数理解析研究所講究録
第489巻 1983年 97-116

リーマン対称空間の局所等長及び共形うめこみについて

大阪外大　兼田　英二 (Eiji Kaneda)
京大　理　阿賀岡芳夫 (Yoshio Agaoka)

$M=G/K$ を n 次元Riemann対称空間とする。このMはどのような次元のEuclid空間に局所的に等長あるいは共形的に埋め込めるかという問題について考えてみる。昔からよく知られているように一般のRiemann多様体は、Euclid空間の次元さえ十分に大きくとれば、局所的あるいは大域的に等長に埋め込むことが可能である(Janet, Cartan, Nash等)。しかし、具体的に与えられたRiemann多様体を等長に埋め込むことのできる最小次元のEuclid空間を決定することに関しては、定曲率空間の場合を除いてあまりよくわかっていないようである。ここでは特にRiemann対称空間というRiemann多様体の中でも非常にきれいなものに話を限って、この問題について現在までに得られた結果について述べることにする。

まず§1では、等長埋め込みのための障害としてのGauss方程式について論じ、それが解を持つための1つの必要条件を与

える(命題2)。その結果をRiemann対称空間に応用することにより、各対称空間はある次元のEuclid空間には局所的にすら等長あるいは共形的にはめ込めないということがわかる(定理4)。§2では対称空間のroot系を用いて定理4の証明のあらましを述べる。命題、補題の証明はここではほとんどの場合省略した。詳細については論文[1]を見られたい。命題2、定理4により得られた評価は、残念ながら一般には最良の評価にはなっていないが、Gauss方程式をさらに細かく扱うことによっていくつかの空間に対してはこの評価は改良できる。§3ではこのことについて結果だけを述べる。

なお、考える多様体、写像等は簡単のためすべてC^∞級としておく。

§1. Gauss方程式

Riemann多様体がEuclid空間に等長にはめ込めるためには、よく知られているようにまずGauss方程式が解を持たなければならない。座標を使ってあらわすとこれはMの各点ごとに与えられた連立2次方程式が実数解を持つということだが、一般には余次元を指定した時、このGauss方程式が実数解を持つか否かを判定することはむつかしい問題である。ここでは、

Gauss方程式が解を持つための1つの必要条件を与えるが、その前に共形はめ込みにも適用するように、まず共形版の第2基本形式及びGauss方程式について述べる。

$f: M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を n 次元 Riemann 多様体 (M, g) の共形はめ込みとする。すなわち M 上の C^∞ 関数 φ が存在して $\langle \nabla f, \nabla f \rangle = e^{2\varphi} g$ が M 上で成立するとする。この時 M 上の対称なテンソル場 α, β を

$$\alpha(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y f - \{(\nabla_X \varphi)\nabla_Y f + (\nabla_Y \varphi)\nabla_X f - g(X, Y)\nabla_\xi f\} \in \mathbb{R}^m$$

$$\beta(X, Y) = e^{2\varphi}\{\nabla_X \nabla_Y \varphi - (\nabla_X \varphi)(\nabla_Y \varphi) + \tfrac{1}{2} g(\xi, \xi) g(X, Y)\} \in \mathbb{R}$$

で定義する。ここに、X, Y は M の1点における接ベクトルで $\nabla_X \nabla_Y f$ は $(\nabla\nabla f)(X, Y)$ のことを意味する。また ξ は $\nabla\varphi$ の双対ベクトル場とする。すなわち $g(\xi, X) = \nabla_X \varphi$, ${}^\forall X \in \mathfrak{X}(M)$.

この時、

命題1. $\langle \alpha(X, Y), \nabla_Z f \rangle = 0$ 。

$$\langle \alpha(X, Y), \alpha(W, Z)\rangle - \langle \alpha(X, Z), \alpha(W, Y)\rangle + \beta(X, Y) g(W, Z)$$
$$+ g(X, Y)\beta(W, Z) - \beta(X, Z) g(W, Y) - g(X, Z)\beta(W, Y)$$
$$= -e^{2\varphi} g(R(X, W)Y, Z) \ 。$$

特に f が等長はめ込みの時は、$\varphi = 0$(従って $\beta = 0$)なので第1式は、第2基本形式 α は normal 方向に値をとる対称テンソル場であることを意味し、第2式は通常のGauss方程式に他

