数理解析研究所講究録
第487巻 1983年 18-32

Heegaard splittings のある不変量について

津田塾大　菅野仁子(Jinko Kanno)

本稿は、津田塾大の福原真二先生と著者との、Heegaard splittings の invariant についての共同研究を概括したものである。

M^3 を、連結可附向3次元閉多様体とすると、三角形分割可能なことから、M^3 は、種数 g の Heegaard splitting を持つ。この時、Heegaard splittings に対する不変量が、以下のように定義できるが、いわゆる Heegaard diagram から計算可能な行列の class である。以下に、定義と、応用例を述べる。

§1　不変量の定義

まず、Heegaard splitting の定義をする。

定義　種数 g の可附向ハンドル体 T_1, T_2 に対し、$M^3 = T_1 \cup T_2$, $T_1 \cap T_2 = \partial T_1 = \partial T_2$ と表わされる時、M^3 は種数 g の Heegaard splitting を持つと言い、$(M^3; T_1, T_2)$ 又は、$\partial T_1 = \partial T_2 = \mathcal{F}$

として、$(M^3, \mathcal{F})$と書く。□

M^3が、種数gのHeegaard splitting $(M^3; T_1, T_2)$を持つ時、包含写像から成る次のような可換な図式が、存在する。

$$\begin{tikzcd}
 & \partial T_1 \, (=\partial T_2) \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "i"] \arrow[dd, phantom, "\circlearrowright"] & \\
T_1 \arrow[dr, "\alpha'"'] & & T_2 \arrow[dl, "i'"] \\
 & M^3 &
\end{tikzcd}$$

又、次のような群の準同型写像を考える。

$$\begin{tikzcd}
 & & \pi_1(\partial T_1, p) \arrow[dl, "\alpha_*"'] \arrow[dr, "i_*"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & & \\
 & \pi_1(T_1, p) \arrow[dl, "a"'] \arrow[ddr, "\gamma"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & {} & \pi_1(T_2, p) \arrow[dr, "a"] \arrow[ddl, "\beta"'] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\
H_1(T_1) \arrow[drr, "\alpha'_*"'] & {} & & {} & H_1(T_2) \arrow[dll, "i'_*"] \\
 & & H_1(M^3) & &
\end{tikzcd}$$

ここで、基本群の基点pは、$p \in \partial T_1 = \partial T_2$に固定して考えるものとする。$a$は、可換化準同型写像である。上の準同型写像について、群環への自然な拡張準同型写像も、同じ記号で、書くことにする。

次に、Tを種数gのハンドル体、Dを∂T上のある2-diskで、点pを含まないとする時、Tのm-l系を次のように、定

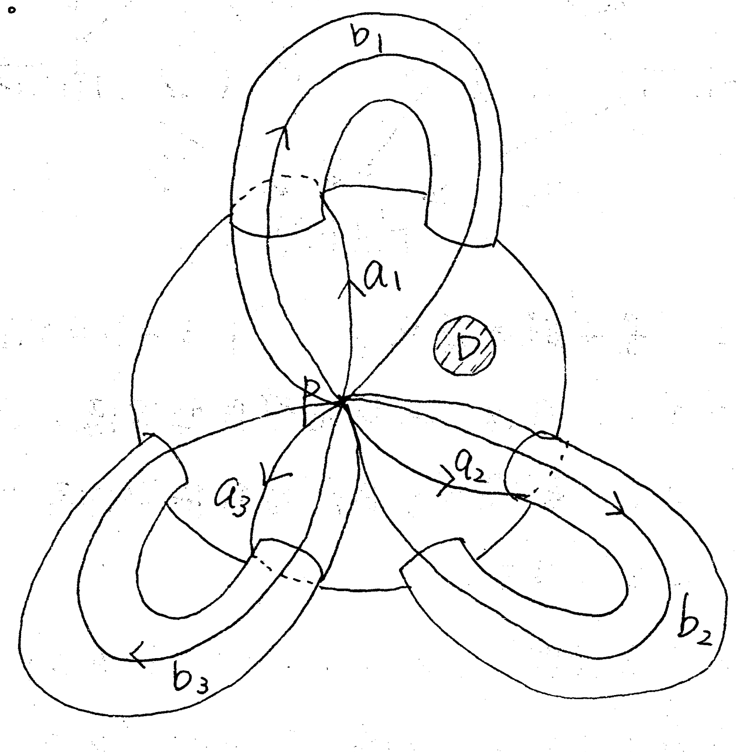
義する。

<u>定義</u> Tを種数gのハンドル体とする。$\partial T - \mathring{D}$上の$P$を通り、どの2つも$P$以外には共通部分を持たない$2g$本の有向単純閉曲線$a_1, \cdots, a_g, b_1, \cdots, b_g$が、次の条件を満たす時$\{a_i, b_i\}_{i=1}^{g}$を<u>$T$のm-l系</u>と呼ぶ。

