数理解析研究所講究録
第489巻 1983年 152-168

平均曲率が一定な$H^3(c)$内の曲面について

富山大 教育　森　博　(Hiroshi Mori)

本稿において、次の3つの事柄について述べます。

(I) 1979年に M. do Carmo と C.K. Peng が "Stable complete minimal surfaces in R^3 are planes" という結果を得た。我々は、E. Heinz が導入した functional を用いて、R^3内に immersed された曲面の平均曲率が一定となる特徴づけをし、平均曲率が一定なR^3内の完備な曲面について上と同様な主張をしたい。

(II) 1841年に C. Delaunay は平均曲率が一定なR^3内の回転曲面の(幾何学的な)構成を得た(最近、剱持氏は与えられた関数を平均曲率として持つR^3内の曲面を具体的に表示し、更に、平均曲率が一定なR^3内の完備な回転曲面の分類を得た)。しかし、3次元双曲的空間H^3内には平均曲率が一定である完備な曲面は umbilic なもの以外は知られていない様である。我々は、H^3を4次元 Lorentz 空間L^4内の hypersurfaces と考えて、3種類の平均曲率が一定なH^3内の完備な回転曲面族を、連立2階非線形微分方程式を解いて、具体的に表示したい。更に、これら曲面のいくつかは、R. Gulliver が導入した functional (R^3内の曲面については、第1、第2変分は、E. Heinz の functional のそれと等しい)に関して "stable" であることを示したい。

(III) 上の(II)と同様にして，平均曲率が一定な3次元単位球面S^3内の完備な回転曲面族を，flat torus を初期曲面として具体的に表示できる。この特別な場合として，Clifford torus を初期曲面とするS^3内の完備な回転極小曲面族を得るが，これらのなかには Laplacian の第一固有値が2より小さい closed minimal surfaces が存在することを示したい。

Remarks. (I)については，最近，L. Barbosa と M. do Carmo が，E. Heinz の functional に関する，volume を保つすべての変分について "stable" なR^n内の compact hypersurfaces は spheres であることを示している。(II)，(III)については，最近，W.Y. Hsiang 達は，平均曲率が一定な n 次元空間形 $M^n(c)$ 内の (generalised) rotational hypersurfaces の generating curves に関する幾何学的性質を中心に，精力的な研究を続けている。

以下において，定義と主たる結果の簡単な証明を述べることとし，詳細については文献を参照して頂くことにします。

$(L^{n+1}, \langle\ ,\ \rangle)$ を $n+1$ 次元 Lorentz 空間とする。但し，$x, y \in L^{n+1}$ に対して， $\langle x, y\rangle = -x_1y_1 + \sum_{j=2}^{n+1} x_jy_j$ であるとする。このとき，n次元完備単連結リーマン多様体 $H^n(c)$ で，その断面曲率が負の定数 c であるものは L^{n+1} 内の hypersurface として

$$H^n(c) = \{x \in L^{n+1};\ \langle x, x\rangle = \frac{1}{c},\ x_1 > 0\}$$

と表示される，また，$H^n = H^n(-1)$ とおく。 $S^2(a)$ によって，ガウス曲率が正定数 a である2次元球面を表わす。

平均曲率 H が一定である，H^3 内の umbilic surfaces は L^4 の hyperplanes と H^3 の交わりで与えられる。つまり，H^3 の等長群の作用を除いて次の様な isometric embedding で与えられる。

i) $H<-1$ の場合． $f: S^2(H^2-1) \to H^3$, $f(x,y,z) = (-H/\sqrt{H^2-1}, x, y, z)$。

ii) $-1<H\leqq 0$ の場合． $f: H^2(H^2-1) \to H^3$, $f(x,y,z) = (x, y, z, -H/\sqrt{1-H^2})$。

iii) $H=-1$ の場合． 各 $a>0$ に対して，$f: R^2 \to H^3$, $f(x,y) = ae_1 + xe_2 - (x^2+y^2+1)/2a \cdot e_3 + ye_4$， 但し，
$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$。

さて，我々が構成する H^3 内の回転曲面の定義を述べる。$P^k \subset L^4$ を原点を通る k 次元線形空間とする，$k=1,2,3$．$O_0(1,3)$ を Lorentz 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を不変にする $GL(4,R)$ の部分群の単位元を含む成分とする。すると，$O_0(1,3)$ は H^3 上に等長群として推移的に作用していることが知られている。
$O(P^2) := \{\sigma \in O_0(1,3)\ ;\ \sigma x = x,\ \forall x \in P^2\}$.