ならない。

M上の$\mathbb{Z}$-値関数 $r(p)$ を曲率 $R(X, Y): T_pM \longrightarrow T_pM$ を用いて

$$r(p) = \frac{1}{2} \max_{X, Y \in T_pM} \operatorname{rank} R(X, Y)$$

で定義する。すると次の命題が成立する。

命題2. (M, g) を n 次元Riemann多様体とする。この(M, g) が $\mathbb{R}^m$ に等長にはめ込めるなら、$r(p) \leqq m-n$ がすべての点 $p \in M$ において成立する。(M, g) が $\mathbb{R}^m$ に共形的にはめ込めるなら、$r(p) \leqq m-n+2$ が成立する。特に p を含む M の任意の開Riemann部分多様体は、余次元 $= r(p)-1$ (resp. 余次元 $= r(p)-3$) のEuclid空間には等長に (resp. 共形的に) はめ込めない。

証明. $f: M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ なる共形はめ込みが存在したとする。この時上に定めた α, β を用いて対称な T_pM の1次変換 A_η, B $(\eta \in T_p^\perp M)$ を $g(A_\eta(X), Y) = \langle \alpha(X, Y), \eta \rangle$, $g(B(X), Y) = \beta(X, Y)$ で定義する。すると命題1の第2式は

$$e^{2\varphi} R(X, Y) Z = A_{\alpha(Y, Z)} X - A_{\alpha(X, Z)} Y - \beta(X, Z) Y$$
$$- g(X, Z) B(Y) + g(Y, Z) B(X) + \beta(Y, Z) X$$

と書きかえられる。この式より任意の $X, Y \in T_pM$ に対して

$$\operatorname{rank} R(X, Y) \leqq \dim\{A_{\alpha(X, Z)} Y \mid Z \in T_pM\} +$$
$$\dim\{A_{\alpha(Y, Z)} X \mid Z \in T_pM\} + 4$$

$$\leqq 2 \dim T_p^{+} M + 4$$

となり、特に $r(p) \leqq \dim T_p^{+} M + 2 = m - n + 2$ がでてくる。f が等長の場合には上式に $\varphi = \beta = 0$ を代入すればよい。 Q.E.D.

f が等長はめ込みの場合、この命題は松本[5]の定理1 (p. 185) と本質的に同等である。

そこで次に M が Riemann 対称空間 G/K の場合にこの関数 $r(p)$ を決定することを考える。この場合には $r(p)$ は定数になるので、それを $c(M)$ であらわすことにする。$c(M)$ は次のように、Lie 環的にあらわせる。$\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ をそれぞれ G, K の Lie 環とし、$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ を標準分解とする。$\rho : \mathfrak{k} \longrightarrow \mathfrak{o}(\mathfrak{m})$ を isotropy 表現とすると、よく知られているようにMの原点における曲率は、$\mathfrak{m}$ を原点の接空間とみなして $R(X, Y) = -\rho([X, Y])$ $(X, Y \in \mathfrak{m})$ とかける。従って

$$c(M) = \frac{1}{2} \max_{X, Y \in \mathfrak{m}} \operatorname{rank} \rho([X, Y])$$

となる。$c'(M) = \frac{1}{2} \max_{Z \in \mathfrak{k}} \operatorname{rank} \rho(Z)$ $\in \mathbb{Z}$ を決定することは容易であるが、$[X, Y]$ $(X, Y \in \mathfrak{m})$ とあらわせる $\mathfrak{k}$ の元の中で階数が最大になるものを求めるというのは微妙な問題であって、ほとんどの場合には $c(M)$ と $c'(M)$ とは一致するのだが、実グラスマン多様体の中の一部のものについては2つの値は一致しない。

$c(M)$ の値を決定する前に、まず次の補題に注意しておく。

補題3.(1) $M = M_1 \times \cdots \times M_k$ を対称空間の積とする。すると $c(M) = \sum_{i=1}^{k} c(M_i)$。

(2) M をコンパクト型の対称空間、M^* を M の非コンパクト双対空間とする。すると $c(M^*) = c(M)$.

この補題と $c(R^n) = 0$ なることに注意すれば、M がコンパクト型既約単連結な対称空間の場合に $c(M)$ の値を決定しておけば、すべての対称空間に対する値がわかったことになる。主結果を述べると次のようになる。

定理4. $M = G/K$ を単連結既約コンパクト型のRiemann対称空間とする。G/K が実グラスマン多様体(BDI, II) に同型でないなら、

$$c(G/K) = \frac{1}{2}(\dim M - \mathrm{rank}\, G + \mathrm{rank}\, K)。$$

$M = SO(p+q)/SO(p) \times SO(q)$ $(p \geqq q \geqq 1)$ の場合には、

$$c(G/K) = \begin{cases} [\frac{1}{2}pq]、 & q = \text{偶数、あるいは } 2q \geqq p \geqq q、q = \text{奇数の時、} \\ \frac{1}{2}p(q-1) + q、 & p \geqq 2q+1 \text{ かつ } q = \text{奇数の時。} \end{cases}$$

