数理解析研究所講究録
第489巻 1983年 59-70

On free boundary Plateau problem for general dimensional surfaces

阪大. 理. 中内伸光
(Nobumitsu Nakauchi)

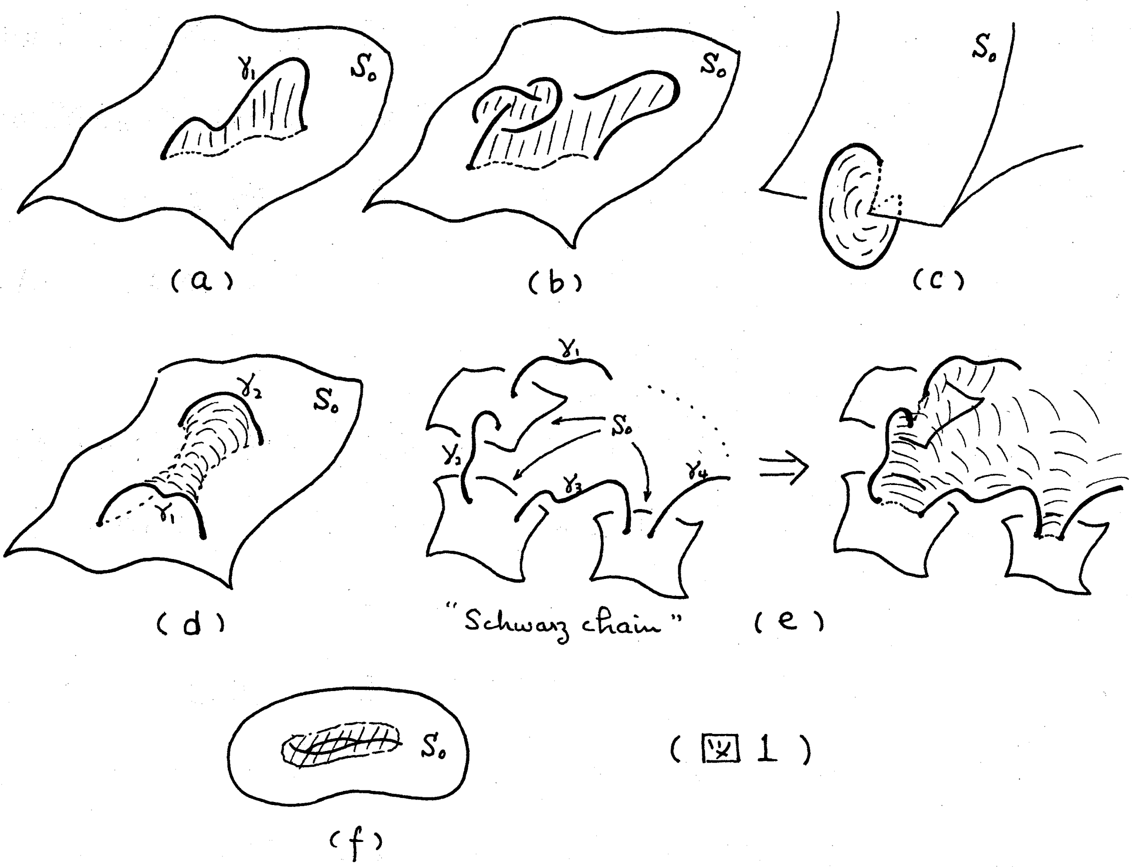
1. (古典的) Plateau問題とは.「$\mathbb{R}^3$の中の与えられたJordan曲線を張る(単連結な)曲面全体の中で面積最小のものを求めよ」というものであり、これは針金に石鹸膜を張って実験を繰り返した19世紀のベルギーの物理学者Plateauにちなんでいる。 この問題を数学的に扱う際、単連結な曲面とは、単位円板$D=\{|z|\leqq 1\}$からの内部でsmoothな連続写像fのことであり、曲面fがJordan曲線γを張るとは、$f|_{\partial D}$がγのparametrizationになっていることである。 fの面積$A(f)$は次で与えられる;

$$A(f):=\iint_{\mathrm{int}\,D}\sqrt{\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|^2\cdot\left\|\frac{\partial f}{\partial y}\right\|^2-\left\langle\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right\rangle^2}\,dxdy \quad (z=x+iy)$$

このような設定のもとでの面積最小解の存在は、1930年代にRadó及びDouglasによって与えられた。

2. それと平行して、Plateau問題の様々な拡張が行われたが、その一つは自由境界問題である。 これも古くから考えられてきたものであり、例えば、Plateau問題における

