

## Equivariant Sphere Theorem

早大 教育 相馬輝彦 (Teruhiko Soma)

$G$  を集合  $X$  に作用している group とする。  $X$  の部分集合  $Y$  が  $G$ -equivariant であるとは、  $G$  の各元  $g$  に対して  $g \cdot Y = Y$  あるいは  $g \cdot Y \cap Y = \emptyset$  のいずれかが起ることをいう。

3-manifold  $M$  に embed された 2-sphere  $S$  が  $M$  の中の embedded 3-ball を bound しないとき、  $M$  の中で essential であるという。 また 3-manifold が essential 2-sphere を含まないとき、 irreducible であるという。

このノートにおける我々の目的は次の定理を証明することである。 Meeks-Simon-Yau [3] はより一般的な結果を得ているが、ここで与える証明は講演者が独立に考えていたものである。

定理 (Equivariant Sphere Theorem).  $M$  を compact, orientable 3-manifold とする。  $G$  を  $M$  上に orientation preserving  $C^\infty$ -diffeomorphisms として作用している

finite group とする。もし  $M$  が "irreducible" でないならば,  $M$  は  $G$ -equivariant essential 2-sphere を含む。

この定理の応用として次の 2 つの系が得られる。定理から系 1 を証明するのは簡単な練習問題である。系 2 は Sakuma [7, Theorem 2(b)] の議論に上の定理を適用すればよい。

系 1.  $M$  を compact, orientable 3-manifold,  $p: \tilde{M} \rightarrow M$  を finite covering とする。このとき  $M$  が "irreducible" であるための必要十分条件は  $\tilde{M}$  が "irreducible" になることである。

系 2.  $p: M \rightarrow S^3$  を  $S^3$  中の link  $L$  に branch している regular branched covering とする。このとき  $M$  が "irreducible" であるための必要十分条件は  $L$  が "prime" (すなわち non-composite かつ non-splittable) となることである。

## § 1. 準備

このノートの中では常に  $C^\infty$ -category で議論する。またすべての 3-manifolds は orientable であると仮定しておく。

Surface  $F$  中の simple loop  $\ell$  が "essential" であるとは,

$\alpha$  が  $F$  の中で contractible でないことをいう。同様に proper simple arc  $(\alpha, \partial\alpha)$  in  $(F, \partial F)$  が essential であるとは,  $\alpha$  が  $\partial F$  の中のいかなる arc にも homotopic rel  $\partial\alpha$  でないことをいう。

$M$  を compact 3-manifold とし,  $E$  を  $\partial M$  に embed された surface とする。また  $F$  を  $S^2, D^2$  以外の compact surface,  $f: (F, \partial F) \rightarrow (M, E)$  を continuous map とする。もし  $f_*: \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(M)$  が injective であれば,  $f$  は incompressible map と呼ばれる。また  $f_*: \pi_1(F, \partial F) \rightarrow \pi_1(M, E)$  が injective のとき,  $f$  は  $\partial$ -incompressible in  $(M, E)$  であるという。Incompressible map ( $\partial$ -incompressible map)  $f: (F, \partial F) \rightarrow (M, E)$  が embedding であるとき,  $f(F)$  を incompressible ( $\partial$ -incompressible) surface in  $(M, E)$  という。

3-manifold  $M$  が atoroidal であるとは,  $M$  が含む任意の incompressible torus は  $\partial M$  のある component と平行であり, かつ  $M$  が incompressible,  $\partial$ -incompressible annulus を含まないことをいう。

Compact, irreducible 3-manifold が 2-sided incompressible surface を含むとき, Haken manifold という。

$M$  を metric  $g$  を持つ riemannian manifold とし,  $F$  を compact, orientable surface とする。  $f: F \rightarrow M$  を

piecewise smooth map とするとき,  $f$  の area  $A(f)$  を次の式で定義する。

$$A(f) = \int_F \omega$$

ただし,  $\omega$  は  $F$  の local coordinate  $(x, y)$  に対して

$$\omega = \sqrt{|f_x|^2 |f_y|^2 - g(f_x, f_x)} dx dy$$

で定義される 2-form とする ( $|f_x|^2 = g(f_x, f_x)$ )。

Piecewise smooth map  $f: (F, \partial F) \rightarrow (M, E)$  が その proper homotopy class の中の任意の piecewise smooth map  $h$  に対して  $A(f) \leq A(h)$  となるとき least area map であるという。

定理 (Freedman-Hass-Scott [2]).  $M$  を incompressible な境界  $\partial M$  をもつ Haken manifold とし,  $E$  を  $\partial M$  に embed された compact, incompressible surface とする。また  $M$  上に  $\partial M$  が convex となるような riemannian metric が定義されていると仮定する。  $F$  を compact, orientable surface とし,  $f: (F, \partial F) \rightarrow (M, E)$  を incompressible,  $\partial$ -incompressible embedding とするとき, 次の (i), (ii) を満足する least area map  $h: (F, \partial F) \rightarrow (M, E)$  が存在する。

- (i)  $h$  は  $f$  に properly homotopic in  $(M, E)$ 。  
 (ii)  $h$  は embedding であるか, または  $h(F)$  は  $M$  の 1-sided proper submanifold でありかつ  $h: F \rightarrow h(F)$  が double covering になる。

ここで  $\partial M$  が convex とは,  $\partial M$  の各点における mean curvature vector field が zero であるか inward pointing になることをいう。与えられた compact 3-manifold  $M$  上に  $\partial M$  が convex になるような riemannian metric を定義するのは容易である。