実グラスマン多様体 $SO(p+q)/SO(p) \times SO(q)$ の中で $p \geqq 2q+2$ かつ $q =$ 奇数の場合が、$c(G/K) = \frac{1}{2}(\dim M - \mathrm{rank}\, G + \mathrm{rank}\, K)$ の成立しない例外的な空間となっている。球面 S^n $(n \geqq 4)$ もこの中

に含まれていることに注意する。このような例外的な現象のおこる理由については、何か幾何学的な意味があるのかもしれないが今の所よくわかっていない。

§2. 定理4の証明のあらまし

この節では定理4の証明のあらましについて述べる。定理4を示すには、曲率の階数の最大値を与える（複素化された）2つの接ベクトルX, Yを探してこなくてはいけないが、各空間によってその探し方が多少違ってくる。ここでは最も一般的に扱える場合の証明方法についてだけ述べることにする。またこの節では$M=G/K$はすべてコンパクト型既約対称空間とし、以下ことわらない。

2.1. 前節おわりと同じ記号を使う。$\theta: G \longrightarrow G$ で対称空間を定めるinvolutiveな自己同型とし、その微分も同じ記号 $\theta: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ であらわす。$\mathfrak{g}$のKilling型式Bを用いて$\mathfrak{g}$の内積$(\ ,\ )$を $(X, Y) = -B(X, Y)$ で定める。

$\mathfrak{a}$を$\mathfrak{m}$の極大可換部分空間とし、$\mathfrak{t}$を$\mathfrak{a}$を含む$\mathfrak{g}$のCartan部分環とする。$\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}$ とおけば $\mathfrak{t} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$（直和）となる。今$\mathfrak{t}$に$\theta$-order、つまり"$H > 0,\ H \in \mathfrak{t} \setminus \mathfrak{b} \Rightarrow \theta(H) < 0$"をみた

す order を1つ入れておく。$\mathfrak{g}^c$で$\mathfrak{g}$の複素化をあらわし、θ、$Ad(g)$ $(g \in G)$の複素化は同じ記号であらわす。

以下曲率の階数を最大にする$X, Y \in \mathfrak{m}$を構成しその時の階数を実際に計算するのだが、それにはまず$[X, Y]$が計算できて、さらに$[X, Y] \in \mathfrak{k}$の$\mathfrak{m}$への作用がどのような形のものであるかがわからなければ困る。そのためには$[X, Y]$が$\mathfrak{k}$の変な元であってはだめで、一番都合のよいのは$[X, Y]$が$\mathfrak{g}$のCartan部分環の元になっている場合である。しかし、今定めたCartan部分環$\mathfrak{t}$と$\mathfrak{k}$の交わりは$\mathfrak{b}$であり、一般には$\mathfrak{b}$の中から階数の最大になる元をみつけることはできない。例えば極端な場合 $\mathrm{rank}\, M = \mathrm{rank}\, G$ (佐武図形が○のみ、矢印なし)ならば$\mathfrak{b} = \{0\}$になってしまっている。そこで、$\mathfrak{k}$のCartan部分環を含んでいる$\mathfrak{g}$の新しいCartan部分環をまず構成することにする。そのためにいくつか準備しておく。

$\alpha \in \mathfrak{t}$に対し、$\mathfrak{g}^c$の部分空間$\mathfrak{g}_\alpha$を

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{ X \in \mathfrak{g}^c \mid [H, X] = \sqrt{-1}(\alpha, H)X \ , \ {}^\forall H \in \mathfrak{t} \}$$

で定義する。$\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$の時$\alpha$をrootといい、$\Delta$ (resp. Δ^+) で0でないroot (resp. 正のroot) 全体をあらわすことにする。$\tau : \mathfrak{g}^c \to \mathfrak{g}^c$を$\mathfrak{g}$に関する共役写像とすると、$\theta\Delta = \Delta$、$\theta\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{\theta\alpha}$、$\tau\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{-\alpha}$が成立する。

命題5．次の条件をみたすベクトル $\{Z_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ が存在する。

1)　$\tau Z_\alpha = Z_{-\alpha}$,　$\theta Z_\alpha = Z_{\theta\alpha}$.

2)　$[Z_\alpha, Z_{-\alpha}] = \dfrac{2\sqrt{-1}}{(\alpha,\alpha)} \cdot \alpha$.

