数理解析研究所講究録
第489巻 1983年 17-29

第2基本形式がある条件をみたす複素射影空間内のKähler部分多様体

筑波大数学系　高木亮一 (Ryoichi Takagi)

0. 序

定正則断面曲率 c の N-$\dim_{\mathbb{C}}$ 複素射影空間を $P_N(c)$ とする。M を階数 r の compact 型既約 Hermite 対称空間とし，M の $P_N(c)$ への p 番目の正則等長埋め込みを $\iota_p: M \longrightarrow P_{N_p}(pc)$ とする。ι_p の第2基本形式を H とし，M 上の $(1,0)$ 型共変微分を $\overset{+}{\nabla}$ とすると，

$$\underbrace{\overset{+}{\nabla}\cdots\overset{+}{\nabla}}_{pr} H = \overset{+}{\nabla}^{pr} H = 0, \quad \overset{+}{\nabla}^{pr-1} H \neq 0$$

が成立つことが知られている（[4]）。そこで，逆に $P_N(c)$ の Kähler 部分多様体で

(*)　　$\exists m, \quad \overset{+}{\nabla}^{m} H = 0$

をみたすものを分類する問題を考える。ここに，$\overset{+}{\nabla}$, H はそれぞれ M の $(1,0)$ 型共変微分と第2基本形式を表す。

本稿では(*)がMの曲率 tensor Rに関する同様の条件，すなわち，($\exists d$, $\nabla^d R = 0$)と同値であることを示し，余次元が1の場合に(*)をみたすMを分類する。

1. 準備

Mを$P_N(C)$のn-$\dim_{\mathbb{C}}$ Kähler部分多様体とする。添字の動く範囲を

$$\underbrace{\overbrace{1, \cdots, n}^{i, j, k, \cdots}, \overbrace{n+1, \cdots, N}^{\alpha, \beta, \gamma, \cdots}}_{A, B, C, \cdots}$$

と約束する。M上で局所的に定義された$P_N(C)$の unitary 枠 e_A を e_i がMに接するように選ぶ。e_A の対双1次形式を ω^A とし，これに関する接続形式を ω^A_B とすれば，$\omega^\alpha = 0$ であることから，

(1.1) $$\omega^\alpha_i = \sum_j h^\alpha_{ij}\,\omega^j, \quad h^\alpha_{ij} = h^\alpha_{ji}$$

と書ける。$H = \sum_{i,j} h^\alpha_{ij}\,\omega^i\cdot\omega^j$ を e^α方向のMの第2基本形式という。Mの曲率形式は

(1.2) $$\Omega^i_j = +\sum_k \omega^i_k\wedge\omega^k_j + d\omega^i_j$$

と定義されるが，これは

(1.3) $$\Omega^i_j = \sum_{k,l} R^i{}_{jk\bar{l}}\,\omega^k\wedge\bar{\omega}^l$$

と表わせる。Gauss の方程式は

$$(1.4)\qquad R^{i}{}_{jk\bar{l}} = \frac{c}{2}(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}) - \sum_{\alpha} h^{\alpha}_{jk}\bar{h}^{\alpha}_{il}$$

で与えられる。M の Ricci tensor $(S_{i\bar{j}})$ は

$$(1.5)\qquad S_{i\bar{j}} = \sum_{k} R^{k}{}_{i\bar{j}k} = \frac{n+1}{2}c\,\delta_{ij} - \sum_{\alpha,k} h^{\alpha}_{ik}\bar{h}^{\alpha}_{kj}$$

で与えられる。第2基本形式の高次共変微分 $h^{\alpha}_{i_1\cdots i_m}$ を次のようにして帰納的に定義する。

$$(1.6)\qquad \sum_{j} h^{\alpha}_{i_1\cdots i_m j}\,\omega^{j} + \sum_{j} h^{\alpha}_{i_1\cdots i_m\bar{j}}\,\bar{\omega}^{j}$$

$$= d\,h^{\alpha}_{i_1\cdots i_m} - \sum_{r=1}^{m}\sum_{j} h^{\alpha}_{i_1\cdots i_{r-1} j\, i_{r+1}\cdots i_m}\,\omega^{j}_{i_r}$$

$$+ \sum_{\beta} h^{\beta}_{i_1\cdots i_m}\,\omega^{\alpha}_{\beta}\,.$$

このとき次が成立つ。

<u>Lemma</u> 1.1 ([1]).