1) 各a_iは、T内にproperに埋蔵された2-diskの境界になっている。

2) ∂Tを$a_1, \cdots a_g, b_1, \cdots, b_g$に沿って切り開くと、$P$を頂点とする$4g$角形にPL同相で、その辺は、$a_1^{-1}b_1^{-1}a_1b_1 \cdots a_g^{-1}b_g^{-1}a_gb_g$の順に並んでいる。□

Tのm-l系を$g=3$のとき、図で示すと、たとえば、下のようになる。



さて、代数的な定義を少ししておく。

定義（Fox [4]）群Hの群環$\mathbb{Z}H$の元vに対し、$\bar{v}$を次のように定義する。$v=\sum_{x\in H} r_x x$，$r_x\in\mathbb{Z}$の時、$\bar{v}\equiv\sum_{x\in H} r_x x^{-1}$とする。□

定義（Fox [3]）自由群$F(x_1,\cdots,x_n)$の群環$\mathbb{Z}F(x_1,\cdots,x_n)$から自分自身への写像$\partial/\partial x_j$が、次の1) 2)を満たす時、$\partial/\partial x_j$を$\mathbb{Z}F_n$上の$x_j$に関する自由微分と言う。

1) $\dfrac{\partial x_i}{\partial x_j}=\delta_{ij}$（クロネッカーのデルタ）

2) $u, v\in\mathbb{Z}F_n$の時、

$$\frac{\partial(u+v)}{\partial x_j}=\frac{\partial u}{\partial x_j}+\frac{\partial v}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x_j}=\frac{\partial u}{\partial x_j}v^{\circ}+u\frac{\partial v}{\partial x_j}$$

ここで、$v=\sum_{w\in F_n} r_w w$，$r_w\in\mathbb{Z}$ならば、$v^{\circ}=\sum_{w\in F_n} r_w\in\mathbb{Z}$である。□

ここまでの準備のもとに、次のような行列を考えることができるが、後に述べる定理から、その行列のあるclassがHeegaard splittingsの不変量になっていることがわかる。

定義　M^3の種数gのHeegaard splitting $(M^3; T_1, T_2)=(M^3, \mathcal{F})$に対し、$T_1$のm-ℓ系$\{a_i, b_i\}_{i=1}^{g}$と$\pi_1(T_2, p)\cong F(x_1,\cdots,x_g)$を定めることによって定義される次の行列を$A_{\mathcal{F}}(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{X})$と書く。ただし、$a_k^{i*}$は、$a_k$を$\pi_1(T_1, p)$の元と見た時の$i_*$による像$i_*(a_k)$のことである。又、行列の肩に書

いたβは、行列の各成分に施されるものとする。

$$A_{\mathcal{F}}(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial a_k^{i*}}{\partial x_j} \\ \hdashline \dfrac{\partial b_k^{i*}}{\partial x_j} \end{pmatrix}^{\beta}. \qquad \square$$

注）$A_{\mathcal{F}}(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{x})$は、$\mathbb{Z}H_1(M^3)$を係数とする、$2g\times g$行列である。

M^3のひとつのHeegaard splittingに対して、$\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{x}$のとり方は、一意的ではないが、次の定理が成り立つ。

定理１　M^3のHeegaard splitting $(M^3;T_1,T_2)=(M^3,\mathcal{F})$をひとつ固定した時、$A_{\mathcal{F}}(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{x})$と$A_{\mathcal{F}}(\mathbb{a}',\mathbb{b}',\mathbb{x}')$の間には、次の関係がある。

$^{\exists}U, G$; $\mathbb{Z}H_1(M^3)$を係数とする$g\times g$可逆行列で、

$$\det U,\ \det G \in \pm H_1(M^3)$$

$$\text{s.t.}\quad A_{\mathcal{F}}(\mathbb{a}',\mathbb{b}',\mathbb{x}') = \begin{pmatrix} U & O \\ W & {}^{*}U^{-1} \end{pmatrix} A_{\mathcal{F}}(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{x})\,(G)$$