以下この条件をみたすベクトル $\{Z_\alpha\}$ を１つ固定しておく。次に非負整数 $s(G/K)$ を $s(G/K) = \mathrm{rank}\, G/K - \mathrm{rank}\, G + \mathrm{rank}\, K$ で定める。この時、

命題6．$s = s(G/K) > 0$ とする。すると次の条件をみたす Δ^+ の部分集合 $\Gamma = \{\beta_1, \cdots, \beta_s\}$ が存在する。

1)　$\theta\beta_i = -\beta_i$　$(i = 1, \cdots, s)$.

2)　$\beta_i \pm \beta_j \notin \Delta \cup \{0\}$　$(i \neq j)$.

$M = G/K$ がHermite対称空間の場合には、このような $\Gamma = \{\beta_i\}$ の存在は古くから知られている（cf. Helgason [2]）。また上の条件をみたす $\Gamma = \{\beta_i\}$ は一意には定まらないが、かような性質をもつ Γ は、最大 s 個までしかとれないことが示せる。さらに 2)より $(\beta_i, \beta_j) = 0$ $(i \neq j)$ となることに注意しておく。命題6の証明はここではやらないが、各対称空間 G/K に対して具体的に $\Gamma = \{\beta_i\}$ を構成することができる。詳しくは

[1]を参照。

次に Z_{β_i} の実部、虚部をそれぞれ X_{β_i}, Y_{β_i} であらわすと、$\tau Z_{\beta_i} = Z_{-\beta_i} = Z_{\theta\beta_i} = \theta Z_{\beta_i}$ であるので $X_{\beta_i} \in \mathfrak{k}$, $Y_{\beta_i} \in \mathfrak{m}$ となる。$\mathfrak{a}_0 = \sum_{i=1}^{s} \mathbb{R}\beta_i$, $\mathfrak{b}_0 = \sum_{i=1}^{s} \mathbb{R}X_{\beta_i}$ とおくと $\dim \mathfrak{a}_0 = \dim \mathfrak{b}_0 = s$ となる。また $\mathfrak{a}_1 = \{H \in \mathfrak{a} \mid (H, \mathfrak{a}_0) = 0\}$ とおくと、$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1$（直和）、$\dim \mathfrak{a}_1 = \mathrm{rank}\, G - \mathrm{rank}\, K$ となる。

命題7.（1）$\mathfrak{b}_0 \perp \mathfrak{b}$. さらに直和 $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_0 + \mathfrak{b}$ は $\mathfrak{k}$ の Cartan 部分環。

（2）直和 $\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環。

証明は容易である。命題6の2)の性質により $[X_{\beta_i}, X_{\beta_j}] = \frac{1}{4}[Z_{\beta_i} + Z_{-\beta_i}, Z_{\beta_j} + Z_{-\beta_j}] = 0$ となることに注意する。

2.2. 命題7により新しい Cartan 部分環 $\mathfrak{t}_1$ が得られた。$\mathfrak{g}$ はコンパクト Lie 環だから $\mathfrak{t}$ と $\mathfrak{t}_1$ とは共役になるが、共役性を与える G の元を具体的に構成することができ、それが後非常に有用になる。

$W = \sum_{i=1}^{s} Y_{\beta_i} \in \mathfrak{m}$, $g = \exp(-\frac{\pi}{2} W) \in G$ とおく。すると

命題8. $H \in \mathfrak{t}$ に対して

$$Ad(g)\cdot H = \sum_{i=1}^{s} (\beta_i, H) X_{\beta_i} - \sum_{i=1}^{s} \frac{(\beta_i, H)}{(\beta_i, \beta_i)} \beta_i$$

となる。特に $Ad(g)\cdot \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{b}_0$、$Ad(g)|_{\mathfrak{a}_1+\mathfrak{b}} = id$ で、$Ad(g)\cdot \mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1$ となる。

$\alpha \in \Delta$ に対して $\tilde{\alpha} = Ad(g)\cdot \alpha \in \mathfrak{t}_1$、$\tilde{Z}_\alpha = Ad(g)\cdot Z_\alpha \in \mathfrak{g}^c$ とおく。すると $\{\tilde{\alpha} \mid \alpha \in \Delta\}$ は $\mathfrak{t}_1^c$ に関する $\mathfrak{g}^c$ の 0 でない root 全体で、$\tilde{Z}_\alpha$ は $\tilde{\alpha}$ に対する root ベクトルとなっている。$\Delta_\# = \Delta \cap (\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{b})$ とおくと、命題8により $\theta\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha} \Leftrightarrow \alpha \in \Delta_\#$ となることが容易にわかる。