$$h^{\alpha}_{i_1\cdots i_m\bar{j}} = \frac{m-2}{2}c\sum_{r=1}^{m} h^{\alpha}_{i_1\cdots\hat{i}_r\cdots i_m}\delta_{i_r j}$$

$$-\sum_{r=1}^{m-2}\frac{1}{r!(m-r)!}\sum_{\beta,l,\sigma} h^{\alpha}_{l\, i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(r)}} h^{\beta}_{i_{\sigma(r+1)}\cdots i_{\sigma(m)}}\bar{h}^{\beta}_{lj}\,,$$

ここに，$\sum_\sigma$ は $(1,\cdots,m)$ のすべての置換にわたるものとする。特に，$h^\alpha{}_{i_1\cdots i_m}$ は $i_1,\cdots,i_m$ に関して対称であり，$h^\alpha{}_{ij\bar{k}}=0$ である。

2. 結果と証明

以下，M は $P_N(C)$ の Kähler 部分多様体とし，§1 の記号を用いる。

<u>定義</u> 2.1. M の法ベクトル $\sum_\alpha h^\alpha{}_{i_1\cdots i_m}e_\alpha$ によって張られる複素ベクトル空間を H_m とする。

<u>注</u>. この記号の下で，Lemma 1.1 より

$$\sum_\alpha h^\alpha{}_{i_1\cdots i_m\bar{j}}\,e_\alpha\in H_2+\cdots+H_{m-1}$$

がわかる。

<u>Lemma</u> 2.2. ある正整数 r,ℓ に対して

$$H_r\perp(H_2+\cdots+H_\ell)$$

が成立てば，

(1) $\forall s\geq r$ に対して，$H_s\perp(H_2+\cdots+H_\ell)$

(2) $H_{2r}\perp(H_2+\cdots+H_{\ell+1})$.

<u>証</u> a は $2\leqq a\leqq \ell$ なる $\forall$整数とする。

(1) $H_{r+1} \perp (H_2 + \cdots + H_\ell)$ を示せば十分である。
仮定より

$$\sum_\alpha h^\alpha_{i_1 \cdots i_r} \bar{h}^\alpha_{j_1 \cdots j_a} = 0$$

が成立つが，これを e_k で共変微分して

$$\sum_\alpha h^\alpha_{i_1 \cdots i_r k} \bar{h}^\alpha_{j_1 \cdots j_a} + \sum_\alpha h^\alpha_{i_1 \cdots i_r} \bar{h}^\alpha_{j_1 \cdots j_a \bar{k}} = 0$$

を得る。第二項は Lemma 1.1 と仮定によって 0 である。
よって示された。

(2) (1) より

$$\sum_\alpha h^\alpha_{i_1 \cdots i_{2r}} \bar{h}^\alpha_{j_1 \cdots j_a} = 0$$

が成立つが，これを $\bar{e}_k$ で共変微分して

$$\sum_\alpha h^\alpha_{i_1 \cdots i_{2r}} \bar{h}^\alpha_{j_1 \cdots j_a k} + \sum_\alpha h^\alpha_{i_1 \cdots i_{2r}} \bar{h}^\alpha_{j_1 \cdots j_a} = 0$$

を得る。ここで Lemma 1.1 より第2項は

$$(r-1)c \sum_{b=1}^{2r} h^\alpha_{i_1 \cdots \hat{i}_b \cdots i_{2r}} \delta_{i_b k} \bar{h}^\alpha_{j_1 \cdots j_a}$$

$$- \sum_{b=1}^{2r-2} \sum_{\sigma, \beta, \ell} \frac{1}{b!(2r-b)!} h^\alpha_{\ell i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(b)}} h^\beta_{i_{\sigma(b+1)} \cdots i_{\sigma(2r)}} \bar{h}^\beta_{\ell k} \bar{h}^\alpha_{j_1 \cdots j_a}$$

となるが，この第1項は(1)より 0 となり，第2項は，$b+1 \geqq r$ または $2r-b \geqq r$ が成立つから，やはり 0 となる。よって

$$\sum_{\alpha} t_{\tilde{i}_1 \cdots i_{2r}} \check{t}_{j_1 \cdots j_a k} = 0. \qquad \text{了}$$