ここで、$U=(u_{ij})$の時、${}^{*}U=(\overline{u_{ji}})$と定める。$\square$

同様なことが、M^3の２つの強同値なHeegaard splittingsから定義される行列$A_{\mathcal{F}}, A_{\mathcal{F}'}$についても、成り立つ。

定義（Birman [2]）　X_gを、種数gの向き付けられたハンドル体とする。X_gを、位相同型写像τで写した像$\tau(X_g)$をX_g'

と書き、X_gからの向きを受け継いでいるものとせよ。その時、∂X_gと$\partial X_g'$を向きを保たない位相同型写像hで、同一視して得られる可附向3次元閉多様体M^3を、種数gのHeegaard splittingによって表現されていると言い、hを貼り合わせ写像と呼ぶ。□

定義 (Birman [2]) M^3の２つのHeegaard splittings $(M^3;T_1,T_2)$, $(M^3;T_1',T_2')$が、強同値であるとは、それぞれの貼り合わせ写像をh, h'とする時、次の図式が可換で、しかも、f_1, f_2は、T_1, T_2への拡張位相同型写像をそれぞれ持つことである。

$$\begin{tikzcd}
\partial T_1 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \partial T_2 \arrow[d, "f_2"] \\
\partial T_1' \arrow[r, "h'"] & \partial T_2'
\end{tikzcd}$$
□

定理 1′ M^3の２つの種数gのHeegaard splittings $(M^3;T_1,T_2)=(M^3,\mathcal{F})$, $(M^3;T_1',T_2')=(M^3,\mathcal{F}')$が、強同値ならば、それぞれに対応する行列$A_{\mathcal{F}}$, $A_{\mathcal{F}'}$には、次の関係がある。

$\exists\, U, G$; $\mathbb{Z}H_1(M^3)$を係数とする$g\times g$可逆行列で、

$$\det U,\ \det G \in \pm H_1(M^3)$$

s.t. $$A_{\mathcal{F}'} = \begin{pmatrix} U & O \\ W & {}^{*}U^{-1} \end{pmatrix} A_{\mathcal{F}} (G)$$ □

従って、$A_{\mathfrak{F}}$ に定理1′の条件を満たす任意の $\begin{pmatrix} U & 0 \\ W & {}^*U^{-1} \end{pmatrix}$ を左から、(G) を右から掛けた行列全体は、M^3 の強同値な Heegaard splittings に対して不変である。これが、不変量の定義である。

定理1′の証明は、定理1の証明と本質的に同じなので、定理1の証明を次の§で述べる。

§2 定理1の証明

Tを種数 g のハンドル体とする時、次の2つの命題が成り立つ。点 $p \in \partial T$ とする。

<u>命題1</u> f をTからTへの位相同型写像で、$f(p)=p$ とする。この時、$\{a_i, b_i\}_{i=1}^{g}$ が、Tの m-l 系ならば、$\{f(a_i), f(b_i)\}_{i=1}^{g}$ もTの m-l 系である。□

<u>命題2</u> $\{a_i, b_i\}_{i=1}^{g}$, $\{a_i', b_i'\}_{i=1}^{g}$ が、Tの2つの m-l 系ならば、TからTへの p を保つ位相同型写像 f が存在して、$f(a_i)=a_i'$, $f(b_i)=b_i'$　$i=1,\cdots,g$ となる。□

また、自由微分に関して、次の事実が知られている。

<u>命題3</u> (Fox [3]) λ を自由群 $F(y_1,\cdots,y_n)$ から自由群 $F(x_1,\cdots,x_m)$ の中への準同型写像、v を群環 $\mathbb{Z}F(y_1,\cdots,y_n)$ の元とすると次が成り立つ。

$$\frac{\partial v^{\lambda}}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial v}{\partial y_k} \right)^{\lambda} \frac{\partial y_k^{\lambda}}{\partial x_j} . \qquad j = 1, \cdots, m. \ \square$$

命題4（Birman[1]）階数 n の自由群 F_n が、二組の自由基底 $x_1, \cdots, x_n$ および $y_1, \cdots, y_n$ を持つ時、$\mathbb{Z}F_n$ の元 v は、2通りに表現できるが、次が成り立つ。

$$\frac{\partial v}{\partial y_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial y_j} \qquad j = 1, \cdots, n. \ \square$$