$M$  を riemannian 3-manifold とする。また  $F$  を riemannian metric  $\mu$  を持つ compact orientable surface とし,  $f: F \rightarrow M$  を piecewise smooth map とする。このとき,  $f$  の energy  $E(f, \mu)$  を次の式で定義する。

$$E(f, \mu) = \int_F |df|^2 d\mu$$

ただし,  $d\mu$  は  $(F, \mu)$  の area form とする。  $F$  上の 2 つの metrics  $\mu_1, \mu_2$  が同じ conformal structure を定義するとき,  $E(f, \mu_1) = E(f, \mu_2)$  であるのはよく知られている。したがって  $\mu$  の定義する  $F$  上の conformal structure を  $\phi$  とするとき,  $E(f, \mu) = E(f, \phi)$  と書く

ことができる。

## § 2. Equivariant Sphere Theorem の証明

$M$  を compact, 3-manifold とし,  $G$  を  $M$  に orientation preserving  $C^\infty$ -diffeomorphism として作用している finite group とする。  $\partial M$  の component に 2-sphere があるとき, 定理の証明は自明である。

(2.1)  $\partial M$  の各 component は 2-sphere でない と仮定できる。

点  $x \in M$  における  $G$  の isotropy subgroup を  $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$  とする。このとき  $\Sigma = \{x \in M \mid G_x \neq \{1\}\}$  は  $M$  の 1-dimensional subcomplex になる (図 1)。特に  $G$  が free な作用のときは,  $\Sigma = \emptyset$  である。  $N(\Sigma)$  を  $M$  における  $\Sigma$  の  $G$ -invariant regular neighborhood とする (Bredon [1, Chapter VI, Theorem 2.2] 参照)。このとき  $G$  の作用の  $M_1 = M - \text{int } N(\Sigma)$  上への制限は free な作用を定義する。したがって quotient map  $p: M \rightarrow M/G$  の  $M_1$  上への制限  $p|_{M_1}: M_1 \rightarrow M_1/G$  は (unbranched) covering である。 $\bar{\Sigma} = p(\Sigma)$  は  $M/G$  内の 1-dimensional subcomplex となり,

$N(\bar{\Sigma}) = p(N(\Sigma))$  は  $\bar{\Sigma}$  の  $M/G$  における regular neighborhood となる (図 1)。

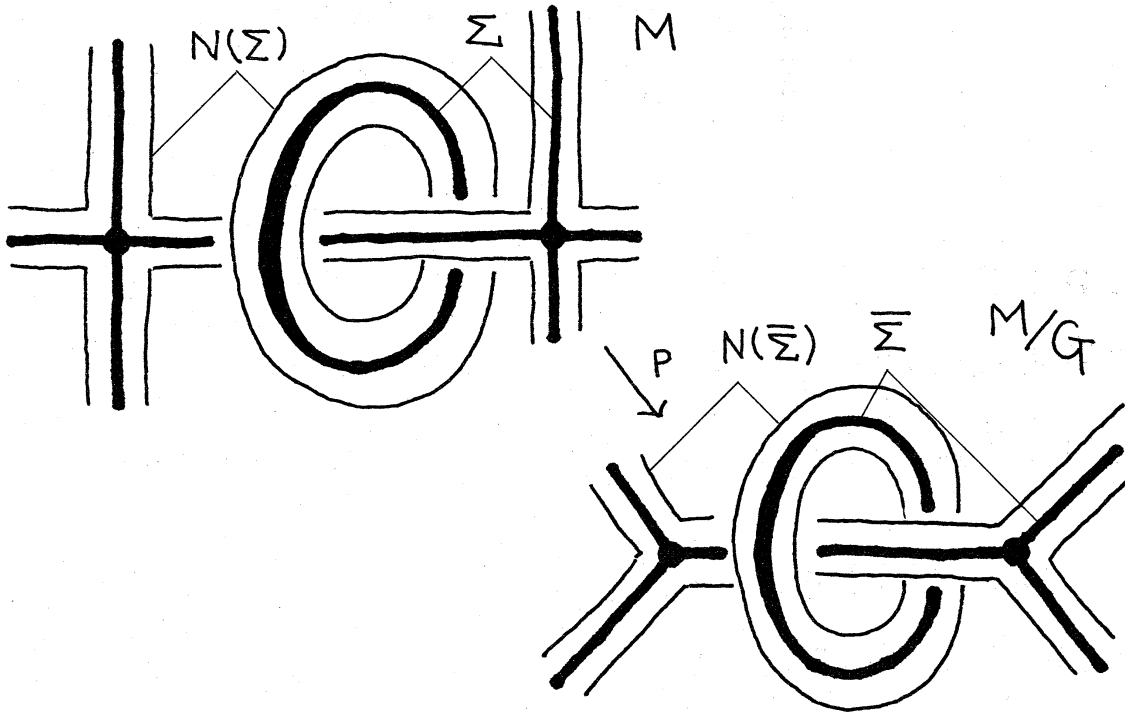


図 1

(2.2)  $\partial(M_1/G)$  の各 component は 2-sphere でない。

証明.  $\partial(M_1/G)$  のある component  $S$  が 2-sphere であるとする。もし  $S \cap \partial N = \emptyset$  ならば,  $S \subset \partial(M/G)$  でありかつ  $p|_{p^{-1}(S)}: p^{-1}(S) \rightarrow S$  は covering になる。  $p^{-1}(S) \subset \partial M$  であるから, これは (2.1) に矛盾する。もし  $S \cap \partial N \neq \emptyset$  ならば,  $S$  は  $\partial N(\bar{\Sigma})$  のある component  $A$  を含む。このとき適当な embedded 2-disk  $(D, \partial D) \subset (M_1/G, A)$  を取れば,  $\partial D$  が  $\bar{\Sigma}$  と 1 点で transverse に交わるような  $N(\bar{\Sigma})$  の中の disk  $D_1$  を bound するようにできる (図 2)。