定義2.3. $H_d \perp H_2$ なる d に対して，数列 $\{d_i\}$ を

$$\begin{cases} d_{i+1} = 2^{d_i - 2} d_i & (i = 0, 1, 2, \cdots) \\ d_0 = d \end{cases}$$

によって定義する。

Lemma 2.4. ($\exists d$, $H_d \perp H_2$) が成立てばベクトル空間 $H_2, H_d, H_{d_1}, H_{d_2}, \cdots$ は互いに直交する。

証. $H_d \perp H_2$ であるから，Lemma 2.2(2)を $d-2$ 回くり返して使えば，

$$H_{d_1} \perp (H_2 + H_d)$$

がわかる。以下同様にLemma 2.2(2)を適用して

$$\forall i, \quad H_{d_{i+1}} \perp (H_2 + H_{d_0} + \cdots + H_{d_i})$$

がわかる。 了

次の定理は条件(*)の一つの幾何学的意味を与えている。

<u>定理</u> 2.5.

$$(\exists d,\ \overset{+}{\nabla}{}^{d-2}R=0)\Leftrightarrow(\exists m,\ \overset{+}{\nabla}{}^{m}H=0)$$

<u>証</u>. $\Leftarrow$ は (1.4) より明らかである。$\Rightarrow$ を示そう。仮定は (1.4) より $H_d\perp H_2$ と同値である。もし ($\forall m$, $H_m\neq 0$) なら、Lemma 2.4 により、互いに直交する 0 でない法ベクトル空間の部分空間

$$H_2,\ H_d,\ H_{d_1},\ H_{d_2},\ \cdots$$

が無限個得られて矛盾である。 了

<u>注</u>. Kähler C-空間の曲率 tensor R は常に

$$\exists d,\ \overset{+}{\nabla}{}^{d}R=0$$

をみたす ([3]) から、定理 2.5 によって $P_N(C)$ の Kähler 部分多様体としての C-空間はすべて (*) をみたす空間の例である。

次の定理は定理 2.5 の d と m の間の関係を与えている。

定理 2.6. Mは$P_N(C)$の n-$\dim_{\mathbb{C}}$ Kähler 部分多様体で

$$\exists d, \ \overset{+}{\nabla}{}^{d} R = 0, \ \overset{+}{\nabla}{}^{d-1} R \neq 0$$

をみたすとする。このとき,

$$\exists\, m, \ H_m = 0, \ H_{m-1} \neq 0$$

であって, $m \leqq d_{N-n-1}$ をみたす。

証 Lemma 2.4 により, ある i が存在して,

$$H_2, H_d, H_{d_1}, \dots, H_{d_i}$$

は互いに直交する0でない法部分ベクトル空間で, かつ

$$H_{d_{i+1}} = 0$$

となる。これと, 法ベクトル空間の $\dim_{\mathbb{C}}$ が $N-n$ であることから, $i+2 \leqq N-n$ を得る。これと, mとiの定義より

$$m-1 \leqq d_{i+1} - 1 \leqq d_{N-n-1} - 1$$

を得る。 了

最後に余次元が1の場合を考える。

定理2.7 $P_{n+1}(c)$ の Kähler 超曲面 M が ($\exists m$, $H_m=0$) をみたせば，M は超平面か 2次曲面 $x_0^2+\cdots+x_{n+2}^2=0$ に合同である。

証 超曲面を考えるから，添字 α は書く必要がない。また，$m=3$ の場合はすでに解決されている([2])から，$m\geqq 4$ としてよい。

$$h_{\underbrace{i\cdots i}_{m-1}\,i}\neq 0 \quad (\text{resp } h_{\underbrace{i\cdots i}_{m-1}\,i}=0)$$