以上のこと、特に、命題3から次の補題が導かれる。

補題1 $\{a_i, b_i\}_{i=1}^{g}$ を T_1 の m-l 系、f を T_1 から T_1 への位相同型写像で、p を保つとすると、$f(a_i) = a_i'$, $f(b_i) = b_i'$, $\pi_1(T_2, p) \cong F(x_1, \cdots, x_g)$ のとき次が成り立つ。

$$\left(\begin{array}{c} \dfrac{\partial a_i'^{\,i_*}}{\partial x_j} \\ \hline \dfrac{\partial b_i'^{\,i_*}}{\partial x_j} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial a_i'}{\partial a_k} & \dfrac{\partial a_i'}{\partial b_k} \\ \hline \dfrac{\partial b_i'}{\partial a_k} & \dfrac{\partial b_i'}{\partial b_k} \end{array} \right)^{i_*} \left(\begin{array}{c} \dfrac{\partial a_k^{i_*}}{\partial x_j} \\ \hline \dfrac{\partial b_k^{i_*}}{\partial x_j} \end{array} \right) \square$$

そして、次の定理2は、定理1の証明において、一番本質的である。

定理2 $\{a_i, b_i\}_{i=1}^{g}$, $\{a_i', b_i'\}_{i=1}^{g}$ を T_1 の m-l 系とする時、次が成り立つ。ここで、行列の成分は、$\pi_1(T_1, p) \cong F(y_1, \cdots, y_g)$ の群環の元である。

$$\left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial a_i'}{\partial a_k} & \dfrac{\partial a_i'}{\partial b_k} \\ \hline \dfrac{\partial b_i'}{\partial a_k} & \dfrac{\partial b_i'}{\partial b_k} \end{array}\right)^{\alpha_*} = \left(\begin{array}{c|c} U & 0 \\ \hline W & {}^*U^{-1} \end{array}\right)$$

さらに、$\det U \in \pm\pi_1(T_1, p)$ である。□

以下、定理2の証明に没頭する。

<u>補題2</u> $G_H \equiv \left\{ \begin{pmatrix} U & 0 \\ W & {}^*U^{-1} \end{pmatrix} ;\ \begin{array}{l} U, W \text{はHを係数とする} \\ g\times g \text{行列で} U \text{は可逆行列} \end{array} \right\}$

は、行列の積に関して群をなす。ここでHは任意の代数系とする。

<u>補題3</u> 記号は、補題2と同じ仮定のもとに、φを群環Hから群環H'への準同型写像で、Hの任意の元xに対し、$\varphi(\bar{x}) = \overline{\varphi(x)}$ が成り立つものとする。

この時、$({}^*U^{-1})^{\varphi} = {}^*(U^{\varphi})^{-1}$ であって、特に

$$\begin{pmatrix} U & 0 \\ W & {}^*U^{-1} \end{pmatrix}^{\varphi} = \begin{pmatrix} U^{\varphi} & 0 \\ W^{\varphi} & {}^*(U^{\varphi})^{-1} \end{pmatrix} \text{ より } \varphi(G_H) \subset G_{H'}$$

が成り立つ。□

Tを、種数gのハンドル体とすると、次が知られている。

<u>命題5</u>（S. Suzuki [5]） Tの写像類群は、次の6つの位相同型写像で生成される。

h_1：ハンドルの巡回的変換。

$\mathfrak{ft}_2$：Knob の twisting

$\mathfrak{ft}_3$：ハンドルの twisting

$\mathfrak{ft}_4$：2つの knobs の交換

$\mathfrak{ft}_5$：Sliding θ

$\mathfrak{ft}_6$：Sliding ξ □

これらの $\mathfrak{ft}_i$ について、次が成り立つことが、確かめられる。

補題4　$\{a_i, b_i\}_{i=1}^{g}$ を T_1 の m-l 系とする．$\mathfrak{ft}$ を T_1 から T_1 への位相同型写像で、$\mathfrak{ft}_1, \cdots, \mathfrak{ft}_6, \mathfrak{ft}_1^{-1}, \cdots, \mathfrak{ft}_6^{-1}$ のいずれかとする。$a_i' = \mathfrak{ft}(a_i)$，$b_i' = \mathfrak{ft}(b_i)$ とすると次が成り立つ。

$$\left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial a_i'}{\partial a_j} & \dfrac{\partial a_i'}{\partial b_j} \\ \hline \dfrac{\partial b_i'}{\partial a_j} & \dfrac{\partial b_i'}{\partial b_j} \end{array}\right)^{\alpha_*} = \left(\begin{array}{c|c} V & 0 \\ \hline \Omega & {}^{*}V^{-1} \end{array}\right), \quad \det V \in \pm \pi_1(T_1, p).$$

