数理解析研究所講究録
第 487 巻 1983 年 33-42

Graphs in P^2-Containing 3-Manifolds

東工大・理　根上生也（Seiya Negami）

よく知られているように，2つの P^2-irreducible, sufficiently large 3-manifold M^3, N^3 に対して

$$(M^3, \partial M^3) \underset{\text{homotopy equivalence}}{\sim} (N^3, \partial N^3) \Rightarrow M^3 \underset{\text{homeomorphic}}{\approx} N^3$$

が成立する。"P^2-irreducible, sufficiently large" という仮定が M^3, N^3 を aspherical にするので写像の変形が自由にできて上の事実が証明できるのだ。そこで，この仮定から "P^2-" を除去したらどうなるかを考察するのが本稿の目的である。以後，2-Sided な projective plane P^2 を含む 3-manifold は <u>P^2-containing</u> であると言うことにする。P^2-containing, irreducible 3-manifolds に対して上の命題を証明するには Poincaré 予想と大きくかかわるので，そういう大それたことはやめて 3-manifold の homotopy 同値が P^2 の入り方を記述する graph の同相を導くことを示す。また，その graph の応用として P^2-containing, irreducible, closed 3-manifolds の構造は P^2-irreducible closed 3-manifolds 内の knot theory に帰着されることを示す。

1. P^2-Graphs

3-Manifold M^3 の中の disjoint な２つの 2-sided projective plane P_0^2, P_1^2 が parallel であるというのは M^3 内の $P^2 \times I$ の embedding に対して $P^2 \times \{t\} = P_t^2$ ($t=0,1$) となるときである。M^3 の内部の互いに交らない parallel でない 2-sided projective plane の極大な集合を complete system (of 2-sided projective planes in M^3) と呼ぶ。M^3 が compact ならば complete system は有限になる。さらに，M^3 が irreducible ならばそれは ambient isotopy のもとで一意的に決まるので，次のように定義される graph $G(M^3)$ は complete system の取り方によらずに M^3 だけで定まる。

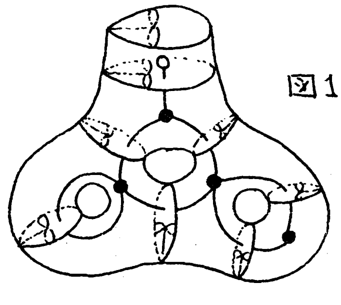


図1.

まず，M^3 を complete system のすべての P^2 で切り開いたときの各 component に対して１つずつ vertex を用意する．特に M^3 の境界上の P^2 を含む component ($\approx P^2 \times I$) に対しては ○，それ以外には ● を割りふる。次に２つの component が M^3 の中で１枚の P^2 をはさんで貼り合うときそれらに対応した vertex を edge で結ぶ。こうして構成された graph を irreducible 3-manifold M^3 の P^2-graph と呼び，$G(M^3)$ と記す。$G(M^3)$ は M^3 の中に各 edge がそれに対応した P^2 と１点で交差するように埋蔵することができる。（図1.）

２つの 2-sided projective plane P_0^2, $P_1^2 \subset M^3$ が $P^2\times I$ と homotopy 同値な M^3 の submanifold Q^3 に対して $\partial Q^3 = P_0^2 \cup P_1^2$ となっているとき P_0^2 と P_1^2 は pseudo-parallel であるという。上の定義で "parallel" を "pseudo-parallel" に変えて，pseudo-complete system と pseudo-P^2-graph $\tilde{G}(M^3)$ を定義する。M^3 が irreducible であろうとも pseudo-complete system の存在は一意的でない可能性はあるが，$\tilde{G}(M^3)$ の graph としてのタイプは一意的に定まる。$G(M^3)$ と $\tilde{G}(M^3)$ は位相空間として見れば同相であるが，pseudo-complete system と complete system の間に差があれば $G(M^3)$ は $\tilde{G}(M^3)$ の細分になり graph としてのタイプは異なる。もしも Poincaré 予想が正しければ $Q^3(\sim P^2\times I)$ は実際に $P^2\times I$ と同相になるので，parallel と pseudo-parallel の差がなくなり $G(M^3)$ と $\tilde{G}(M^3)$ は同じものになることも注意しておこう。