となる任意の添字 i を a (resp. r) で表す。仮定より $\{a\}\neq\phi$ である。以下，$l=1,\cdots,m-3$ かつ $u=0,1,\cdots,l-1$ とする。Lemma 1.1 により

$$h_{\underbrace{a\cdots a\overbrace{r\cdots r}^{u}}_{m+l}\,\bar{i}}=0$$

は次のように表せる。

$$(E_{l,u})\cdots\cdots \sum_{w=0}^{u}\sum_{t=l+2}^{m-1}\binom{m+l-u}{m+l-t-w}\binom{u}{w}\left(\sum_j h_{j\underbrace{a\cdots a\overbrace{r\cdots r}^{w}}_{m+l-t}}\, h_{\underbrace{a\cdots a\overbrace{r\cdots r}^{u-w}}_{t}}\, h_{ji}\right)=0$$

特に $E_{m-3,0}$ を作れば，

$$\sum_j h_{j\underbrace{a\cdots a}_{m-2}} h_{\underbrace{a\cdots a}_{m-2}} h_{ji} = 0$$

となる。添字 a についての約束より

$$(2.1) \qquad \sum_j h_{j\underbrace{a\cdots a}_{m-2}} h_{ji} = 0$$

を得る。よって $m \geqq 5$ なら $E_{m-4,0}$ を作れば

$$\binom{2m-4}{m-2} \sum_j h_{j\underbrace{a\cdots a}_{m-2}} h_{\underbrace{a\cdots a}_{m-2}} h_{ji}$$

$$+ \binom{2m-4}{m-3} \sum_j h_{j\underbrace{a\cdots a}_{m-3}} h_{\underbrace{a\cdots a}_{m-1}} h_{ji} = 0$$

となり，(2.1) を用いて

$$\sum_j h_{j\underbrace{a\cdots a}_{m-3}} h_{ji} = 0$$

を得る。以下この論法をくり返して，結局

$$(2.2) \qquad \sum_j h_{j\underbrace{a\cdots a}_{l}} h_{ji} = 0, \quad \forall l \geqq 2$$

を得る。次に $E_{m-3,1}$ を作れば

$$\binom{2m-4}{m-2} \sum_j h_{j\underbrace{a\cdots a}_{m-2}} h_{\underbrace{a\cdots a r}_{m-1}} h_{ji}$$

$$+ \binom{2m-4}{m-3} \sum_j h_{j\underbrace{a\cdots a r}_{m-2}} h_{\underbrace{a\cdots a}_{m-1}} h_{ji} = 0.$$

となる。これと(2.2)より

$$\sum_j h_{j\underbrace{a\cdots a}_{m-2}r}\, h_{ji} = 0$$

を得る。このあと $E_{m-4,1},\cdots,E_{1,1}$ を順々に作れば、(2.2)を得たようにして、

$$\sum_j h_{j\underbrace{a\cdots a}_{l}r}\, h_{ji} = 0, \quad \forall l \geq 2 \tag{2.3}$$

を得る。同様に $E_{m-3,2},\cdots,E_{1,2}$ を考えて

$$\sum_j h_{j\underbrace{a\cdots a}_{l}rr}\, h_{ji} = 0, \quad \forall l \geq 2 \tag{2.4}$$

を得る。特に(2.2),(2.3),(2.4)において $l=2$ として

$$\sum_j h_{jkl}\, h_{ji} = 0$$

が得られるが、これは Ricci tensor S が平行であることを意味する。よって高橋(恒)の定理によって $h_{ijk}=0$ となり([5])、Smyth の分類定理に帰着される([2])。

了

注 $P_N(C)$ に正則等長に埋め込まれた Kähler C-空間で

$$\bar{D}^2 H = 0, \quad \bar{D} H \neq 0$$

をみたすものがあることが直接計算で確かめられる。

文献

[1] H. Nakagawa and R. Takagi, On locally symmetric Kaehler submanifolds in a complex projective space, J. Math. Soc. Japan, 28 (1976), 638–667.

[2] B. Smyth, Differential geometry of complex hypersurfaces. Ann. of Math., 85 (1967), 246–266.

[3] R. Takagi, On higher covariant derivatives of the curvature tensors of Kählerian C-spaces, to appear in Nagoya Math. J., 91 (1983).

[4] R. Takagi and M. Takeuchi, Degree of symmetric Kählerian submanifolds of a complex projective space, Osaka J. Math., 14 (1977), 501–518.

[5] T. Takahashi, Hypersurfaces with parallel Ricci tensor in a space of constant

holomorphic sectional curvature, J. Math. Soc. Japan, 19 (1967), 199–204.