数理解析研究所講究録
第489巻 1983年 71-83

Hermitian symmetric space の cut locus について

筑波大数学研究科　田崎博之
(Hiroyuki Tasaki)

1．序

完備Riemann多様体Mとその点Pに対して，MのPにおけるcut locusを$C_P(M)$と書くことにする。単連結compact対称空間のcut locusについては次のことが知られている。

定理（Crittenden[2]）．単連結compact対称空間Mとその点Pに対して，$C_P(M)$はMのPにおけるfirst conjugate locusに一致する。

必ずしも単連結ではないcompact対称空間のcut locusは，次のSakai[5]による定理で決定された。

定理1．Mをcompact対称空間とし，Pをその点とする。AがPを通るMの極大全測地的平坦部分多様体ならば，

(1)　　$C_P(M) \cap A = C_P(A)$

が成り立つ。さらに，（U，K）がRiemann対称対で$M=U/K$，$K \cdot P = P$を満たせば，

(2) $C_p(M)=\bigcup_{k\in K} k\cdot C_p(A)$ 。

この定理を使って，Sakai [6]，Takeuchi [8]，[9] は compact 対称空間の cut locus の stratification を与えている。

本稿の主目的は次の定理を証明することである。

定理2． M_1，M_2 を compact 型 Hermite 対称空間とし，さらに M_2 は複素射影空間に正則等長的に埋め込まれているとする。M_1 が M_2 に正則等長的に埋め込まれているならば，M_1 の各点 P に対して，

$$C_p(M_1)=M_1\cap C_p(M_2)$$

が成り立つ。

定理1において A は M の全測地的部分多様体だから，(1) は A における測地線の cut point が M においても cut point であることを主張している。他方定理2では M_1 は必ずしも M_2 の全測地的部分多様体ではないので，$C_p(M_1)=M_1\cap C_p(M_2)$ は集合としての等式を主張しているにすぎない。

定理2の証明のおもな部分は，M_2 が複素射影空間の場合に主張を示すことである（定理6）。その準備として，2節で compact 型 Hermite 対称空間 $M=U/K$ に対して，原点 O を通るある正則な全測地的部分多様体 P を構成する。この P は，$P^1(\mathbb{C})\times\cdots\times P^1(\mathbb{C})$ に同型で，

$$C_o(M)=\bigcup_{k\in K} k\cdot C_o(P)$$

を満たす。したがって，問題を$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\times\cdots\times\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$の複素射影空間への正則等長埋め込みの場合に帰着させることができ，この場合を直接証明する。

2．準備

Mをcompact型Hermite対称空間とする。この節では，Mの極大全測地的平坦部分多様体AとAを含む正則な全測地的部分多様体Pを構成する。証明を与えていない事実に関しては，Helgason[3] 参照。

$(\mathfrak{u},\theta)$をMに対応するorthogonal symmetric Lie algebraとする。$\mathfrak{u}$の標準直和分解を得る。

$$\mathfrak{u}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$$

ここで，

$$\mathfrak{u}=\{X\in\mathfrak{u}:\theta(X)=X\},\quad \mathfrak{p}=\{X\in\mathfrak{u}:\theta(X)=-X\}。$$

$\mathfrak{k}$の極大可換部分代数$\mathfrak{t}$を一つとる。$\mathfrak{u}$，$\mathfrak{k}$，$\mathfrak{p}$，$\mathfrak{t}$の複素化をそれぞれ$\mathfrak{g}$，$\tilde{\mathfrak{k}}$，$\tilde{\mathfrak{p}}$，$\tilde{\mathfrak{t}}$と書くことにする。すると$\tilde{\mathfrak{t}}$は$\mathfrak{g}$のCartan 部分代数になる。Δを$\tilde{\mathfrak{t}}$に関する$\mathfrak{g}$のroot全体とし，各$\alpha\in\Delta$ に対して

$$\mathfrak{g}^{\alpha}=\{X\in\mathfrak{g}:{}^{\forall}H\in\tilde{\mathfrak{t}}\ \ [H,X]=\alpha(H)X\}$$

とおく。$\tilde{\mathfrak{t}}\subset\tilde{\mathfrak{k}}$だから，各root αに対して，$\mathfrak{g}^{\alpha}\subset\tilde{\mathfrak{k}}$または$\mathfrak{g}^{\alpha}\subset\tilde{\mathfrak{p}}$が成り立つ。$\mathfrak{g}^{\alpha}\subset\tilde{\mathfrak{k}}$のとき$\alpha$をcompactと呼び，$\mathfrak{g}^{\alpha}\subset\tilde{\mathfrak{p}}$