$\alpha \in \Delta_\#$ とする。すると $\theta\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}$ であるから $\theta \tilde{Z}_\alpha \in \mathbb{C}\tilde{Z}_\alpha$ となる。よって $\theta \tilde{Z}_\alpha = \varepsilon_\alpha \tilde{Z}_\alpha$ $(\varepsilon_\alpha = \pm 1)$ とかける。そこで $\Delta_\#(+) = \{\alpha \in \Delta_\# \mid \varepsilon_\alpha = 1\}$、$\Delta_\#(-) = \{\alpha \in \Delta_\# \mid \varepsilon_\alpha = -1\}$ とおくことにすると、$\mathfrak{g}^c$ の分解 $\mathfrak{g}^c = \mathfrak{t}_1^c + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{C}\tilde{Z}_\alpha$ をさらに $\mathfrak{k}^c$, $\mathfrak{m}^c$ にわけて

$$\mathfrak{k}^c = \mathfrak{b}_1^c + \sum_{\alpha\in\Delta_\#(+)} \mathbb{C}\tilde{Z}_\alpha + \sum_{\alpha\in\Delta^+\setminus\Delta_\#} \mathbb{C}(\tilde{Z}_\alpha + \theta\tilde{Z}_\alpha)$$

$$\mathfrak{m}^c = \mathfrak{a}_1^c + \sum_{\alpha\in\Delta_\#(-)} \mathbb{C}\tilde{Z}_\alpha + \sum_{\alpha\in\Delta^+\setminus\Delta_\#} \mathbb{C}(\tilde{Z}_\alpha - \theta\tilde{Z}_\alpha)$$

なる直和分解が得られる。この分解が後で非常に重要な働きをする。

命題9. (1) $\pm\Gamma = \{\pm\beta_1, \cdots, \pm\beta_s\} \subset \Delta_\#(-)$。

(2)　$\alpha\in\Delta\cap\mathfrak{b}$ とする。すると　$\alpha\in\Delta_{\#}(-)\Leftrightarrow$ ある $\beta_i\in\Gamma$ が存在して $\alpha\pm\beta_i\in\Delta$ をみたす。

2.3.　以上の準備の下で定理4の証明を行なう（ただし、"一般的"な対称空間についてのみ）。まず

補題10.　$\rho^c:\mathfrak{k}^c\longrightarrow \mathfrak{o}(\mathfrak{m}^c)$ を ρ の複素化とする。すると

$$c(G/K)=\frac{1}{2}\max_{X,Y\in\mathfrak{m}^c}\operatorname{rank}\rho^c([X,Y]).$$

この補題により、最大の階数を与える X,Y は $\mathfrak{m}^c$ の中より探してくれば十分である。次に $c(M)$ を上から押さえることに関して

補題11.　$c(G/K)\leqq\frac{1}{2}(\dim M-\operatorname{rank}G+\operatorname{rank}K)$。

証明. 任意の $X\in\mathfrak{k}$ に対して $\dim\operatorname{Ker}\rho(X)\geqq\operatorname{rank}G-\operatorname{rank}K$ を示せばよい。$\mathfrak{b}'$ を X を含む $\mathfrak{k}$ の Cartan 部分環、$\mathfrak{t}'$ を $\mathfrak{b}'$ を含む $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環とする。すると $\mathfrak{b}'=\mathfrak{k}\cap\mathfrak{t}'$ となる。また $\mathfrak{a}'=\mathfrak{m}\cap\mathfrak{t}'$ とおくと $\mathfrak{t}'=\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}'$（直和）となる。$\mathfrak{t}'$ は可換であるからこれより $\operatorname{Ker}\rho(X)\supset\mathfrak{a}'$ となり、従って $\dim\operatorname{Ker}\rho(X)\geqq\dim\mathfrak{a}'=\operatorname{rank}G-\operatorname{rank}K$ となる。　　Q.E.D.

命題12. $\Gamma=\{\beta_1,\cdots,\beta_s\}$ は次の２条件をみたすとする。

1) 任意の $\alpha\in\Delta\setminus\Delta_\#$ に対し、$(\alpha,\beta_i)\neq 0$ となる $\beta_i\in\Gamma$ が存在する。

2) 任意の $\alpha\in\Delta\cap\mathfrak{b}$, $\beta_i\in\Gamma$ に対し、$\alpha\pm\beta_i\notin\Delta$ となる。