□

上で、両辺は $\mathbb{Z}\pi_1(T_1, p)$ を係数とする $2g \times 2g$ 行列である。命題5より、T_1 から T_1 への任意の位相同型写像 f は $f = \mathfrak{ft}_{i_1}^{e_1} \circ \cdots \circ \mathfrak{ft}_{i_n}^{e_n}$，$i_1, \cdots i_n \in \{1, 2, \cdots 6\}$，$e_j = \pm 1$ と書けるから、n に関する数学的帰納法より、定理2が導かれる。

定理2によって、定理1の左から掛ける行列については解決したが、右から掛ける行列については、次の補題で解決する。補題5の証明は、命題4と、Birman [1] から明らかで

ある。

<u>補題5</u> $\{a_i, b_i\}_{i=1}^{g}$ をT_1のm-l系，$\pi_1(T_2, p) \cong F(x_1, \cdots, x_g)$ $\cong F(x_1', \cdots, x_g')$ とすると，次が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial a_i^{i*}}{\partial x_j'} \\ \hline \dfrac{\partial b_i^{i*}}{\partial x_j'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial a_i^{i*}}{\partial x_k} \\ \hline \dfrac{\partial b_i^{i*}}{\partial x_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_k}{\partial x_j'} \end{pmatrix}$$

しかも，$\det\left(\dfrac{\partial x_k}{\partial x_j'}\right) \in \pm F(x_1', \cdots, x_g')$である。□

§3 応用

§1で定義されたHeegaard splittingsの不変量を使ってレンズ空間のあるものは区別することができる。定理の形で正確に述べると、次のようになる。

<u>定理3</u> $L(p, 1) \cong L(p, q) \Rightarrow q \equiv \pm 1 \pmod p$ □

証明は，連結可附向3次元閉多様体M^3の任意のHeegaard splittingsは，いくつかの自明な分解をつけ加えることによって強同値な分解になる(Reidemeister-Singer)ことを使う。以下，具体的に証明を述べる。

レンズ空間の定義から、$L(p, 1)$, $L(p, q)$という書き方は，種数1のHeegaard splittingをそれぞれ与えている。今，$(g-1)$個の自明な分解をつけ加えることによって，$L(p, 1)$

と $L(p,q)$ は、強同値な Heegaard splittings になったと仮定する。それぞれの Heegaard splittings を記号で次のように書くとする。

$$L(p,1) = T_1 \cup T_2, \quad T_1 \cap T_2 = \partial T_1 = \partial T_2$$
$$L(p,q) = T_1' \cup T_2', \quad T_1' \cap T_2' = \partial T_1' = \partial T_2'$$

$\{a_i, b_i\}_{i=1}^{g}$, $\{a_i', b_i'\}_{i=1}^{g}$ を T_1, T_1' の m-l 系、

$\pi_1(T_2, p) \cong F(x_1, \cdots, x_g)$, $\pi_1(T_2', p') \cong F(x_1', \cdots, x_g')$ とする時、次のようにみなすことができる。

$$a_1^{i*} = x_1^{p},\ a_j^{i*} = x_j \ (j=2,\cdots,g), \qquad b_1^{i*} = x_1,\ b_j^{i*} = 1 \ (j=2,\cdots,g)$$
$$a_1'^{i*} = x_1'^{p},\ a_j'^{i*} = x_j' \ (j=2,\cdots,g), \qquad b_1'^{i*} = x_1'^{q},\ b_j'^{i*} = 1 \ (j=2,\cdots,g)$$

従って、自由微分を行なうと次のようになる。

$$\left(\begin{array}{c} \dfrac{\partial a_k^{i*}}{\partial x_j} \\ \hline \dfrac{\partial b_k^{i*}}{\partial x_j} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1+x_1+\cdots+x_1^{p-1} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \qquad \begin{array}{l} x_1^{\beta} = t^{r},\ (p,r)=1 \\ H_1(M^3) \cong \langle t ; t^p = 1 \rangle \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{c} \dfrac{\partial a_k'^{i*}}{\partial x_j'} \\ \hline \dfrac{\partial b_k'^{i*}}{\partial x_j'} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1+x_1'+\cdots+x_1'^{p-1} & 0 \\ \hline 0 & \\ \hline 1+x_1'+\cdots+x_1'^{q-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \qquad \begin{array}{l} x_1'^{\beta'} = t \\ H_1(M^3) \cong \langle t ; t^p = 1 \rangle \end{array}$$