のときαをnoncompactと呼ぶ。$\mathfrak{g}$のroot空間分解から,

$$\tilde{\mathfrak{k}} = \tilde{\mathfrak{t}} + \sum_{\alpha:\text{compact}} \mathfrak{g}^{\alpha}, \quad \tilde{\mathfrak{p}} = \sum_{\beta:\text{noncompact}} \mathfrak{g}^{\beta}$$

を得る。各rootは$\sqrt{-1}\mathfrak{t}$上実数値をとるから，実線形空間$\sqrt{-1}\mathfrak{t}$の双対空間に辞書式順序を入れるとΔの元に正負が定まる。

Qを正のnoncompact root全体とし，rをMの階数とする。すると，$\gamma_i \pm \gamma_j \notin \Delta$ $(1 \leq i, j \leq r)$を満たす$\{\gamma_1, \cdots, \gamma_r\} \subset Q$が存在する。各root $\alpha \in \Delta$に対して，次の条件を満たす0でない元$X_\alpha \in \mathfrak{g}^{\alpha}$が存在する。

(3) $\quad X_\alpha - X_{-\alpha}, \ \sqrt{-1}(X_\alpha + X_{-\alpha}) \in \mathfrak{u}$,

(4) $\quad [X_\alpha, X_{-\alpha}] = \dfrac{2}{\alpha(H_\alpha)} H_\alpha$。

ただし，H_αは$\mathfrak{g}$のKilling形式に関するαの双対元とする。

$\gamma_i \pm \gamma_j \notin \Delta$だから，$i \neq j$なる$i$，$j$に対して,

(5) $\quad [X_{\pm\gamma_i}, X_{\pm\gamma_j}] = [H_{\pm\gamma_i}, X_{\pm\gamma_j}] = 0$。

したがって,

(6) $\quad \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{R}\sqrt{-1}(X_{\gamma_i} + X_{-\gamma_i})$

とおくと，$\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$は$\mathfrak{p}$の極大可換部分空間になる。

UをLie代数が$\mathfrak{u}$であるような単連結Lie群とする。$\mathfrak{k}$に対応するUの解析部分群をKとおく。Mは単連結だから,

$$M = U/K$$

となる。UのMへの作用は，正則等長的である。

oをM=U/Kの原点とし,

$$A=\exp(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})\cdot o$$

とおくと，$\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$は$\mathfrak{p}$の極大可換部分空間だから，AはMの極大全測地的平坦部分多様体になる。

次に，

$$\begin{bmatrix} & 1\\ -1 & \end{bmatrix}\longmapsto X_{\gamma_i}-X_{-\gamma_i}\quad,\quad\begin{bmatrix} & \sqrt{-1}\\ \sqrt{-1} & \end{bmatrix}\longmapsto\sqrt{-1}(X_{\gamma_i}+X_{-\gamma_i})$$

$$\begin{bmatrix}\sqrt{-1} & \\ & -\sqrt{-1}\end{bmatrix}\longmapsto\frac{2\sqrt{-1}}{\gamma_i(H_{\gamma_i})}H_{\gamma_i}$$

によって線形写像$\phi_i:\mathfrak{su}(2)\longrightarrow\mathfrak{u}$を定める。(3)，(4)より，$\phi_i$は$\mathfrak{u}$へのLie代数準同型になる。(5)より，$i\neq j$なる$i$，$j$に対して，

$$[\phi_i(\mathfrak{su}(2))\ ,\ \phi_j(\mathfrak{su}(2))]=\{0\}$$

だから，$\mathfrak{su}(2)$のr個の直和$\mathfrak{su}(2)^r$から$\mathfrak{u}$への単射Lie代数準同型ϕを

$$\phi(X_1,\cdots,X_r)=\sum_{i=1}^{r}\phi_i(X_i)\quad,\quad X_i\in\mathfrak{su}(2).$$

によって定義できる。ϕが誘導する$SU(2)$のr個の直積$SU(2)^r$からUへのLie群準同型もϕで表わすことにする。

すると，ϕはequivariantな正則埋め込み

$$\rho:SU(2)^r/S(U(1)\times U(1))^r\longrightarrow M$$

$$x\,S(U(1)\times U(1))^r\longmapsto\phi(x)\cdot o\quad,\ x\in SU(2)^r,$$

を誘導する。$SU(2)/S(U(1)\times U(1))=\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$に注意すると，