P^2, $P^3 \supset P^2$ を取り，$(P^3 - P^2) \cap H^3$ 内の C^∞ 級の曲線 γ を取る。このとき，$O(P^2)$ の作用の下での γ の orbit のことを H^3 内

の回転曲面と呼ぶことにする。この回転曲面が spherical type (resp. hyperbolic type or parabolic type) であるとは、$\langle\ ,\ \rangle|P^2$ が Lorentzian metric (resp. Riemannian metric or degenerate quadratic form) である時をいうものとする。

回転曲面の径数表示を行う。上で述べた回転曲面の定義について、以下の性質を満たす L^4 の basis $\{e_i\}$ が存在することがわかる。

i) P^2 は e_3 と e_4 で生成される。

ii) P^3 は e_1, e_3 と e_4 で生成される。

iii)
$$\langle \Sigma x_i e_i, \Sigma y_j e_j \rangle = \begin{cases} x_1y_1 + \cdots + x_3y_3 - x_4y_4 & \text{(spherical case)} \\ -x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_4y_4 & \text{(hyperbolic case)} \\ x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1 + x_4y_4 & \text{(parabolic case).} \end{cases}$$

以下 spherical type の回転曲面の構成について述べることにする。γ の定義方程式を $x_1 = x(s),\ x_3 = y(s),\ x_4 = z(s)$ とする。但し、s は弧長径数であるとし、その定義域 J は R の開区間とする。次式で与えられる C^2 級写像 $f: J \times S^1 \to H^3$ を考える。但し、S^1 は R^2 の単位円とする。

$$f(s,t) = x(s)\cos t\, e_1 + x(s)\sin t\, e_2 + y(s)e_3 + z(s)e_4.$$

このとき、f が immersion で且、その平均曲率が定数 H に等しいための必要かつ十分条件は、開区間 J 上で次の微

分方程式系が成立することである。

(1) $\quad x > 0,$

(2) $\quad x^2+y^2-z^2=-1,$

(3) $\quad x'^2+y'^2-z'^2=1,$

(4) $\quad -x''(yz'-y'z)+y''(zx'-z'x)+z''(yx'-y'x)+\frac{1}{x}(yz'-y'z)=2H.$

上の微分方程式系は次の様な方法でその解が存在することがわかる。まず、(2)から

(5) $\quad y=\sqrt{x^2+1}\,\sinh\phi(s), \qquad z=\sqrt{x^2+1}\,\cosh\phi(s)$

とおくことができる。これを(3)に代入すると次式を得る。

(6) $\quad \phi'(s)^2(1+x^2)^2=1+x^2-x'^2$

そこで、次の仮定をする。

(7) $\quad 1+x^2-x'^2>0 \qquad \text{on } J$

このとき、(6)から $\phi(s)$ は $x(s)$ の関数として

(8) $\quad \phi(s)=\int_0^s \frac{\sqrt{1+x^2-x'^2}}{1+x^2}\,ds+c, \qquad c$：定数

と表示される。(5),(8)を(4)に代入すると

(9) $\quad xx''+x'^2-2x^2-1=2Hx\sqrt{1+x^2-x'^2}$

が成立することがわかる。ここで、変数変換

(10) $\quad u=x^2+\frac{1}{2}$

を行うと、条件(1),(7)はそれぞれ

(1)′ $\quad u>\frac{1}{2}$

(7)' $\quad u^2-\dfrac{u'^2+1}{4}>0$

と同値であり，(9) は次の式と同値になる。

(9)' $\quad u''-4u=4H\sqrt{u^2-\dfrac{u'^2+1}{4}}$.

この式の両辺に $\frac{1}{4}u'/\sqrt{u^2-\frac{u'^2+1}{4}}$ を乗じて積分すると次式が得られる。

$$\sqrt{u^2-\frac{u'^2+1}{4}}=a-Hu,\qquad a:\text{定数}.$$

これらのことから，条件 (1),(7) の下での方程式 (9) の解は条件 (12),(13) の下での方程式 (11) の解によって得られることがわかる。但し，(11) の解 $u(s)$ の導関数 $u'(s)$ の零点の集合が J において "discrete でない" ということが満たされるならば。このことは (11) の解を具体的にもとめると満たされる。

