121.

[16] L. A. Abrahamsson, H. B. Keller and H. O. Kreiss, Numer. Math., 22 (1974), 367.

[17] P. Dorato and A. H. Levis, IEEE Trans. Autom. Contr., 16 (1971), 613.

[18] A. B. Vasil'eva, Russ. Math. Surveys, 18 (1963), 13.

[19] M. Kimura, On the matrix Riccati equation for a singularly perturbed linear discrete control system, to appear.