$SU(2)^r/S(U(1)\times U(1))^r$は自然に$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$の$r$個の直積$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})^r$と同一視されることがわかる。

埋め込み$\wp:\mathbb{P}^1(\mathbb{C})^r\longrightarrow M$の像を$P$と書くことにすれば，$\phi$の定義と(6)より

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}\subset\phi(\mathfrak{su}(2)^r)$$

となり，Aの定義より，

$$A\subset P。$$

また，$\phi(\mathfrak{su}(2)^r)$は$\mathfrak{u}$の部分代数で，

$$\phi(\mathfrak{su}(2)^r)=\mathfrak{k}\cap\phi(\mathfrak{su}(2)^r)+\mathfrak{p}\cap\phi(\mathfrak{su}(2)^r)$$

だから，PはMの全測地的部分多様体である。埋め込み$\wp$はequivariantなので，Mから誘導されるPの計量は$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$上のHermite対称計量のRiemann積になる。

Cartanの定理より，

(7) $$M=\bigcup_{k\in K}k\cdot A$$

となり，したがって，

$$M=\bigcup_{k\in K}k\cdot P。$$

この節をまとめると，次の命題を得る。

命題3．a)　AはMの原点oを通る極大全測地的部分多様体である。

b)　$P\cong\mathbb{P}^1(\mathbb{C})^r$は$M$の正則全測地的部分多様体で$A$を含み，その計量は$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$上のHermite対称計量のRiemann積に等し

い。

c) $M = \bigcup_{k \in K} k \cdot P$ 。

埋め込みρはTakagi and Takeuchi[7]によって複素射影空間の対称Kähler部分多様体のdegreeを決定する際に使われた。

3．定理２の証明

まず，定理２の主張を$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$から$\mathbb{P}^d(\mathbb{C})$へのVeroneseの埋め込みι_dに対して示す。$[z_0, z_1]$，$[w_0, w_1, \cdots, w_d]$をそれぞれ$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$，$\mathbb{P}^d(\mathbb{C})$の同次座標とすると，Veroneseの埋め込みι_dは，

$$\iota_d[z_0, z_1] = \left[\sqrt{{}_dC_j}\; z_0^{d-j} z_1^{j}\right]_{0 \leqslant j \leqslant d}$$

によって定義される。$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$，$\mathbb{P}^d(\mathbb{C})$の標準計量に関して，ι_dは$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$の$\mathbb{P}^d(\mathbb{C})$への正則等長埋め込みになる。

$$C_{[1,0]}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) = \{[0,1]\},$$

$$C_{[1,0,\cdots,0]}(\mathbb{P}^d(\mathbb{C})) = \{[w_0, w_1, \cdots, w_d] \in \mathbb{P}^d(\mathbb{C}) : w_0 = 0\}$$

だから，$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$の点をι_dによる像と同一視すれば，

$$C_o(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cap C_o(\mathbb{P}^d(\mathbb{C}))。$$

ただし，$o = [1, 0]$。

次に，定理２の主張を$\mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$から$\mathbb{P}^{mn+m+n}(\mathbb{C})$へのSegreの埋め込み$\sigma$に対して示す。$[x_i]_{0 \leqslant i \leqslant m}$，$[y_j]_{0 \leqslant j \leqslant n}$，

$[z_{ij}]_{0\leq i\leq m,\,0\leq j\leq n}$ をそれぞれ$\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$，$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$，$\mathbb{P}^{mn+m+n}(\mathbb{C})$の同次座標とすると，Segreの埋め込み$\sigma$は，

$$\sigma([x_i]_{0\leq i\leq m},[y_j]_{0\leq j\leq n})=[x_i y_j]_{0\leq i\leq m,\,0\leq j\leq n}$$