すると $c(G/K)=\frac{1}{2}(\dim M-\mathrm{rank}\,G+\mathrm{rank}\,K)$ が成立する。

証明. 補題11により、$\mathrm{rank}\,\rho^c([\tilde{X},\tilde{Y}])=\dim M-\mathrm{rank}\,G+\mathrm{rank}\,K$ をみたす $\tilde{X},\tilde{Y}\in\mathfrak{m}^c$ を探してくれば十分である。$a_1,\cdots,a_s$ を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上１次独立な複素数とし、$X=\sum_{i=1}^{s}a_iZ_{\beta_i}$、$Y=\sum_{i=1}^{s}Z_{-\beta_i}$ とおく。命題9により $\pm\beta_i\in\Delta_\#(-)$ であるから $\tilde{X}=Ad(g)\cdot X$, $\tilde{Y}=Ad(g)\cdot Y$ は $\mathfrak{m}^c$の元となっている。$\beta_i-\beta_j\notin\Delta$ $(i\neq j)$ であることと命題5を使えば $\tilde{H}=[\tilde{X},\tilde{Y}]=\sum_{i=1}^{s}\frac{2\sqrt{-1}\,a_i}{(\beta_i,\beta_i)}Ad(g)\cdot\beta_i\in\mathfrak{b}_0^c\subset\mathfrak{t}_1^c$ となる。そこで $ad\,\tilde{H}:\mathfrak{m}^c\longrightarrow\mathfrak{m}^c$ の核を決定する。既にみたように $\mathfrak{m}^c$ は

$$\mathfrak{m}^c=\mathfrak{a}_1^c+\sum_{\alpha\in\Delta_\#(-)}\mathbb{C}\tilde{Z}_\alpha+\sum_{\alpha\in\Delta^+\setminus\Delta_\#}\mathbb{C}(\tilde{Z}_\alpha-\theta\tilde{Z}_\alpha)$$

と直和分解されているが、$[\tilde{H},\mathfrak{a}_1^c]=\{0\}$、$[\tilde{H},\tilde{Z}_\alpha]=\sqrt{-1}(\alpha,H)\cdot\tilde{Z}_\alpha$、$[\tilde{H},\theta\tilde{Z}_\alpha]=\sqrt{-1}(\alpha,H)\theta\tilde{Z}_\alpha$ であるから、各直和成分は $ad\,\tilde{H}$ の作用で不変になっている。また上式より $\mathfrak{a}_1^c$ が $\mathrm{Ker}\,ad\,\tilde{H}$ に含まれることは明らかであるが、実は両者は一致する。それを示すには、１次元空間の直和の部分

$$(*)\qquad \sum_{\alpha\in\Delta_\#(-)}\mathbb{C}\tilde{Z}_\alpha+\sum_{\alpha\in\Delta^+\setminus\Delta_\#}\mathbb{C}(\tilde{Z}_\alpha-\theta\tilde{Z}_\alpha)$$

には核のないことをいえばよい。そこで今 $(\alpha, H)=0$ となったとする $(\alpha\in\Delta)$。$H=[X,Y]=\sum_{i=1}^{s}\frac{2\sqrt{-1}\,a_i}{(\beta_i,\beta_i)}\beta_i$ であるから、$\sum_{i=1}^{s} a_i\frac{2(\alpha,\beta_i)}{(\beta_i,\beta_i)}=0$ となる。$\frac{2(\alpha,\beta_i)}{(\beta_i,\beta_i)}\in\mathbb{Z}$ であり $\{a_i\}$ は $\mathbb{Q}$ 上1次独立だから $(\alpha,\beta_i)=0$ $(i=1,\cdots,s)$ となる。よって条件1)より $\alpha\notin\Delta\setminus\Delta_\#$。よって (*) の第2項の中には核はない。またこの時 $\alpha\in\Delta_\#=\Delta\cap(\mathfrak{a}_0+\mathfrak{b})$ であるが、明らかに α は $\mathfrak{a}_0$ 成分を持たないのだから $\alpha\in\Delta\cap\mathfrak{b}$。すると条件2)より任意の $\beta_i\in\Gamma$ に対して $\alpha\pm\beta_i\notin\Delta$。従って命題9 (2)より $\alpha\notin\Delta_\#(-)$ となり (*) の第1項にも核はない。ゆえに $\mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}\,\tilde{H}=\mathfrak{a}_1^c$ で $\mathrm{rank}\,\mathrm{ad}\,\tilde{H}=\mathrm{rank}\,\rho^c([\tilde{X},\tilde{Y}])=\dim M-\dim\mathfrak{a}_1^c=\dim M-\mathrm{rank}\,G+\mathrm{rank}\,K$ がでた。　　Q.E.D.