(11) $\quad \frac{1}{4}u'^2=(1-H^2)u^2+2aHu-a^2-\frac{1}{4}$

(12) $\quad a-Hu>0$

(13) $\quad u>\frac{1}{2}$

但し，a：定数である。方程式 (11) は定数 H が，

$|H|<1,\ |H|=1,\ |H|>1$ の条件をみたす場合に分けて考え，それから，具体的に解をもとめるとよい。この解が，条件 (12),(13) をみたす様に a の範囲を定める。もとめた解から，(10),(8),(5) によって $v(s)$, $\phi(s)$, $y(s)$, $z(s)$ がきまる。逆に，この様にしてきまった $v(s)$, $\phi(s)$, $y(s)$, $z(s)$ について immersion f を考え，f が定常な曲面を定義する様に，定義域 J

を拡張するなどのことを行うと以下に述べる結果を得る。

定理 1 (Spherical rotational surfaces). (i) H を $-1<H\leqq 0$ なる定数とするとき、各定数 $a>\frac{H}{2}$ に対して、関数 $u(s)$, $\phi(s)$, $x_1(s)$, $x_3(s)$, $x_4(s)$ を次式で定義する。

$$u(s)=\left\{-aH+\sqrt{a^2+\frac{1-H^2}{4}}\cosh 2\sqrt{1-H^2}\,s\right\}(1-H^2)^{-1},$$

$$\phi(s)=\int_0^s \sqrt{u(\sigma)^2-\frac{u(\sigma)^2+1}{4}}\Big/\left(u(\sigma)+\tfrac{1}{2}\right)\sqrt{u(\sigma)-\tfrac{1}{2}}\;d\sigma,$$

$$x_1(s)=\sqrt{u(s)-\tfrac{1}{2}},\qquad x_3(s)=\sqrt{u(s)+\tfrac{1}{2}}\,\sinh\phi(s),$$

$$x_4(s)=\sqrt{u(s)+\tfrac{1}{2}}\,\cosh\phi(s),\qquad s\in\mathbb{R}.$$

このとき、1対1, analytic mapping $f: \mathbb{R}\times S^1\to H^3$

(1) $$f(s,t)=x_1(s)\cos t\,e_1+x_1(s)\sin t\,e_2+x_3(s)e_3+x_4(s)e_4$$

は H^3 内に平均曲率が H に等しい完備回転曲面を定義する。但し、$\{e_i\}$ は L^4 の basis で $\langle\sum x_ie_i,\sum y_je_j\rangle=x_1y_1+\cdots+x_3y_3-x_4y_4$ をみたすものである。

(ii) 各定数 a, $0<a<\frac{1}{2}$, に対して、関数 $u(s)$ を

$$u(s)=2as^2+\frac{a^2+\frac{1}{4}}{2a},\qquad s\in\mathbb{R}$$

によって定義し、関数 $\phi(s)$, $x_1(s)$, $x_3(s)$, $x_4(s)$ を (i) の様に定義する。このとき、定義式(1) で与えられる1対1, analytic mapping $f: R\times S^1 \to H^3$ は H^3 内に平均曲率が -1 に等しい完備回転曲面を定義する。

(iii) H を $H<-1$ なる定数とするとき，各定数 a, $\frac{H}{2}<a<\frac{-\sqrt{H^2-1}}{2}$, に対して，関数 $u(s)$ を

$$u(s)=\left\{aH+\sqrt{a^2-\frac{H^2-1}{4}}\cos 2\sqrt{H^2-1}\,s\right\}(H^2-1)^{-1},$$

$s\in S^1(r)$, 半径 $r=\frac{1}{2\sqrt{H^2-1}}$ の円，によって定義し，関数 $\phi(s)$, $x_1(s)$, $x_3(s)$, $x_4(s)$ を (i) の様に定義する。このとき定義式(1)で与えられる1対1, analytic mapping $f: S^1(r)\times S^1 \to H^3$ は H^3 内に平均曲率が H に等しい完備回転曲面を定義する。

定理2 (Hyperbolic rotational surfaces). (i) H を $-1<H\leqq 0$ なる定数とするとき，各定数 $a>\frac{H}{2}$ に対して，関数 $u(s)$ を定理1,(i) の様に定め，関数 $\phi(s)$, $x_1(s)$, $x_3(s)$, $x_4(s)$ を次式で定める。

$$\phi(s)=\int_0^s\left\{u(\sigma)^2-\frac{u'(\sigma)^2+1}{4}\right\}\Big/\left(u(\sigma)-\frac{1}{2}\right)\sqrt{u(\sigma)+\frac{1}{2}}\,d\sigma,$$

$$x_1(s)=\sqrt{u(s)+\frac{1}{2}}, \qquad x_3(s)=\sqrt{u(s)-\frac{1}{2}}\sin\phi(s)$$

$$x_4(s)=\sqrt{u(s)-\frac{1}{2}}\cos\phi(s).$$

このとき，analytic mapping $f: R\times R\to H^3$

(2) $$f(s,t) = x_1(s)\cosh t\, e_1 + x_1(s)\sinh t\, e_2 + x_3(s)e_3 + x_4(s)e_4$$