定理１．２つの P^2-containing, irreducible 3-manifold M^3, N^3 に対して $(M^3, \partial M^3) \sim (N^3, \partial N^3)$ ならば $\tilde{G}(M^3)$ と $\tilde{G}(N^3)$ は graph として同型である。

$\tilde{G}(M^3) \approx G(M^3)$ であるからこの定理により初めに述べた事実と見掛け上似ている結論を得る：

$$(M^3, \partial M^3) \sim (N^3, \partial N^3) \Rightarrow G(M^3) \approx G(N^3).$$

定理1の証明のOutline: 基本的には P^2-irreducible, sufficiently large 3-manifold のときのまねをする。ただし hierarchy の代りに pseudo-complete system を使う。$f:(M^3, \partial M^3) \to (N^3, \partial N^3)$ を homotopy 同値写像，$\mathcal{P} \subset N^3$ を N^3 の pseudo-complete system とする。$f^{-1}(\mathcal{P})$ は M^3 の中の 2-sided closed surface の system になると仮定してよい。もしその中に compressible な surface があれば compressing disk に沿った surgery で得られた surface が $\mathcal{P}$ の中に送られるように f を修正する。しかし $\pi_2(N^3) \neq 0$ なので f を M^3 全体からの写像として修正するのは困難である。そこでそれを断念して f を M^3 から何個かの ball を除去したものからの写像にしてしまう。この修正をくり返していくと，最終的には

$$\exists g : (M^3 - \text{balls},\ \partial M^3) \longrightarrow (N^3, \partial N^3)$$

s.t. (i) $g_* : \pi_1(M^3 - \text{balls}) \longrightarrow \pi_1(N^3)$ は同型写像.

(ii) $g^{-1}(\mathcal{P})$ は pseudo-complete system $\mathcal{P}'$ in M^3.

さらに(i)の性質から $\mathcal{P}$ と $\mathcal{P}'$ の間に1対1対応があることがわかり $\mathcal{G}(M^3)$ と $\mathcal{G}(N^3)$ が同型になる。∎

$\mathcal{G}(\cdot)$ がどの程度の invariant なのかは次の定理が示している。

定理2. (i) いくつかの"0"が指定された任意の connected graph G に対して無限個の異なる irreducible, ∂-irreducible 3-

manifold M^3 で $G(M^3)$ が G と同型になるものが存在する。

(ii) M^3 が closed ならば $G(M^3)$ は eulerian である。

(iii) 任意の eulerian graph G に対して無限個の異なる closed, irreducible 3-manifold M^3 で $G(M^3)$ が G と同型になるものが存在する。

ここで eulerian graph とは connected graph で各 vertex の次数（それに接続する edge の個数）が偶数のものである。よく知られているように，そのような graph は一筆描きが可能である。

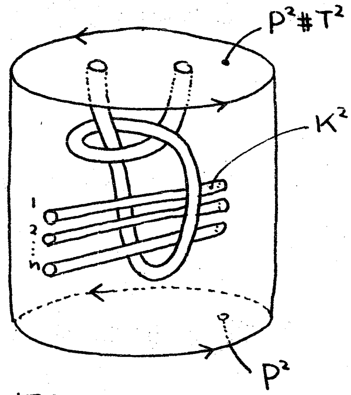
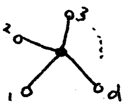


図2.

定理2の証明の Outline：右図は $P^2\times I$ に穴を掘って得られる 3-manifold $R(n)$ を示している。この $R(n)$ は irreducible で ∂-irreducible であり $\mathring{R}(n)$ 内の 2-sided projective plane はすべて底の境界成分の P^2 と parallel になっている。したがって $G(R(n))=$  である。そこで $R(n)$ を d 個用意して境界の Klein bottle に沿って適当に貼り合せると P^2-graph が 

になる irreducible, ∂-irreducible 3-manifold が構成できる。特に d が偶数のときは n を調節して境界の Klein bottle どうし，$P^2\#T^2$ どうしを貼り合せて境界がちょうど d 個の projective plane だけからなる 3-manifold が得られる。

graph G の次数が d の各 vertex に対してこの 3-manifold を用意して境界の projective plane どうしを適当に貼り合せれば(i)(iii)が主張している M^3 が構成できる。さらにれを動かして M^3 内の 2-sided incompressible Klein bottle の個数をふやしてやれば無限個の異なる M^3 が得られる。(ii)は compact 3-manifold N^3 に対して $\chi(N^3) = \frac{1}{2}\chi(\partial N^3)$ ($\chi(\cdot)$ はオイラー数) が成立することから導かれる。$\chi(P^2)=1$ なので closed 3-manifold M^3 を complete system で切り開いたときの各連結成分 N^3 の境界が偶数個の projective plane から成っていないと $\chi(N^3)$ が整数にならない。これから $G(M^3)$ は eulerian になる。■