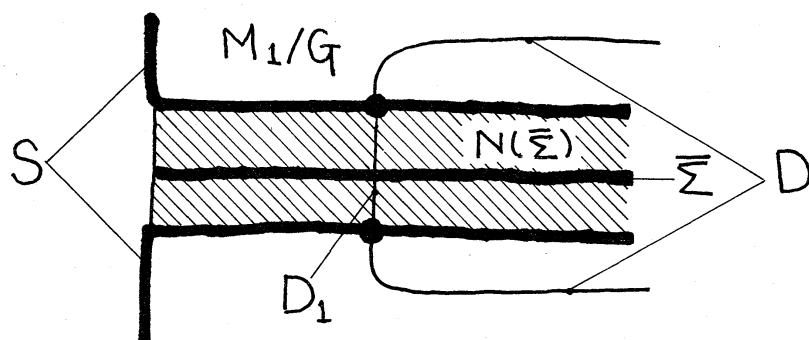


図 2

このとき  $DUD_1$  は  $\bar{\Sigma}$  と transverse に 1 点で交わる  $M/G$  の中の 2-sphere であるが, このような 2-sphere は存在し得ない (Thurston [9, Chapter 13] 参照)。□

Myers [5] より,  $\text{int } M_1/G$  の中の simple loop  $l$  で  $M_1/G - \text{int } N(l)$  が atoroidal, irreducible,  $\partial$ -irreducible になるようなものが存在する。ここで  $\bar{N} = N(\bar{\Sigma}) \cup N(l)$  とおく。

$\bar{\Sigma} \cup l$  の各 simple loop component 上の 1 点を指定しておく。それらの点と  $\bar{\Sigma}$  の vertices 全てからなる集合を  $V$  とし,  $\bar{\Sigma} \cup l - V$  の各 arc component に対して  $\partial \bar{N}$  上に互いに disjoint な embedded annulus を図 3 のように対応させる。このような annuli 全体の和集合を  $\bar{E}$  と書く。(2.2) の証明と同様の議論によって,  $\bar{E}$  が incompressible in  $M/G - \text{int } \bar{N}$  であることを示すことができる。  $E = p^{-1}(\bar{E})$ ,  $N = p^{-1}(\bar{N})$ ,  $C = M - \text{int } N$  とおくと,  $p|_C: C \rightarrow M/G - \text{int } \bar{N}$  は unbranched covering であるから,  $E$  は incom-



pressible in  $C$  であり,  $C$  は irreducible,  $\partial$ -irreducible, atoroidal 3-manifold である。

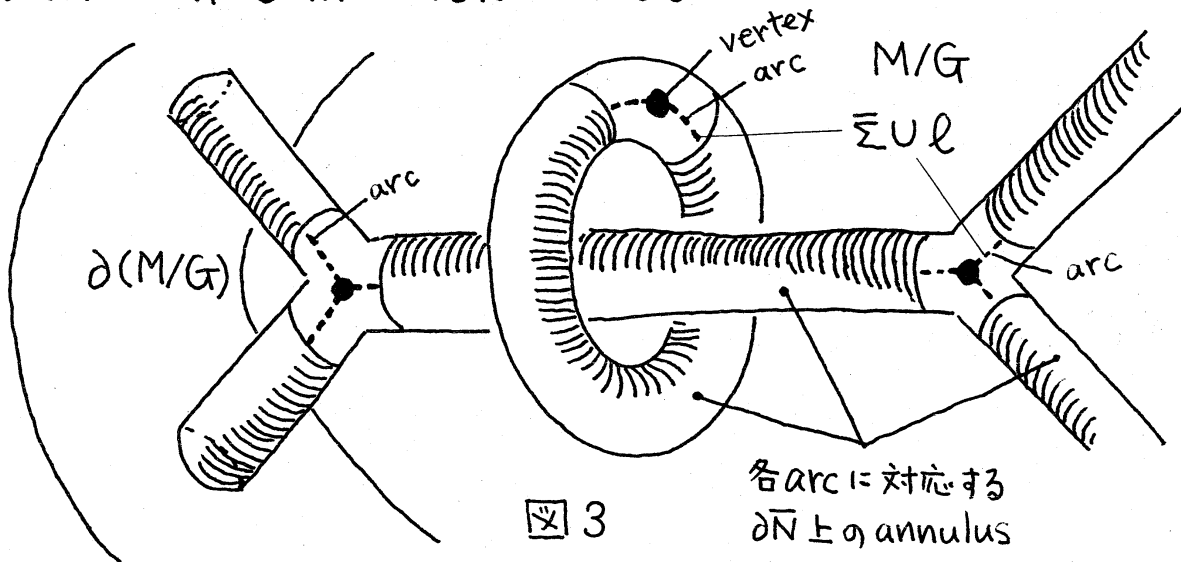


図 3

各arcに対応する  $\partial N$  上の annulus

$S$  を  $M$  に embed された essential 2-sphere とする。もし  $S \cap N = \emptyset$  であれば,  $S \subset C$  となり,  $S$  が essential in  $M$  であることに反する。よって  $S \cap N \neq \emptyset$ 。この  $S$  を  $M$  中の isotopy で動かして  $S \cap \partial N \subset E$  かつ  $S \cap N$  が solid handlebody  $N$  の meridian disks になるようにできる。  $P = S - \text{int}(S \cap N)$  とおくと,  $(P, \partial P)$  は  $(C, E)$  に properly embed された planar surface である (図 4)。