は H^3 内に平均曲率が H に等しい完備回転曲面を定義する。但し、$\{e_i\}$ は L^4 の basis で $\langle \sum x_i e_i, \sum y_i e_i \rangle = -x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_4y_4$ をみたすものとする。

(ii) 各定数 a, $0<a<\frac{1}{2}$ に対して、関数 $u(s)$ を定理1,(ii) の様に定め、関数 $\varphi(s)$, $x_1(s)$, $x_3(s)$, $x_4(s)$ を (i) の様に定める。このとき、定義式(2) で与えられる 1対1, analytic mapping $f: R\times R \to H^3$ は H^3 内に平均曲率が -1 に等しい完備回転曲面を定義する。

(iii) H を $H<-1$ なる定数とするとき、各定数 a, $\frac{H}{2} < a < -\frac{\sqrt{H^2-1}}{2}$, に対して、関数 $u(s)$ を定理1,(iii) の様に定め、関数 $\varphi(s)$, $x_1(s)$, $x_3(s)$, $x_4(s)$ を (i) の様に定める。このとき、定義式(2)で与えられる 1対1 analytic mapping $f: S^1(1)\times R \to H^3$ は H^3 内に平均曲率が H に等しい完備回転曲面を定義する。

定理3 (Parabolic rotational surfaces). (i) H を $-1<H<1$ なる定数とするとき、各定数 $a>0$ に対して、関数 $u(s)$, $x_1(s)$, $x_4(s)$, $x_3(s)$ を次式で定める。

$$u(s) = \{-aH + a\cosh 2\sqrt{1-H^2}\, s\}(1-H^2)^{-1},$$

$$x_1(s)=\sqrt{u(s)}\,,\qquad x_4(s)=\sqrt{u(s)}\int_0^s\sqrt{u(\sigma)^2-\frac{u'(\sigma)^2}{4}}\cdot u(\sigma)^{-3/2}\,d\sigma,$$

$$x_3(s)=-(x_4(s)^2+1)/2x_1(s),\qquad s\in\mathbb{R}.$$

このとき，1対1，analytic mapping $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to H^3$,

(3) $$f(s,t)=x_1(s)e_1+tx_1(s)e_2-\{\tfrac{t^2}{2}x_1(s)-x_3(s)\}e_3+x_4(s)e_4$$

は H^3 内に平均曲率が H に等しい完備回転曲面を定義する。
但し，$\{e_i\}$ は L^4 の basis で，$\langle\sum x_ie_i,\sum y_ie_i\rangle=x_1y_3+x_2y_2+x_3y_1+x_4y_4$ をみたすものである．

(ii) 各定数 $a>0$ に対して，$u(s)=a$ と定め，$x_1(s)$, $x_3(s)$, $x_4(s)$ を (i) の様に定める。このとき定義式(3)で与えられる1対1, analytic mapping $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to H^3$ は H^3 内に平均曲率が1に等しい完備回転曲面を定義する。

さて，ambient space が3次元単位球面 S^3 である場合，全く同じ様にして，平均曲率が一定である完備回転曲面の族を構成することができる．結果だけを述べることにする．

定理 4. H を1つの定数とするとき，各定数 a, $0\leqq a<\frac{1}{2}$ に対して，関数 $z(s)$, $\phi(s)$ を次式によって定める。

$$z(s)=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{1+H^2}\left\{\left(\frac{1+H^2}{4}-a^2\right)H+a\cos 2\sqrt{1+H^2}\,s\right\}\right]^{1/2}$$

$$\phi(s) = \int_0^s \sqrt{1-z(t)^2-\dot{z}(t)^2}\cdot(1-z(t)^2)^{-1}\,dt, \qquad s \in S^1(r),$$