2. Klein bottle sum と Dehn surgery

定理2が示すように $G(\cdot)$ はあまり強力な invariant ではないが，以下で見るように P^2-containing 3-manifold の構造を理解する1つの目安にはなるだろう。

M^3 を closed 3-manifold，K^2 を M^3 内の 2-sided separating Klein bottle とする。M^3 を K^2 に沿って切断して得られる2つの成分を M_1', M_2' としそれぞれの境界の Klein bottle に solid Klein bottle を貼り合せて得られる closed 3-manifold を M_1, M_2 とする。このとき，M^3 の M_1, M_2 への分解を Klein bottle sum 分解と呼び $M^3 = M_1 \mathbin{\mathcal{S}} M_2$ と記

す。solid Klein bottle の境界上の同相写像が内部まで拡張できるという事実から，M_1 と M_2 の同相型は K^2 だけに依存して決まる。逆に M_1 と M_2 のそれぞれから solid Klein bottle を除去して M_1' と M_2' を作りそれらの境界どうしを貼り合せて M^3 を構成しても貼り合せの写像が一意的でないので（実際は極めて少いが）M^3 も一意的には定まらない。だから $M^3 = M_1 \S M_2$ は "sum" と見るよりも "分解" と考えるべきである。

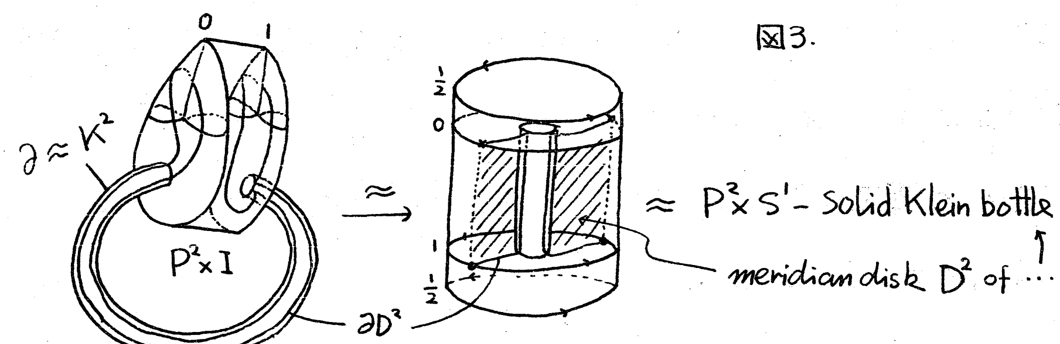


図3.

さて，M^3 を P^2-containing closed 3-manifold，P^2 を M^3 内の 2-sided projective plane としよう。定理２の(ii)と同様の議論から P^2 は M^3 を separate しないことがわかり，P^2 と１点で横断的に交差する simple loop α が存在する。$P^2 \cup \alpha$ の M^3 内の正則近傍の概形は上図のようで $P^2 \times S^1$ から solid Klein bottle を除去したものに同相である。そこでその境界の Klein bottle を K^2 とおけば，M^3 は $M^3 = M_1 \S P^2 \times S^1$ という Klein bottle sum 分解を持つ。ホモロジーの計算から $\dim H_1(M^3; \mathbb{Z}_2) = \dim H_1(M_1; \mathbb{Z}_2) + 1$ がわかるので，有限個の $P^2 \times S^1$ に対して $M^3 = M_1 \S P^2 \times S^1 \S \cdots \S P^2 \times S^1$ となり M_1 を P^2-containing