Jordan曲線γを，図1における様なcompactな連続曲面S_0（Jordan曲線と同様に，一般には滑らかさは仮定しない。$\partial S_0 = \phi$でも$\neq \phi$でも良い。）と，その上に端点をもつ有限個のJordan弧$\gamma_1, \cdots\cdots, \gamma_k$に置きかえた状況のもとで，$\gamma_i$ ($i=1,\cdots,k$) を境界の一部分とし，境界の残りの部分はS_0上にのっている（単連結な）曲面全体の中で面積最小のものを求めよ（"部分的自由境界問題"）とか，あるいは，S_0上に境界がすべてのっている（可縮でない，単連結な）曲面全体の中で面積最小のものを求めよ（"全自由境界問題"）というものである。



（図1）

3. Plateau問題のもう一つの拡張は、曲面の高次元化である。 これも現在まで幾通りかの方法で扱われている。Plateau問題の定義をもう一度振返ってみよう：「$\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^n$) の中の与えられたJordan曲線①を張る③曲面①全体の中で面積最小②のものを求めよ。」 この定義を見ると、3つの要素

① object

② objectに付随する量

③ object間の関係

が含まれていることがわかるが、逆に、この3要素を指定することがPlateau問題（あるいは、もっと一般のこのような変分問題）の扱い方を定めることになると思われる。 ただ高次元の場合は、2次元のときのような扱いは望むべくも無く、象徴的に言うと、"map"としてではなく、"set"としての側面を取り上げ、曲面の位相型にこだわらないことが一般に要求される。

4. さて、「自由境界問題（2次元）」と「曲面の高次元化」を見たとき、一般次元自由境界問題をどう設定するかというのは自然な問いである。 一般次元のPlateau問題は、既に様々な方法で扱われているから、自由境界問題の設定には、まずobjectとして何を採用するかということからはじめれば良い。 自由境界部分の挙動の複雑さ、例えば、2次元

の場合でさえ、S_0の形状によっては、それほどpathologicalでなくとも、面積最小解の自由境界が連続曲線でないことすらあり得る）を考慮すると、粗朴な点集合としての扱いが適切であるように思われる。　実は、1960年頃、E. R. Reifenbergが、上の言い方に従うと

① compact set

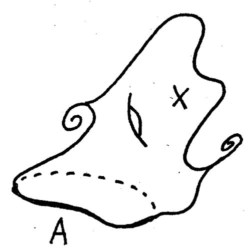
② Hausdorff measure

③ homological condition

として、一般次元plateau問題を設定し、解の存在と正則性（内部でa.e. real analytic）を導いている。　ここで、③について説明しよう。　以下、ambient spaceは$\mathbb{R}^n$とする。Gを係数群たるcompact abelian group、Aを境界となるcompact set、Γを$H_{m-1}(A;G)$のsubgroupとする。　このとき、曲面たるcompact set X ($\stackrel{i}{\hookleftarrow}$ A)に対して、

$$K = \mathrm{Ker}\{i_* : H_{m-1}(A;G) \longrightarrow H_{m-1}(X;G)\}$$

を彼は、"algebraic boundary"と呼んだ。

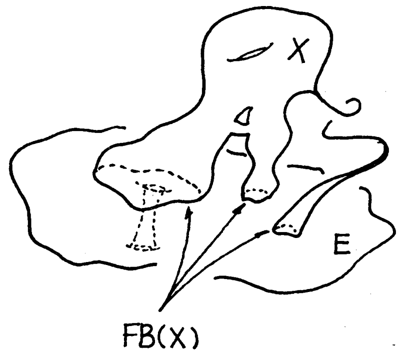


（図2）

これは、XがAを張っている部分をhomologicallyに定量的にあらわしたものであると見れる。　K ⊃ Γのとき、Xは"surface with boundary ⊃ Γ"であると呼び（以下、これを"XはΓを張る"と呼ぶことにする。）、Γを張る曲面（= compact set) 全体を $\mathcal{G}(\Gamma)$ としたとき. $\mathcal{G}(\Gamma)$ の中で m 次元体積 (= m 次元 Hausdorff measure) 最小問題を設定し. 解いたのである。