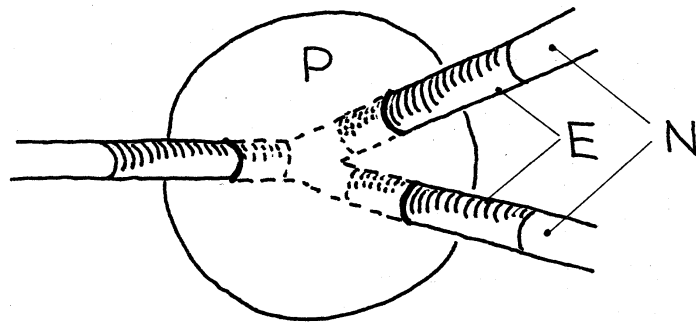


図 4

逆に  $(P, \partial P)$  を  $(C, E)$  内の planar surface とし,  $\partial P$  の各 component  $\partial_i P$  が  $N$  の中の互いに disjoint な meridian disk  $D_i$  を bound するとき,  $P$  は completion 可能であるといい,  $\mathcal{L}(P) = P \cup (\cup_i D_i)$  を  $P$  の completion という。  $\mathcal{L}(P)$  は (isotopy in  $M$  を除けば)  $\{D_i\}$  の取り方によらない。集合  $\mathcal{P}$  を次のように定義する。

$$\mathcal{P} = \left\{ (P, \partial P) \subset (C, E) \mid \begin{array}{l} P \text{ は completion 可能な planar} \\ \text{surface, } \mathcal{L}(P) \text{ は essential in } M \end{array} \right\}$$

上の議論より,  $\mathcal{P} \neq \emptyset$ 。

Topological space  $X$  に対してその connected component の個数を  $|X|$  で表すことにする。

$$\mathcal{P}_0 = \{ P \in \mathcal{P} \mid |\partial P| = n \}$$

とおく。ただし  $n = \min \{ |\partial P| \mid P \in \mathcal{P} \}$ 。  $\mathcal{P}_0$  の各元  $P$  が incompressible,  $\partial$ -incompressible in  $(C, E)$  であることは容易に示される。

(2.3)  $n > 2$ 。

この証明は  $C$  が atoroidal でありかつ  $E$  が incompressible in  $C$  であることより明らか。

これ以後は,  $C$  上には常に  $\partial C$  が convex になるような  $G$ -invariant riemannian metric が定義されているとす

る。このような metric が定義できるのを示すのは容易である (Bredon [1, Chapter VI, Theorem 2.1] 参照)。

$|\bar{P}| = n$  となる planar surface  $\bar{P}$  を 1 つ固定しておく。 $P_0$  の各元  $P$  に対し, embedding  $f_P: \bar{P} \rightarrow C$  で  $f_P(\bar{P}) = P$  になるものを 1 つ対応させる。Freedman-Hass-Scott の定理により,  $f_P$  は least area map  $h_P$  に proper homotopic であり, かつ  $h_P$  は embedding であるか, あるいは  $M$  中の 1-sided submanifold  $h_P(\bar{P})$  上の double covering である。

注意.  $f_P$  に対して, その proper homotopy class の中の least area map は唯一つとは限らないが, その中の 1 つを指定して  $h_P$  とおく。

compact, orientable surface  $F$  から  $M$  への proper immersion の列  $\{f_n\}$  で  $\{A(f_n)\}$  が有界となるものがあるとき, それらの面積  $A(f_n)$  の中で最小のものを求めようとするとき,  $A(f_n)$  の代りに  $f_n$  の energy  $E(f_n)$  を利用する場合がある。 $f_n$  によって  $M$  から induce される conformal structure を  $\delta_n$  とすると,  $A(f_n) = \frac{1}{2} E(f_n, \delta_n)$  となる。もし  $F$  が 2-disk であれば,  $F$  上に定義できる conformal structure は唯一つであるから,  $A(f_n) = \frac{1}{2} E(f_n)$

と書くことができる。しかし一般の場合は  $F$  上に定義できる conformal structure は一意でない。したがって  $\{f_n\}$  に何らかの条件を付けることによって,  $\{\sigma_n\}$  を control しなければならない。Schoen-Yau [8, Theorem 3.1] は各  $f_n$  が incompressible,  $\partial$ -incompressible であれば,  $\{\sigma_n\}$  は  $F$  の moduli  $R(F)$  の中の compact 集合に含まれることを示した。よって, この場合(必要ならば部分列を取ることによって)  $\sigma_n \rightarrow \sigma \in R(F)$  と仮定できる。

(2.4) 補題.  $A(h_{P_0}) = \inf\{A(h_P) \mid P \in \mathcal{P}_0\}$  を満たす  $P_0 \in \mathcal{P}_0$  が存在する。

証明. 補題が成立しないとすると,  $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}_0$  で

$$A(h_1) > A(h_2) > A(h_3) > \dots$$

を満足するものが存在する。ただし  $h_n = h_{P_n}$  とする。  $\sigma_n$  を  $h_n$  によって induce された  $\bar{P}$  上の conformal structure とすると,  $E(h_n, \sigma_n) = 2A(h_n)$  ( $n=1, 2, \dots$ ) は有界である。上で注意したように  $\sigma_n \rightarrow \sigma \in R(\bar{P})$  と仮定できる。  $\{h_n\}$  の部分列  $\{h_{n_k}\}$  で harmonic map  $h \in C^1(\bar{P} - \{z_1, \dots, z_q\})$  に収束するものが存在する (Sacks-Uhlenbeck [6, Theorem 2.3] 参照)。このとき十分大きな  $k, l$  ( $k < l$ ) に対して  $h_{n_k}$  は  $h_{n_l}$  に properly homotopic in  $(C, E)$  になる。  $A(h_{n_k}) > A(h_{n_l})$  であるから,

これは  $h_{n_{\#}}$  が least area map であることに反する。よって補題は証明された。□

$h_{p_0} = h_0$ ,  $\text{Im } h_0 = Q$  とおく。  $(Q, \partial Q)$  は  $(C, E)$  の 1-sided あるいは 2-sided の proper submanifold である。