でなくすことができる。が，実はK^2をうまくとるとその$P^2\times S^1$は1個だけでよい。

定理3. 任意のP^2-containing, irreducible, closed 3-manifold M^3に対してP^2-irreducible closed 3-manifold M_1が存在して

$$M^3 = M_1 \mathbin{\S} P^2\times S^1$$

となる。

証明：定理2の(ii)により$G(M^3)$はeulerianなので一筆描きができることに着目する。$G(M^3)$をM^3に自然に埋蔵してその一筆描きの筆跡に従ってM^3の中にsimple loop αをとる。特にαがorientation-preservingになるようにする。αは1つのM^3のcomplete systemのすべての2-sided projective planeを貫いているのでαからはずれたところには2-sided projective planeはない。これからM^3からcomplete systemの1枚のprojective plane P^2とαの和の正則近傍$\mathcal{U}(P^2\cup\alpha)$を除去したものを$M_1'$とすれば$M_1'$は2-sided projective planeを含まない。さらにM^3がirreducibleだからM_1'はP^2-irreducibleになる。

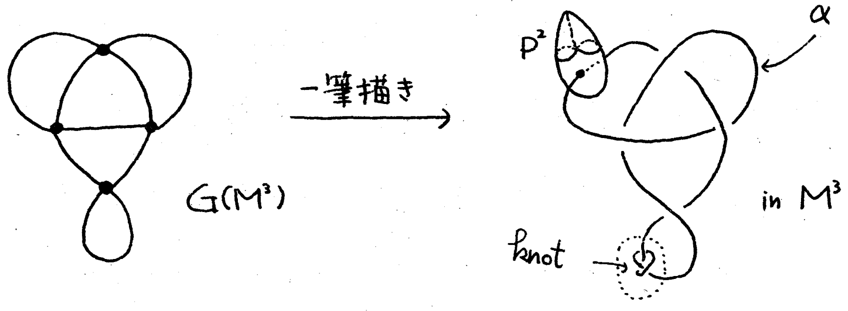


図4

M_1'の境界にsolid Klein bottle ∇ を貼り合せて得られるclosed 3-manifoldを$M_1 = M_1' \cup \nabla$ とすると$M^3 = M_1 \# P^2 \times S^1$ となる。ここまでの仮定ではもしM_1がP^2-irreducibleでなければM_1は2-sided projective planeかballをboundしない2-sphereで∇とその交りが∇のいくつかのmeridian diskであるものが存在する。そこでαに局所的な結び目を作る。特にその結び目をS^3の中のものと考えたときのknot complementがincompressible, ∂-incompressible planar surfaceを含まないようにする。たとえば, torus knotを除いたほとんどの2-bridge knotがそのようなものであることがHatcher-Thurstonによって示されている。このとき図3を見ればわかるように∇のmeridian diskの境界はαの結び目の部分を通過する。一方, 2-sided projective planeまたは2-sphereが∇とmeridian diskで交ればαの結び目の部分の近傍$-\nabla$とはplanar surfaceで交らざるを得ない。これはαに作った結び目の仮定に矛盾することになる。したがって, M_1はP^2-irreducibleになる。∎

定理4. 任意のP^2-containing, irreducible, closed 3-manifold M^3に対して$D^2 \times S^1$を正則近傍にもつM^3内の結び目kが存在して自明でないすべてのkに沿ったDehn surgeryによってP^2-irreducible closed 3-manifoldが与えられる。

証明：kとして定理3の証明の結び目付きのαをとる。同様の議論により，kに沿ったDehn surgery の surgery instructionがαの結び目の部分を通過する限り，即ちそのDehn surgeryが自明でない限り，surgeryの結果得られる3-manifold M_1が含む2-sided projective plane も incompressible 2-sphere もαの近傍とは交わらない。これはαのとり方とM^3がirreducible であることからM_1がP^2-irreducibleであることを意味している。∎

上の２つの定理によりP^2-containing, irreducible, closed 3-manifold M^3はP^2-irreducible closed 3-manifold M_1とその中の結び目kの組に置き換えられた。特にkがorientation-reversingのとき定理３に，orientation-preserving のとき定理４に対応している。しかしながら，M_1が解析しやすいものになる保証がない。そこで，任意の closed non-orientable 3-manifold が $S^2 \otimes S^1$ (= non-trivial S^2-bundle over S^1) から Link に沿った Dehn surgery で与えられるという事実の類推として次の問題を提起して本稿を閉じよう。

問題：任意のP^2-containing, irreducible, closed 3-manifold M^3 はKlein bottle sum分解 $M^3 = S^2 \otimes S^1 \between P^2 \times S^1$ を持つか？

以上