5. そこで. この考えに沿って. 自由境界問題の一つの設定をしてみよう。 G は. 同じく係数群たる compact abelian group とし. E を (自由) 境界たる compact set とする。 Γ を $H_{m-1}(E\,;G)$ の subgroup としよう。 曲面たる compact set X に対して. $FB(X) := X \cap E$ が. ちょうど曲面 X の E 上の (自由) 境界に相当するものである。 このとき. 包含写像

$$\begin{tikzcd} FB(X) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, hook, "j"] & X \\ E & \end{tikzcd}$$



(図3)

から

$$\begin{tikzcd} H_m(X, FB(X)\,;G) \arrow[r, "\partial"] & H_{m-1}(FB(X)\,;G) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "j_*"] & H_{m-1}(X\,;G) \\ & H_{m-1}(E\,;G) & \end{tikzcd}$$

が induce される。 そこで. X が Γ を " freely に張る " とは. $j_*(\mathrm{Ker}\, i_*)$ $(= \mathrm{Im}(j_* \circ \partial))$ $\supset \Gamma$ のことであると定義し. Γ を freely に張る compact set 全体を $\mathcal{G}_{free}(\Gamma)$

と書くことにする。 また、X の m 次元体積を

$$Vol^m(X) := \mathcal{H}^m(X \setminus FB(X))$$

（但し、$\mathcal{H}^m$ は m 次元 Hausdorff measure）

で定義する。 このとき、次が成り立つ。

定理. $\mathcal{J}_{free}(\Gamma) \neq \Phi$ であれば、$\mathcal{J}_{free}(\Gamma)$ には、m 次元体積最小のものが存在し、さらに、$\mathcal{H}^m$- a.e. real analytic にとれる。

まず、$\mathcal{J}_{free}(\Gamma)$ には、$\mathcal{J}(\Gamma)$ と同様、Hausdorff distance で距離が入ることに注意する。 定理の証明は、存在については、次の２つの step からなる。

step 1： $\mathcal{J}_{free}(\Gamma)$ は、局所点列 compact である。

step 2： 次を満たすような $\mathcal{J}_{free}(\Gamma)$ の列 $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ がとれる；

(イ) $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ は最小列、即ち、

$$\lim_{i\to\infty} Vol^m(X_i) = \inf\{Vol^m(X) \,;\, X \in \mathcal{J}_{free}(\Gamma)\}$$

(ロ) $B(P, r) \cap FB(X_i) = \Phi$, $P \in X_i$ ならば、

$$Vol^m(X_i \cap B(P, r)) \geq \alpha(m) r^m$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{但し、} \\ B(P,r) := \{Q \in \mathbb{R}^n \,;\, |Q-P| < r\} \\ \alpha(m) := \text{unit } m\text{-ball の体積} \end{array}\right)$$

"freelyに張る"というのは．Reifenbergの"張る"とは異なり．（homologyの準同型の）Kernelのみならず．Imageも介入するので．一般には都合が悪いと思われる点があるが．この場合は．objectがcompact setであり．homologyがČech homologyであるということが効いていて．step 1が示される。 step 2は．点集合の収束列に対してm次元体積が一般には下半連続にならないため．必要な部分である。この2つのstepが示された後．step 2の列$\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$は．step 1により．ある$X_\infty \in \mathfrak{J}_{free}(\Gamma)$に収束し．step 2の条件から．$X_\infty$が．最小体積をもつことが示されて．存在が言える。

解の正則性については．このように構成した解が求める正則性をもつことが．Reifenbergの議論（[3]）に従って証明できるが．そのような正則性をもつ最小解がとれれば良いという立場からは．彼のPlateau問題の解の存在と正則性を用いて．次のようにしても良い： まず．上の最小解X_∞の存在の前提の下で．compact set $FB(X_\infty)$を境界と思って

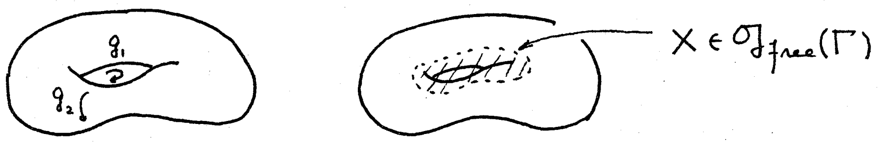
$$\Gamma_0 := \mathrm{Ker}\{ i_* : H_{m-1}(FB(X_\infty); G) \longrightarrow H_{m-1}(X_\infty; G) \}$$