($\alpha\in\Delta\cap\mathfrak{b}$ なら $(\alpha,\beta_i)=0$ だから、"$\alpha\pm\beta_i\in\Delta$" の否定は "$\alpha\pm\beta_i\notin\Delta$" となることに注意しておく。)

2.4. この命題12の条件1)、2)は $\mathfrak{g}$ の root に関する抽象的な条件のようだが、多くの $M=G/K$ に対しては1)、2)をみたす $\Gamma=\{\beta_i\}$ の存在することが示せる。結果だけを書くと、

命題13. $M=G/K$ は以下の空間には同型でないとする。コンパクト単純 Lie 群、[AII] $SU(2n)/Sp(n)$ $(n\geqq 2)$、[BDIII] $SO(p+q)/SO(p)\times SO(q)$ $(p\geqq q+2$、$q=$奇数)、[CII] $Sp(p+q)/$

$Sp(p) \times Sp(q)$ $(p \geqq q \geqq 1)$、[EIV] E_6/F_4、[FII] $F_4/Spin(9)$。すると、命題12の条件（及び命題6の性質）をみたす $\Gamma = \{\beta_i\}$ が存在する。特にこの場合、$c(G/K) = \frac{1}{2}(\dim M - \mathrm{rank}\, G + \mathrm{rank}\, K)$ が成立する。

証明には、実際にこの性質をみたす $\Gamma = \{\beta_i\}$ を構成すればよい。詳細については[1]をみられたい。また、命題13の中にあげた空間の中にはHermite対称空間は含まれていないので、MがHermite対称空間の場合は定理4は完全に示せたことになる。

命題13の中にあげられた空間については、各空間に対して個別に階数の最大値を与える $\mathfrak{m}^c$ の2元を探してこなくてはならず、またその探し方も空間の個性によって難易度が違ってくる。それらについての証明はここでは省略するが、最後に実グラスマン多様体の場合に $c(G/K)$ の値を上から押さえることについて述べておく。

補題14. $G/K = SO(p+q)/SO(p) \times SO(q)$ $(p \geqq q \geqq 1,\ q =$ 奇数$)$ とする。すると $c(G/K) \leqq \frac{1}{2} \min\{pq,\ pq - p + 2q\}$

証明. $M(m, n)$ で m 行 n 列の実行列全体をあらわすことに

する。すると$\mathfrak{m}$は自然に$M(p,q)$と同一視され、isotropy表現

$$\rho\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} : M(p,q) \longrightarrow M(p,q)$$

$(A \in o(p),\ B \in o(q))$は、

$$\rho\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}(X) = AX - XB$$

で与えられる。$X, Y \in M(p,q) \cong \mathfrak{m}$に対して$A(X,Y) \in o(p)$、$B(X,Y) \in o(q)$を、

$$[X, Y] = \begin{pmatrix} A(X,Y) & \\ & B(X,Y) \end{pmatrix}$$

で定義する。つまり、$A(X,Y) = -X{}^tY + Y{}^tX$, $B(X,Y) = -{}^tXY + {}^tYX$。補題を示すには

$$\dim \operatorname{Ker} \rho\begin{pmatrix} A(X,Y) & \\ & B(X,Y) \end{pmatrix} \geqq p - 2q$$

をいえばよい。$U = \{u \in M(p,1) \mid {}^tXu = {}^tYu = 0 \in M(q,1)\}$とおけば、明らかに$\dim U \geqq p - 2q$。今、$q$=奇数であるから$v_0 \neq 0 \in M(q,1)$で${}^tv_0 B(X,Y) = 0$をみたすベクトルが存在する。この$v_0$を用いて線型写像$\psi : M(p,1) \longrightarrow M(p,q)$を$\psi(u) = u{}^tv_0$で定めると$\psi$は単射でありまた$\psi(U) \subset \operatorname{Ker} \rho\begin{pmatrix} A(X,Y) & \\ & B(X,Y) \end{pmatrix}$となることが容易にわかる。従って$\dim \operatorname{Ker} \rho\begin{pmatrix} A(X,Y) & \\ & B(X,Y) \end{pmatrix} \geqq p - 2q$。 Q.E.D.

この節では、曲率の階数を最大にする$\mathfrak{m}^c$の2元をrootを用いて構成したが、Lie環$\mathfrak{g}$が古典型の場合には行列を用いて最大値を与える$X, Y \in \mathfrak{m}$を探すこともできる。不思議なのは、

命題12で片付いた空間においては行列を使った場合でも最大値を与える X, Y はみつけやすいのに対し、例えば [AⅡ]、[CⅡ] 等においては、そのような元はなかなかきれいな形ではあらわせないということである。ここにも何かの幾何学的な意味があるのかもしれない。