によって定義される。$\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, $\mathbb{P}^{mn+m+n}(\mathbb{C})$の標準計量に関して$\sigma$は$\mathbb{P}^m(\mathbb{C})\times\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$から$\mathbb{P}^{mn+m+n}(\mathbb{C})$への正則等長埋め込みになる。$\mathbb{P}^m(\mathbb{C})\times\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の cut locusは，

$$\begin{aligned}&C_{([1,0,\cdots,0],[1,0,\cdots,0])}(\mathbb{P}^m(\mathbb{C})\times\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))\\&=C_{[1,0,\cdots,0]}(\mathbb{P}^m(\mathbb{C}))\times\mathbb{P}^n(\mathbb{C})\cup\mathbb{P}^m(\mathbb{C})\times C_{[1,0,\cdots,0]}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))\\&=\{([x_0,\cdots,x_m],[y_0,\cdots,y_n])\in\mathbb{P}^m(\mathbb{C})\times\mathbb{P}^n(\mathbb{C}):x_0y_0=0\}\end{aligned}$$

だから，$\mathbb{P}^m(\mathbb{C})\times\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$の点を$\sigma$による像と同一視すれば，

$$C_o(\mathbb{P}^m(\mathbb{C})\times\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))=\mathbb{P}^m(\mathbb{C})\times\mathbb{P}^n(\mathbb{C})\cap C_o(\mathbb{P}^{mn+m+n}(\mathbb{C}))。$$

ただし，$o=([1,0,\cdots,0],[1,0,\cdots,0])$。

これを使うと次の補題を示すことができる。

補題4．M，Nをそれぞれ$\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$，$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$の完備Riemann部分多様体とし，$p\in M$，$q\in N$とする。$o=(p,q)$とおく。

$$C_p(M)=M\cap C_p(\mathbb{P}^m(\mathbb{C}))\ ,\ C_q(N)=N\cap C_q(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$$

が成り立つと仮定する。Segreの埋め込みによって$\mathbb{P}^m(\mathbb{C})\times\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$は$\mathbb{P}^{mn+m+n}(\mathbb{C})$の部分多様体とみなせるので，$M\times N$もまた$\mathbb{P}^{mn+m+n}(\mathbb{C})$の部分多様体とみなせる。このとき，

$$C_o(M\times N)=M\times N\cap C_o(\mathbb{P}^{mn+m+n}(\mathbb{C}))$$

が成り立つ。

証明. $C_o(M\times N)$

$$
\begin{aligned}
&= C_p(M)\times N \ \cup\ M\times C_q(N)\\
&= \left(M\cap C_p(\mathbb{P}^m(\mathbb{C}))\right)\times N \ \cup\ M\times\left(N\cap C_q(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))\right)\\
&= M\times N \cap C_o(\mathbb{P}^m(\mathbb{C})\times\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))\\
&= M\times N \cap C_o(\mathbb{P}^{mn+m+n}(\mathbb{C}))
\end{aligned}
$$

補題5. Pは$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$の正則Riemann部分多様体で，$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})^r$と同型であって$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$上のHermite対称計量のRiemann積を計量として持つとする。このとき，

$$C_p(P) = P\cap C_p(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$$

がPの各点pに対して成り立つ。

証明. Pが$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$の超平面に含まれないと仮定しても，一般性は失われない。このとき，Nakagawa and Takagi[4]より，Pの$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$への埋め込みはequivariantになり，さらに，ある正の整数d_j $(1\leqq j\leqq r)$が存在して，この埋め込みは，

$$\sigma_{r-1}(\cdots\sigma_2(\sigma_1(\ell_{d_1},\ell_{d_2}),\ell_{d_3}),\cdots)$$

と同値になる。ただし，ℓ_{d_j}は$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$から$\mathbb{P}^{d_j}(\mathbb{C})$へのVeroneseの埋め込みで，$\sigma_j$はSegreの埋め込みである。したがって，補題4を繰り返し使うことによって，補題5を証明することができる。

定理6. Mを$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$に正則等長的に埋め込まれているcompact型Hermite対称空間とする。このとき，Mの各点

Pに対して，

$$C_P(M)=M\cap C_P(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$$

が成り立つ。

証明. 2節での記号をそのまま使うことにする。

$U_1=\phi(SU(2)^r)$, $K_1=U_1\cap K$ とおくと，(U_1, K_1) はRiemann対称対になり，$P=U_1/K_1$。P はMの全測地的部分多様体だから，A はPの極大全測地的平坦部分多様体にもなっている。したがって，

$$\begin{aligned}C_P(P)&=\bigcup_{k_1\in K_1} k_1\cdot C_P(A) && ((2)\text{を}P\text{に適用})\\ &=\bigcup_{k_1\in K_1} k_1\cdot(A\cap C_P(M)) && ((1)\text{を}M\text{に適用})\\ &=\Big(\bigcup_{k_1\in K_1} k_1\cdot A\Big)\cap C_P(M) && \\ &=P\cap C_P(M) && ((7)\text{を}P\text{に適用})。\end{aligned}$$