に対して．（Reifenbergの）Plateau問題を解くと．解$X^* \in \mathfrak{J}(\Gamma_0)$が得られる。 このとき．明らかに $\mathrm{Vol}^m(X^*) \leqq \mathrm{Vol}^m(X_\infty)$である。 一方．$X_\infty \in \mathfrak{J}_{free}(\Gamma)$, $X^* \in \mathfrak{J}(\Gamma_0)$より$X^* \in \mathfrak{J}_{free}(\Gamma)$であることがわかり．$\mathrm{Vol}^m(X_\infty) \leqq$

$Vol^m(X^*)$となる。 したがって、X^*も我々の自由境界問題の解であることになり、さらに、X^*はReifenbergの解だから求める正則性をもつ。

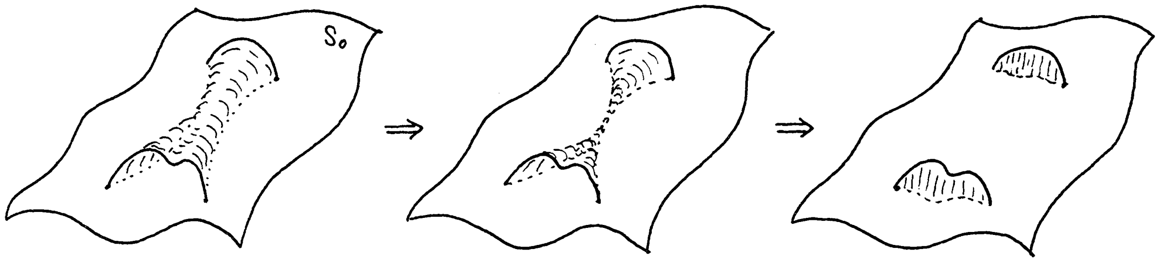
6．最後に、2次元の簡単な例を少し見てみよう。

例えば、図1の(f)のトーラスS_0をEとしよう。 $H_1(E;G) = \langle g_1 \rangle \oplus \langle g_2 \rangle$であるが、$\Gamma = \langle g_1 \rangle$として$\mathcal{G}_{free}(\Gamma)$を考えると、トーラスの穴を張る曲面はすべて$\mathcal{G}_{free}(\Gamma)$になる(図4)。



(図4)

2.で述べたような部分的自由境界問題に対しても、$E = S_0 \cup \gamma_1 \cup \cdots\cdots \cup \gamma_k$と置くことによって適用できる。 例えば、図1の(d)の場合を考えてみよう。 曲面を単位円板からの写像として扱ったときは、面積最小解の存在は一般には保証されない。(存在・非存在は、S_0, γ_1, γ_2の形及び配置にdependする。) 2つのJordan弧γ_1, γ_2の距離がγ_1, γ_2の直径に比べてある程度大きくなると、図5におけるように、タイプ1の曲面よりタイプ2の曲面(2つの曲面に退化)の面積の方が小さくなってしまうからである。

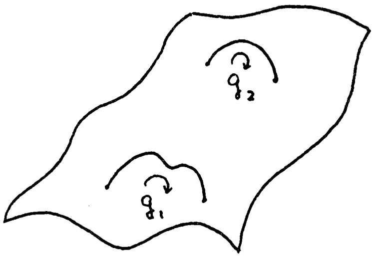


タイプ1　　　　　　　　　　　　　　タイプ2

（図5）

classicalには、タイプ2のような退化を避けるため、退化曲面の面積の下限をA′、タイプ1のような曲面の面積の下限をAとしたとき、「A < A′」という仮定の下で、タイプ1、即ち、求める設定の面積最小解の存在が示された。「A < A′」のような条件は、一般に"Douglas condition"と呼ばれる。

そこで、これを我々の設定で考えてみよう。Eとして、$S_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$ にとる。$H_1(E;G) = \langle g_1 \rangle \oplus \langle g_2 \rangle$ である（図6）。