まず  $Q$  が  $G$ -equivariant であることを示す。もしそうでないならば、  $G$  のある元  $g$  に対して  $Q \neq g \cdot Q$  かつ  $Q \cap g \cdot Q \neq \emptyset$  が成立する。このようなことが起こらないことをいうには、次の3つの場合が成立しないことを示せばよい。

場合1.  $h_0$  は embedding であり、かつ  $Q$  は  $g \cdot Q$  と transverse に交わる。

$C$  の subset  $A$  に対し、  $d \circ A$  で  $A$  とその copy  $A'$  を  $A \cap E$  に沿って貼り合せたものを表わすことにする。特に  $A \cap E = \emptyset$  のとき  $d \circ A$  は  $A$  と  $A'$  の disjoint union である。 Waldhausen [10, Proposition 5.4] により、  $Q$  は  $P_0$  に isotopic in  $(C, E)$  である。よって  $Q \in \mathcal{P}_n$ 。  $Q, g \cdot Q$  を completion するための  $N$  の meridian disks  $\{D_i\}_{i=1}^n, \{\bar{D}_i\}_{i=1}^n$  を適当に取ることによつて、  $\mathcal{S}(Q)$  は  $\mathcal{S}(g \cdot Q)$  に transverse に交わり、かつ  $D_i \cap \bar{D}_i$  は proper arcs in  $D_i (\bar{D}_i)$  のみからなるようにできる。 Minimal surface の標準的議論により次の (2.5) (したがって (2.6)) が示される。

(2.5)  $Q \cap g \cdot Q$  の各 arc (および "loop") component は  $Q, g \cdot Q$  のいずれにおいても essential である。

(2.6)  $\partial Q \cap \partial(g \cdot Q)$  の各 loop component は  $\partial Q, \partial(g \cdot Q)$  のいずれにおいても essential である。

$\mathcal{S}(Q) \cap \mathcal{S}(g \cdot Q)$  の simple loop component で bound される  $\mathcal{S}(Q)$  または  $\mathcal{S}(g \cdot Q)$  の中の各 disk  $D$  に対して, その complexity  $c(D)$  を次の辞書的順序対で定義する。

$$c(D) = (-\chi(\partial(D \cap C)), A(D \cap C)).$$

ここで  $D \cap C$  の代わりに  $\partial(D \cap C)$  の Euler 標数を考えるのは,  $\partial(\partial(D \cap C))$  の各 component が "loop" になり Euler 標数の計算が容易になるからである (図 5)。

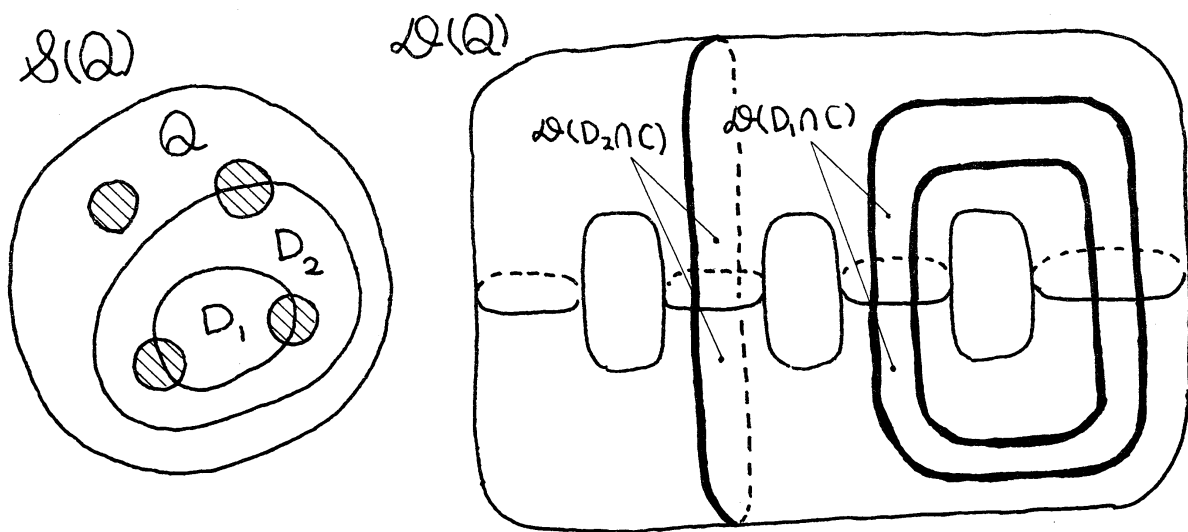


図 5

また  $(C, E)$  に proper に embed された planar surface

(connected でなくてもよい)  $(P, \partial P)$  の complexity を  $c(P) = (-\chi(P), A(P))$  で定義する。  $-\chi(\partial P) = -2\chi(P)$  であることを注意せよ。

$D_1 \subsetneq D_2$  のとき,  $A(D_1 \cap C) < A(D_2 \cap C)$  でありかつ  $\partial(D_1 \cap C) \subsetneq \partial(D_2 \cap C)$  である。このとき  $-\chi(\partial(D_2 \cap C)) = -\chi(\partial(D_1 \cap C)) - \chi(\overline{\partial(D_2 \cap D_1) \cap C})$  であり, (2.6) より  $-\chi(\overline{\partial(D_2 - D_1)}) \geq 0$  であるから,  $-\chi(\partial(D_2 \cap C)) \geq -\chi(\partial(D_1 \cap C))$  となる。したがって  $c(D_1) < c(D_2)$  となる。よって complexity が最小の disk  $D_0$  は inner most disk である。ここで  $D_0 \subset \mathcal{R}(g \cdot Q)$  と仮定してよい。  $\partial D_0$  は  $\mathcal{R}(Q)$  を 2つの disks  $D_1, D_2$  に separate する。  $S_i = D_0 \cup D_i$ ,  $P_i = S_i \cap C$  とおく。少なくとも  $S_1, S_2$  の一方は essential in  $M$  であるが,  $P_1, P_2$  が completion 可能かどうか, あるいは connected であるかどうかも自明でない。