§3. 評価の改良

命題2、定理4によって各対称空間の等長あるいは共形はめ込みについての一連の評価が得られた。これらは不可能性についての評価であるが、一方で小林[4]により多くのコンパクト型の既約対称空間は order でいえば、余次元 $\sim \dim M$ の Euclid 空間に等長に埋め込めることがわかっている。ここで得た結果は、これも order でいうとほとんどの既約対称空間は余次元 $\sim \frac{1}{2}\dim M$ の Euclid 空間には等長あるいは共形的にはめ込めないということであり、この２つの結果の間にはまだ間隙がある。命題２、定理４による結果は一般には（order でいっても）最良の評価ではなく、さらに精密に Gauss 方程式を調べればいくらか結果は改良される。この節では現在までに得られた評価について結果だけ述べることにする。（簡単のため、ここではすべて“等長”の場合だけを考え、“共形”の場合

は略す。)

まず、SO(3)、SO(4)(に両側不変計量をいれたもの)は局所的にそれぞれ S^3, $S^3 \times S^3$ に同型だから、局所的に等長に埋め込める最小の余次元はそれぞれ 1, 2 となる。次に SO(5) に関しては $c(SO(5)) = 4$ なので、命題2より余次元 $= 3$ には等長に埋め込めないことがわかるのだが、実は余次元 $= 5$ でもGauss方程式は解を持たないことが示せる。SO(5) は局所的には Sp(2) に同型であり、小林[4]により Sp(2) は R^{16} に(大域的に)等長に埋め込めることがわかっているので、SO(5) については最良の評価が得られたことになる。SO(n) で $n \geqq 6$ のものについては今のところ計算が大変であり最良の結果はでていないが、例えば SO(6) は余次元 $= 7$ ではGauss方程式は解を持たぬことが示せる。($c(SO(6)) = 6$ であった。) SO(6) は局所的には余次元 $= 17$ のEuclid空間には等長に埋め込め、また余次元 $= 16$ ではGauss方程式は解を持つのだが、最良の評価はまだわかっていない。

一般にHermite対称空間 $M = G/K$ において、G のLie環 $\mathfrak{g}$ が半単純なら定理4により $c(M) = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} M$ となり、従って $P^n(\mathbb{C})$、$Q^n(\mathbb{C})$ (2次曲面)は共に余次元 $= n-1$ のEuclid空間には等長に埋め込めない。$P^2(\mathbb{C})$ に関してはさらに精密にGauss方程式が解をもつ最小の余次元は3であることが示せる。しかし、現

在のところ、$P^2(\mathbb{C})$は局所的に$\mathbb{R}^7$に等長に埋め込めるかどうかはわかっていない。(小林[4]により、$\mathbb{R}^8$には大域的に等長に埋め込める。) $P^3(\mathbb{C})$については、余次元$=3$ではGauss方程式は解を持たないこと、余次元$=8$では解を持つことはわかっているが、最良の評価はまだ得られていない。

以上は低次元の対称空間に関する結果であるが、次元が十分大きい時の評価の改良として次の命題が得られる。

命題15. $P^n(\mathbb{C})$が局所的に$\mathbb{R}^{2n+k}$に等長に埋め込めるならば、$k \geqq \frac{6n-4}{5}$。また$Q^n(\mathbb{C})$が局所的に$\mathbb{R}^{2n+k}$に等長に埋め込めるならば$k \geqq \frac{6n-2}{5}$。

最後に、再び$SO(5)$に関する結果として、

命題16. $SO(5)$は、大域的には$\mathbb{R}^{16}$に等長にはめ込むことができない。

実際、$SO(5)$は余次元$=6$でGauss方程式の解を持つのだが、normal方向への$O(6)$の作用を除いてこの解は一意であることが示せ、その事実を使うとこの命題が証明できる。上でも述べたように$SO(5)$の2重被覆群$Sp(2)$は大域的に$\mathbb{R}^{16}$に等長に埋

め込めることに注意しておく。(SO(5) は小林[4]により、$\mathbb{R}^{25}$ には大域的に等長に埋め込める。)

はじめにも述べたように、Gauss 方程式という連立2次方程式が実数解を持つか否かを具体的に判定するのはなかなか難しい問題であり、各対称空間に対して最良の評価を出すためには命題2で述べたものよりさらに精密な判定方法を編み出す必要がある。

References

[1] Y. Agaoka and E. Kaneda, On local isometric immersions of Riemannian symmetric spaces, preprint.

[2] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces, Academic Press, New York, 1978.

[3] H. Jacobowitz, Curvature operators on the exterior algebra, Linear and Multilinear Algebra, 7 (1979), 93-105.

[4] S. Kobayashi, Isometric imbeddings of compact symmetric spaces, Tôhoku Math. J., 20 (1968), 21-25.

[5] M. Matsumoto, Local imbedding of Riemann spaces, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A, 28 (1953), 179-207.