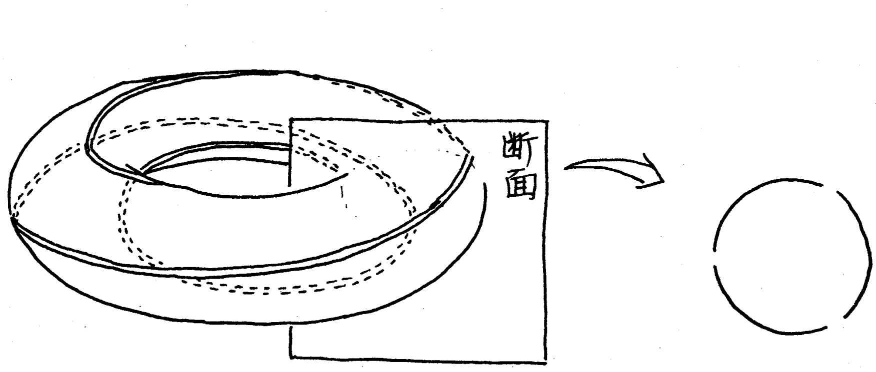


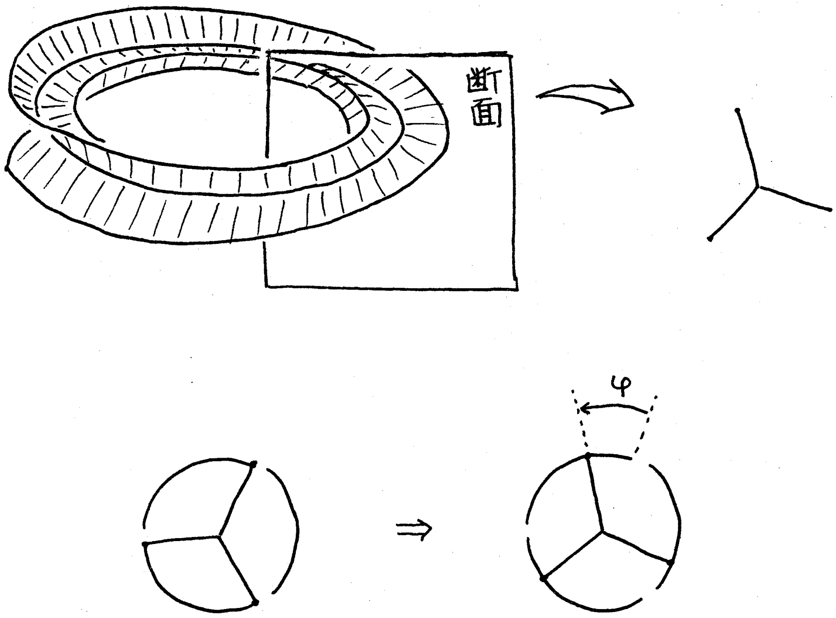
（図6）

そこで、$\Gamma := \langle g_1 - g_2 \rangle$ とおくと、タイプ1及びタイプ2の曲面はいずれも $\mathfrak{G}_{free}(\Gamma)$ に属する。$\mathfrak{G}_{free}(\Gamma)$ における面積

最小解の存在は、退化・非退化（位相型）は不問として、最小なものが存在するということを示している。

さて、これまであまり取立てて触れなかったが、homologyの係数群 G は compact abelian group であり、実際上、概ね $G=\mathbb{Z}_2$ とする。即ち、比較族では non-orientable な曲面も許容する立場である。ただ、$G=\mathbb{Z}_2$ のみかというと、そうでもない。$G=\mathbb{Z}_3$ の例を一つ見てみよう。図7における様な E に対して、ねじれ3枚羽（triple Möbius band）X を考える。X の境界は Jordan 曲線で、X はそれを境界とする面積最小解であり、これは、J. F. Adams によるものである。図のように、角度 φ だけ回転させた Adams の"曲面"（境界は E 上にのっている）を X_φ とすると、X_φ はすべて $\mathcal{J}_{free}(\mathbb{Z}_3)$ に属することがわかる（$H_1(E;\mathbb{Z}_3)\cong H_1(S^1;\mathbb{Z}_3)\cong\mathbb{Z}_3$）。さらに、それらはすべて $\mathcal{J}_{free}(\mathbb{Z}_3)$ における面積最小解であり、各 X_φ は X_0 を角度 φ だけ回転して得られるから、解の連続family（"block"）になる。





（図７）

《参考文献》

[1] E.R. Reifenberg : Solution of the Plateau problem for m-dimensional surfaces of varying topological type, Acta Math. 104 (1960) 1−92.

[2] E.R. Reifenberg : An epiperimetric inequality related to the analyticity of minimal surfaces, Ann. of Math. 80 (1964) 1−14.

[3] E.R. Reifenberg : Analyticity of minimal surfaces, Ann. of Math. 80 (1964) 15−21.

[4] N. Nakauchi : On free boundary Plateau problem for general dimensional surfaces, preprint.