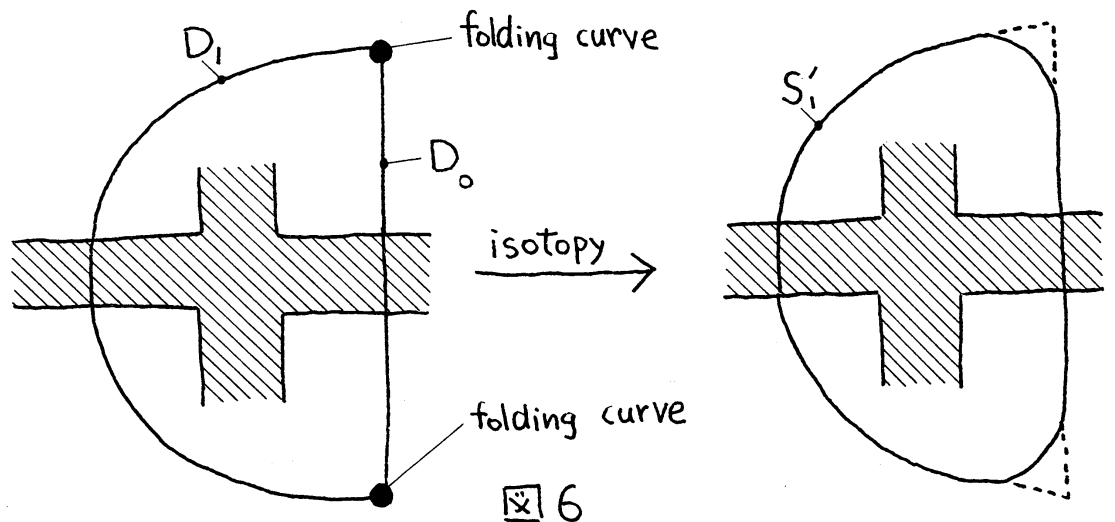
まず  $S_1$  は essential in  $M$  であると仮定してよい。  $c(D_0) \leq c(D_2)$  より,  $c(P_1) \leq c(Q)$  である。

(2.7)  $P_1$  は disk component を持たない。

証明.  $P_1$  が disk component  $\Delta$  を持ったとする。  $\Delta \cap \partial D_0 = \emptyset$  ならば,  $\Delta \subset Q$  (または  $\Delta \subset g \cdot Q$ ) であり,  $\partial \Delta \subset E$  より  $\partial C \subset \partial Q$  (または  $\partial C \subset \partial(g \cdot Q)$ )。よって  $\Delta = Q$  (または  $\Delta = g \cdot Q$ ) となり, (2.3) に矛盾する。  $\Delta \cap \partial D_0 \neq \emptyset$  のとき,

$\Delta$ における $\Delta \cap \partial D_0$ の中の inner most arc (または loop)  $\alpha$  は  $\Delta$  の中の disk  $\Delta_0$  を切り取る。 $\Delta_0$  は  $Q$  (または  $g \cdot Q$ ) に含まれるから,  $\alpha$  は inessential in  $Q$  (または in  $g \cdot Q$ ) となり, (2.5) に矛盾する。よって (2.7) が成立する。□

ここで  $P_1$  は smooth な embedding ではないので, folding curve を持っている。 $P_1$  を  $(C, E)$  の中の適当な  $C^0$ -isotopy で deform することにより, その folding curve を解消して  $A(P'_1) < A(P_1)$  となる planar surface  $P'_1$  が得られる (Meeks-Yau [4, Lemma 7] 参照), (図 6)。 $S_1$  のこの isotopy による結果を  $S'_1$  とする。



このとき  $c(P'_1) < c(Q)$  である。 $P'_1$  が completion 可能でないときは少なくとも次の (a) または (b) が起こる。

(a)  $\partial P'$  のある component が  $E$  で contractible。



このとき  $E$  内の 2-disk  $\Delta$  で  $\Delta \cap \partial P'_1 = \partial \Delta$  となるものが存在する。このとき  $S'_1$  を  $\Delta$  に沿って surgery することによって 2つの 2-spheres  $S_{11}, S_{12}$  が得られる (図7)。

