数理解析研究所講究録
第 486 巻 1983 年 94-98

8. パンルベII型方程式有理関数解を定義する多項式の既約性についての計算機による予想

愛媛大，工　亀高惟倫　(Yoshinori Kametaka)

ヤブロンスキー [1] とボロビエフ [2] により興味深い一系列の多項式

$$P_0 = P_1 = 1, \qquad P_2 = t, \qquad P_3 = t^3 + 4,$$

$$P_4 = t^6 + 20t^3 - 80, \quad P_5 = t^{10} + 60t^7 + 11200t,$$

$$P_6 = t^{15} + 140t^{12} + 2800t^9 + 78400t^6 - 3136000t^3 - 6272000,$$

$$P_7 = t^{21} + 280t^{18} + 18480t^{15} + 627200t^{12} - 17248000t^9 + 1448832000t^6 + 19317760000t^3 - 38635520000,$$

$$P_8 = t^{28} + 504t^{25} + 75600t^{22} + 5174400t^{19} + 62092800t^{16} + 1303948800t^{13} - 828731904000t^{10} - 49723914240000t^7 - 3093932441600000t, \quad \cdots$$

が漸化式

$$(1) \quad \begin{cases} P_0 = P_1 = 1, \\ P_{n-1}P_{n+1} = tP_n^2 + 4P_n'^2 - 4P_nP_n'', \\ P_{-n} = P_{n+1}, \qquad n = 1, 2, 3 \cdots \end{cases}$$

の解として導入された。

$$(2) \qquad q_n = (\log P_n / P_{n+1})'$$

はパンルベII型方程式

$$(3) \qquad q_n'' = 2q_n^3 + tq_n + n$$

をみたし、

$$(4) \qquad p_n = -P_n P_{n+2} / 4P_{n+1}^2 = (\log P_{n+1})'' - t/4$$

とすると $\{q_n, p_n\}$ は戸田方程式

$$(5) \qquad q_n' = p_{n+1} - p_n, \qquad p_n' = p_n(q_n - q_{n+1})$$

をみたす。 P_n は

$$(6) \qquad P_n = \sum_{j=0}^{f(n)} P_{n,j}\, t^{d(n)-3j}$$

$$\left(\quad d(n) = n(n+1)/2 \quad , \quad f(n) = [\,n(n+1)/6\,] \quad \right)$$

の形で整数係数の $d(n)$ 次多項式である。

P_n $(n \leq 23)$ は本質的に既約多項式であることを計算機により<u>証明</u>した。任意の n について既約であると予想される。

既約性が証明されたとすると それはパンルベII型方程式の有理関数解 q_n は2つの既約多項式で表わされるということになり、理論的には意味のあることである。

さて結果を正確にのべよう。

$$(7) \quad P_n(t) = 4^{f(n)} t^{g(n)} F_n(t^3/4)$$

$$\left(g(n) = 1 \quad \text{if} \quad n \equiv 2 \pmod 3, \; = 0 \quad \text{otherwise} \right)$$

なる関係で $f(n)$ 次整数係数多項式

$$(8) \quad F_n(x) = \sum_{j=0}^{f(n)} F_{n,j}\, x^{f(n)-j}$$

$$\left(F_{n,j} = 4^{-j} P_{n,j} \right)$$

が定義されるが

<u>主要定理</u>

F_n の既約因子の個数はそれぞれ次のような素数 p_n を法として1である。

$p_5 = p_6 = 2$, $p_7 = 19$, $p_8 = 17$, $p_9 = 53$, $p_{10} = 167$,
$p_{11} = 251$, $p_{12} = 2$, $p_{13} = 41$, $p_{14} = 37$, $p_{15} = 211$,
$p_{16} = 223$, $p_{17} = 283$, $p_{18} = 191$, $p_{19} = 239$,
$p_{20} = 1447$, $p_{21} = 149$, $p_{22} = 773$, $p_{23} = 211$.

すなわち F_n $(n \leq 23)$ は既約多項式である。

$p_{20} \sim p_{23}$ は特に名古屋市立大学 橋本佳明氏の御協力でおこなった。その他は九大の大型計算機によった。プログラムは E. R. Berlekamp [3] のアルゴリズムにより FORTRAN で簡単に作ることが出来る。

以下 手計算で判定するとどうなるかを見てみよう。

$F_0 = F_1 = F_2 = 1$, $F_3 = x+1$, $F_4 = x^2+5x-5$, は自明。

$F_5 = x^3 + 15x^2 + 175$ は mod (2) で既約。又は

$F_5(x+5) = x^3 + 2\cdot 3\cdot 5x^2 + 3^2\cdot 5^2 x + 3^3\cdot 5^2$ に G. Dumas の方法 [4] を適用してニュートン多角形をかいてみれば既約とわかる。F_6, F_7, F_9 についても係数を素因数分解しておいて Dumas の方法を適用することができる。

一般に多項式 $F(x)$ が与えられたとき $F(x+m)$ (m 整数) を x のべき級数で表わし係数を素因数分解して Dumas の方法で既約かどうか判定するというアルゴリズムが考えられるが、これは大型計算機をもってしてもきわめて非能率である。上記 Berlekamp の方法はある整数係数正方行列の階数を素数を法として計算することが本質的部分であるが、この方法は大型計算機にきわめて向いている。

我々の予想に対して将来理論的解答が得られることを期待するが、その時我々の得たデータは参考になるであろうか。

今の所は 全ての F_n が既約であることを証明することはきわめて困難な問題であるということを示しているにすぎない。
最後に

$$F_n(x,t) = \sum_{j=0}^{f(n)} P_{n,j}\,(3t)^j\, x^{3(f(n)-j)}$$

$$u_n(x,t) = g(n+1)\,x^{-2} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \log F_{n+1}(x,t),$$

$$v_n(x,t) = \bigl(g(n)-g(n+1)\bigr)x^{-1} + \frac{\partial}{\partial x}\bigl(\log F_n(x,t)/F_{n+1}(x,t)\bigr)$$

とすると u_n, v_n はそれぞれ KdV 方程式

$$u_t - 12uu_x + u_{xxx} = 0$$

m-KdV 方程式

$$v_t - 6v^2v_x + v_{xxx} = 0$$

の有理関数解となることを注意しておく。([5])

[1] A.I. Yablonskii Весці АН БССР, серия фіз.-тэхн. навук No3 (1959)

[2] A.P. Vorobiev Differencial'nye Uravnenija 1 (1965) no 1, 79–81

[3] D.E. Knuth The art of computer programming vol 2 Addison-Wesley

[4] ファン デア ヴェールデン 現代代数学 1 東京図書

[5] Y. Kametaka Proc. Japan Acad. (to appear)