各成分にそれぞれ β, β' を施した行列を $\begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} R' \\ S' \end{pmatrix}$ と書くことにすると次が成り立つ。

$$R=R'=\left(\begin{array}{c|c}\alpha & \\ \hline & E\end{array}\right),\quad \alpha=1+t+\cdots+t^{p-1},$$ Eは$(g-1)$次単位行列

$$S=\left(\begin{array}{c|c}s & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right),\quad s=1,\qquad S'=\left(\begin{array}{c|c}s' & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right),\quad s'=1+t+\cdots+t^{g-1}$$

$\begin{pmatrix}R' \\ S'\end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix}R \\ S\end{pmatrix}$は定理1'の関係を満たすことから次が成り立つ。

$\exists\, U, G$; $\det U, \det G \in \pm H_1(M^3)$ $\quad U=\left(\begin{array}{c|c}u_{11} & U_{12} \\ \hline U_{21} & U_{22}\end{array}\right),\ G=\left(\begin{array}{c|c}g_{11} & G_{12} \\ \hline G_{21} & G_{22}\end{array}\right)$

s.t. $\begin{pmatrix}U & 0 \\ W & {}^*U^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R' \\ S'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R \\ S\end{pmatrix}(G)$

ゆえに ① $UR=RG$ ($\because R=R'$) ② ${}^*UWR+S'={}^*USG$ ($\because R=R'$)

①より ③ $u_{11}\equiv \pm t^{l} g_{11} \pmod{\alpha}$ $\quad\because)\ \det U=\pm t^{k},\ \det G=\pm t^{m}$

②の(1,1)成分をmod αで比較することを考えて

$s'\equiv \bar{u}_{11}\, s\, g_{11} \pmod{\alpha}$ すなわち $1+t+\cdots+t^{g-1}\equiv \bar{u}_{11} g_{11} \pmod{\alpha}$

③を代入して $\bar{g}_{11} g_{11}\equiv \pm t^{l}(1+t+\cdots+t^{g-1}) \pmod{\alpha}$

ゆえに $\bar{g}_{11} g_{11}\pm t^{l}(1+t+\cdots+t^{g-1})+f(t)(1+t+\cdots+t^{p-1})=0$

両辺に$(1-t)$を掛けて ④ $\bar{g}_{11} g_{11}(1-t)=\pm t^{l}(1-t^{g})$

④でtにt^{-1}を代入すると ⑤ $\bar{g}_{11} g_{11}(1-t)=\pm t^{-l-g+1}(1-t^{g})$

④と⑤を比較して ⑥ $2l\equiv 1-g \pmod{p}$

④で $g_{11}=\sum_{i=0}^{p-1} a_i t^{i}$, $a_i\in\mathbb{Z}$ を代入すると左辺の定数項は

$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{p-1}(a_i-a_{i+1})^2$, ただし $a_p=a_0$, となる。

④において⑥を考慮しながら、右辺の定数項と比較すると、次のように場合分けできる。

1) $l \equiv 0 \pmod{p}$ ならば $q \equiv 1 \pmod{p}$ である。

2) $l+q \equiv 0 \pmod{p}$ ならば $q \equiv -1 \pmod{p}$ である。

3) $l \not\equiv 0$, $l+q \not\equiv 0 \pmod{p}$ ならば、右辺の定数項は、0に等しい。ゆえに、$a_0 = a_1 = \cdots = a_{p-1}$ である。

この時、④の左辺 $= \overline{g_{11}}\, g_{11}(1-t) = a_0^2(1-t)\sum_{i=0}^{p-1} t^i \sum_{i=0}^{p-1} t^{-i} = 0 \quad \because t^p = 1$

従って④の右辺を考えると、$q \equiv 0 \pmod{p}$ でなければならないが、これは仮定に反するので、3)は起こらないことがわかる。//

References

[1] J.S. Birman, An inverse function theorem for free groups, Proc. of the Amer. Math. Soc. (1973), 634-638.

[2] ———, On the equivalence of Heegaard splittings of closed, orientable 3-manifolds, In Knots, groups, and 3-manifolds (L. P. Neuwirth, Editor). Princeton Univ. Press, Annals of Math. Studies No. 84 (1975), 137-164.

[3] R. H. Fox, Free differential calculus. I, Ann. of Math. 57 (1953), 547-560.

[4] ———, Free differential calculus. II, Ann. of Math.

59 (1954), 196-210.

[5] S. Suzuki, On homeomorphisms of a 3-dimensional handlebody, Can. J. Math. (1977), 111-124.

[5'] ———, 閉曲面の写像類群, 数理解析研究所講究録 297 (1977), 1-23.