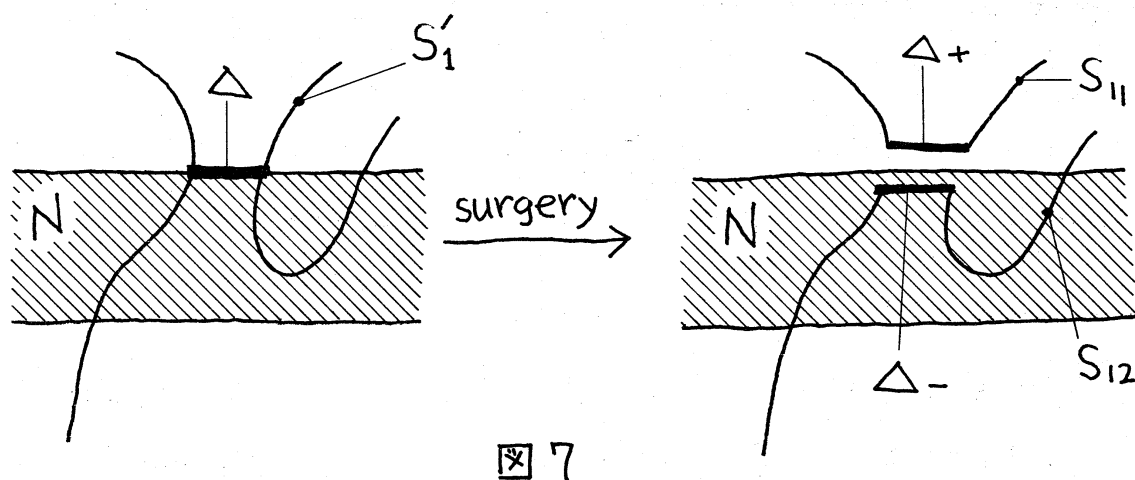


図7

$P_{1i} = S_{1i} \cap C$  とおく。(2.7)より  $-\chi(P_{11}) < -\chi(P'_1)$ ,  $-\chi(P_{12}) \leq -\chi(P'_1)$  かつ  $A(P_{12}) < A(P'_1)$ 。明らかに  $P_{12}$  は disk component を持たない。 $P_{11}$  が disk component  $D$  を持つならば、明らかに  $D \supset \Delta_+$  である。 $E$  は incompressible in  $C$  であるから、 $\partial D$  は  $E$  中の disk  $\Delta_1$  を bound する。 $B$  を  $\Delta_1 \cup D$  によって bound される  $C$  中の 3-ball とする。 $S_{11}$  を  $B$  の  $M$  中での十分小さな近傍  $N(B)$  を support としても  $isotopy$  で deform して、 $D$  を  $N$  中に押し込むようにできる (図8)。 $S_{11}$  のこの isotopy による結果を  $S_{13}$  とし、 $P_{13} = S_{13} \cap C$  とする。 $P_{13}$  は  $P'_1$  の components のいくつかからなる proper subset になる。よって (2.7) より  $-\chi(P_{13}) \leq -\chi(P'_1)$ ,

$A(P_{13}) < A(P'_1)$  である。

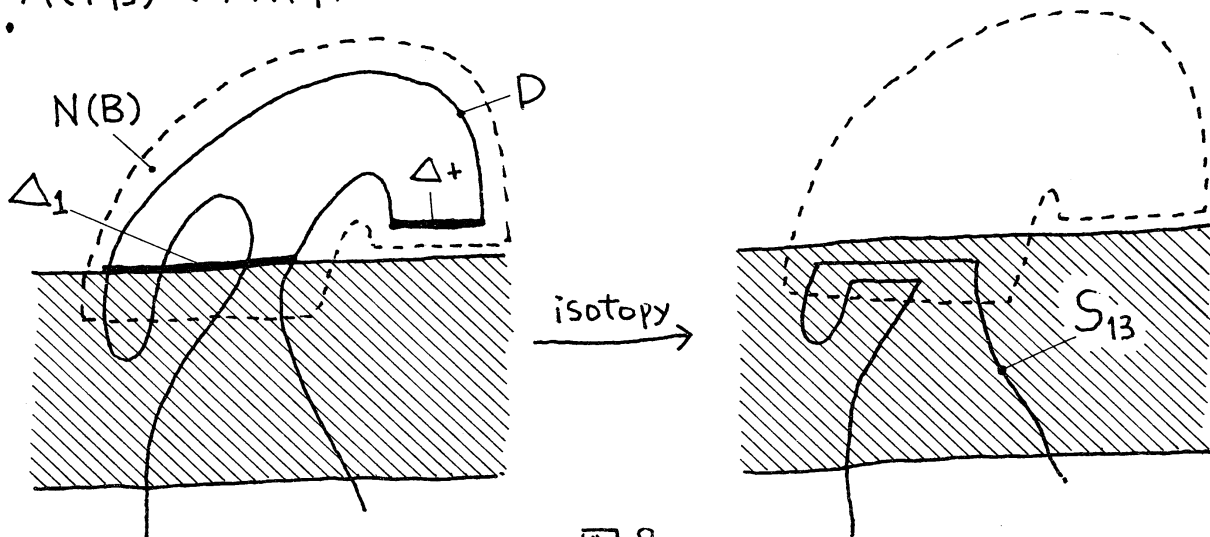


図 8

したがって  $S_{1i}$  ( $i=1, 2, 3$ ) の中の少なくとも 1 つは essential in  $M$  であり,  $P_{1i}$  は disk component を持たず, かつ  $c(P_{1i}) < c(P')$  である。また  $P_{1i}$  の作り方から,  $|P_{1i}| - \chi(P_{1i}) < |P'_1| - \chi(P'_1)$  である。したがって上のような操作は有限回で終り, その結果としてできた 2-sphere を  $S_a$  とすると,  $S_a$  は essential in  $M$ ,  $P_a = S_a \cap C$  は disk component を持たない,  $\partial P_a$  の各 component は essential in  $E$ , かつ  $c(P_a) < c(P')$ 。

$S_a$  が  $P_a$  の completion による 2-sphere でないときは, 次の (b) が起る。

(b)  $S_a \cap N$  の component で disk でないものが存在する。このとき  $S_a \cap N$  は compressible in  $N$  である。 $\Delta$  を  $S_a \cap N$  の  $N$  における compressing disk とする。 $S_a$  を  $\Delta$  に沿って

surgeryすることによって2つの2-spheres  $S_{a1}, S_{a2}$  が得られる(図9)。  $P_{ai} = S_{ai} \cap C$  とおく。