したがって，命題3のc)より，

$$C_P(M)=\bigcup_{k\in K} k\cdot C_P(P)。$$

Nakagawa and Takagi [4]より，埋め込み$M\subset\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ はequivariantなので，Kは自然に$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ に正則等長的に作用する。$P\subset M\subset\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ だから，Pは$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ に正則等長的に埋め込まれている。よって補題5より，

$$C_P(P)=P\cap C_P(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))。$$

これより，

$$C_P(M)=\bigcup_{k\in K} k\cdot C_P(P)$$

$$= \bigcup_{k\in K} k\cdot (P \cap C_p(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})))$$
$$= \left(\bigcup_{k\in K} k\cdot P\right) \cap C_p(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$$
$$= M \cap C_p(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))\ 。$$

定理6が示されれば，定理2は定理6の系として得られる。

定理2の証明. $M_2 \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ としておく。M_1，M_2 に定理6を適用すると，

$$\begin{aligned} C_p(M_1) &= M_1 \cap C_p(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \\ &= M_1 \cap M_2 \cap C_p(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \\ &= M_1 \cap C_p(M_2)\ 。\end{aligned}$$

定理2は，M_2 が複素射影空間に正則等長的に埋め込まれるという仮定なしに成り立つことが講演後わかったので，それについて簡単に触れておく。詳しくはTasaki [10] 参照。

実解析的なKähler計量を持つKähler多様体M上のdiastasis Dを考える。diastasisは，Calabi[1]によって導入された概念で，M×M上の実解析的関数要素から生成された実解析関数である。Dの定義域はM×Mの対角集合を含むが，必ずしもM×M全体には一致しない。diastasisの基本的な性質として次の事実がある。M，Nを実解析的なKähler計量を持つKähler多様体とし，MがNのKähler部分多様体であるとする。このとき，Mのdiastasis はNのdiastasis

の制限になっている。

compact型Hermite対称空間Mに対しては，命題3の部分多様体Pを仲介にして，

$$C_p(M)=\{q\in M: D(p,q)\text{が定義できない}\}$$

がMの各点pに対して成り立つことがわかる。この結果と先のdiastasisの基本的性質とを使えば，次の定理を得る。

定理2′. M_1, M_2をcompact型Hermite対称空間とする。M_1がM_2に正則等長的に埋め込まれているならば，M_1の各点pに対して，

$$C_p(M_1)=M_1\cap C_p(M_2)$$

が成り立つ。

証明. D_1, D_2をそれぞれM_1, M_2のdiastasisとする。

$$\begin{aligned}C_p(M_1)&=\{q\in M_1: D_1(p,q)\text{が定義できない}\}\\&=\{q\in M_1: D_2(p,q)\text{が定義できない}\}\\&=M_1\cap C_p(M_2)\text{。}\end{aligned}$$

References

[1] E. Calabi, Isometric imbedding of complex manifolds, Ann. of Math., 58(1953), 1-23.

[2] R. Crittenden, Minimum and conjugate points in symmetric spaces, Canad. J. Math., 14(1962), 320-328.

[3] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and

symmetric spaces, Academic Press, New York, 1978.

[4] H. Nakagawa and R. Takagi, On locally symmetric Kaehler submanifolds in a complex projective space, J. Math. Soc. Japan, 28(1976), 638-667.

[5] T. Sakai, On cut loci of compact symmetric spaces, Hokkaido Math. J., 6(1977), 136-161.

[6] T. Sakai, On the structure of cut loci in compact Riemannian symmetric spaces, Math. Ann., 235(1978), 129-148.

[7] R. Takagi and M. Takeuchi, Degree of symmetric Kahlerian submanifolds of a complex projective space, Osaka J. Math., 14(1977), 501-518.

[8] M. Takeuchi, On conjugate loci and cut loci of compact symmetric spaces I, Tsukuba J. Math., 2(1978), 35-68.

[9] M. Takeuchi, On conjugate loci and cut loci of compact symmetric spaces II, Tsukuba J. Math., 3(1979), 1-29.

[10] H. Tasaki, The cut locus and the diastasis of a Hermitian symmetric space of compact type, to appear.