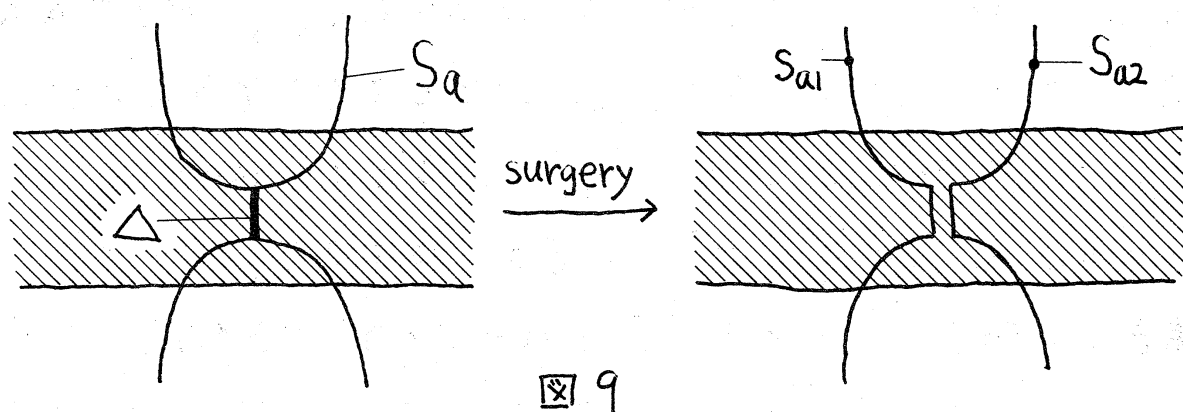


図9

$S_{a1}$  は essential in  $M$  であると仮定できる。 $P_{a1}$  は  $P_a$  のいくつかの components からなる proper subset である。 $P_a$  は disk component を持たないから、 $c(P_{a1}) < c(P_a)$  である。また  $|P_{a1}| < |P_1|$  であるから、このような操作は有限回で終る。その結果できた 2-sphere を  $S_b$  とし、 $P_b = S_b \cap C$  とすると、 $S_b$  は essential in  $M$ ,  $c(P_b) < c(P'_1) < c(Q)$ ,  $S_b \cap N$  は  $N$  の meridian disks。特に  $P_b \in \mathcal{P}$  である ( $P'_1$  に対して (a), (b) が成立しないとき,  $P'_1 = P_b$  とする)。このとき  $c(P_b) < c(Q)$ 。もし  $-\chi(P_b) < -\chi(Q)$  であれば,  $|P_b| < |Q| = n$  となり  $n$  の定義に矛盾する。 $-\chi(P_b) = -\chi(Q)$ ,  $A(P_b) < A(Q)$  であれば,  $P_b \in \mathcal{P}_0$  であるから補題(2.4)に矛盾する。よって場合1は起こり得ない。

場合2.  $h_0$  は embedding であるが,  $Q$  と  $g \cdot Q$  の intersec-

tion は transverse でない。

[4, Lemma 2] より  $Q$  と  $g \cdot Q$  は有限個の点を除いて transverse に交わる。このとき任意の正数  $\varepsilon$  に対して、これらの有限個の点の十分小さな近傍を support としてもつような isotopy によって  $Q$  を動かして  $Q'$  を作り、 $Q'$  は  $g \cdot Q'$  と transverse に交わりかつ  $A(Q') < A(Q) + \varepsilon$  となるようにできる。このときも場合 1 と同様にして  $P_1$  から  $P_1'$  を作ることもできるが、この  $P_1'$  に対して  $A(P_1') < A(P_1) - \varepsilon \leq A(Q') - \varepsilon < A(Q)$  が成立するように上の  $\varepsilon$  を選ぶことができる ([2, Lemma 1.3] 参照)。以下、場合 1 と同様にして場合 2 が起らないことが証明できる。

場合 3.  $h_0: \bar{P} \rightarrow Q$  CM が double covering。

任意の  $\varepsilon > 0$  に対し、 $Q$  の regular neighborhood  $N(Q)$  が存在して、 $Q' = \overline{(\partial N(Q) - \partial N(Q) \cap E)}$  とおいたとき、 $A(Q') < A(h_0) + \varepsilon$  となりかつ  $Q'$  と  $g \cdot Q'$  が transverse に交わるようにできる。この場合も場合 1, 2 と同様にして起らないことが証明できる。

したがって  $Q$  は  $G$ -equivariant である。 $h_0$  が embedding のときは  $Q = P$  とおく。 $h_0$  が double covering のときは、 $Q$  の  $G$ -equivariant regular neighborhood  $N(Q)$  に対して、場合 3 と同様にして作った  $Q'$  を  $P$  とする。いずれの場合も  $P$  は  $G$ -equivariant でありかつ  $P \in \mathcal{P}_0$  である。よって

$\mathcal{S}(P)$  として  $G$ -equivariant であるものが存在する。 $\mathcal{S}(P)$  は essential in  $M$  であるから, これが我々が求めていた 2-sphere である。これで証明を終わる。□

### 参考文献

- [1] G. Bredon, Introduction to compact transformation groups, Academic Press 1972.
- [2] M. Freedman, J. Hass and P. Scott, Least area incompressible surfaces in 3-manifolds (to appear).
- [3] W. Meeks III, L. Simon and S.-T. Yau, Embedded minimal surfaces, exotic spheres, and manifolds with positive Ricci curvature, Ann. of Math. 116 (1982), 621-659.
- [4] W. Meeks III and S.-T. Yau, The classical Plateau problem and the topology of three-dimensional manifolds - the embedding of the solution given by Douglas-Morrey and an analytic proof of Dehn's lemma, Topology 21 (1982), 409-442.
- [5] R. Myers, Simple knots in compact orientable

- 3-manifolds, Trans. A. M. S. 273 (1982), 75-91.
- [6] J. Sacks and K. Uhlenbeck, Minimal immersions of closed Riemannian surfaces, Trans. A. M. S. 271 (1982), 639-652.
- [7] M. Sakuma, On regular coverings of links, Math. Ann. 260 (1982), 303-315.
- [8] R. Schoen and S.-T. Yau, Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three dimensional manifolds with non-negative scalar curvature, Ann. of Math. 110 (1979), 127-142.
- [9] W. Thurston, The geometry and topology of 3-manifolds (to appear).
- [10] F. Waldhausen, On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, Ann. of Math. 87 (1968), 56-88.