但し、 $r = [\frac{1}{2}(1-\frac{H}{\sqrt{1+H^2}})]^{1/2}$ $(a=0)$, $r = \inf\{\frac{k}{2\sqrt{1+H^2}}$; k と $\phi(\frac{k\pi}{\sqrt{1+H^2}})/2\pi$ はともに自然数$\}$ $(a>0)$ とする。このとき、analytic mapping $f: S^1(r)\times S^1 \to S^3$,

$$f(s,\theta) = (\sqrt{1-z(s)^2}\cos\phi(s), \sqrt{1-z(s)^2}\sin\phi(s), z(s)\cos\theta, z(s)\sin\theta)$$

は S^3 内に平均曲率が H に等しい完備回転曲面 $M(a,H)$ を定義する。

この定理において、特に $H=0$ である場合、次の minimal surfaces の族が得られる。

系. 各定数 a, $0 \leqq a < \frac{1}{2}$, に対して、analytic mapping $f_a: S^1(r_a)\times S^1 \to S^3$

$$f_a(s,\theta) = (\sqrt{\tfrac{1}{2}-a\cdot\cos 2s}\,\cos\phi(s,a), \sqrt{\tfrac{1}{2}-a\cdot\cos 2s}\,\sin\phi(s,a),$$
$$\sqrt{\tfrac{1}{2}+a\cdot\cos 2s}\,\cos\theta, \sqrt{\tfrac{1}{2}+a\cdot\cos 2s}\,\sin\theta)$$

は S^3 内の完備極小曲面 M_a を定義する。但し、$\phi(s,a) = \sqrt{\frac{1}{4}-a^2}\int_0^s (\frac{1}{2}-a\cdot\cos 2t)^{-1}(\frac{1}{2}+a\cdot\cos 2t)^{-1/2}\,dt$, $r_a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $(a=0)$, $r_a = \inf\{\frac{k}{2}$; k と $\phi(k\pi,a)/2\pi$ はともに自然数$\}$ $(a>0)$ であるとする。

Remarks. 上の定理と系において，$a=0$ に対する曲面 $M(a,H)$，M_a はそれぞれ flat torus $T^2(H)=S^1\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{H}{\sqrt{1+H^2}}\right)}\right)\times S^1\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{H}{\sqrt{1+H^2}}\right)}\right)$，Clifford torus $S^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\times S^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ である。

上の系において得られた minimal surfaces M_a について次の性質が成立する。

命題. M_a を上の系での極小曲面とする。このとき，$0<a<\frac{1}{2}$ ならば f_a は embedding でない。また，closed minimal surfaces M_a，$0<a<\frac{1}{2}$ の第1固有値 $\lambda_1(M_a)$ は 2 より小さい。

この命題の証明のあらすじは次の様になる。$g(a):=\Phi(\pi,a)$ は，a，$0\leqq a<\frac{1}{2}$，について連続であり，$\pi<g(a)=g(-a)<\sqrt{2}\pi$ $(0<a<\frac{1}{2})$，$g(0)=\sqrt{2}\pi$，$\lim_{a\uparrow\frac{1}{2}} g(a)<\frac{\pi^2}{3}$ をみたす。従って，$0<a<\frac{1}{2}$ のとき，M_a は $(T^2(k), I_a)$ に等長的である。但し，$T^2(k)=S^1\left(\frac{k}{2}\right)\times S^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$I_a=ds^2+\left(\frac{1}{2}+a\cos 2s\right)dt^2$，$k\geqq 3$ は自然数。ここでは，M_a が closed surface である場合（i.e. $g(a)/\pi$ が有理数である場合）だけ考えることにする。最後に，第1固有値 $\lambda_1(k,a)=\lambda_1(T^2(k), I_a)$ が I_a に連続的に依存することから我々の

主張が正しいことがわかる。

最後に、M. do Carmo と C.K. Peng の結果を拡張するために E. Heinz が導入した functional について述べる。以後、M はつねに、向きづけられた、連結な2次元の多様体を表わすものとし、M 上の領域 D とは、連結開集合で且、その閉包 $\overline{D}$ は compact, 境界 ∂D は C^∞ 級の1次元多様体であるものとする。$f: M \to R^3$ を C^∞-immersion とする。定数 H をとるとき、M の領域 D に対して

$$A_D^H(f) := \int_D \left\{ |f_x \wedge f_y| + \frac{2}{3} H (f, f_x \wedge f_y) \right\} dx\,dy$$

が E. Heinz が導入した functional である。但し、$\{x, y\}$ は M の正の局所座標系、f_x, f_y は偏導関数、$f_x \wedge f_y$ は R^3 のベクトルと見ての外積である。このとき、次のことは容易に示される。f が D 上の各点においてその平均曲率が H に等しいための必要且十分条件は D の境界 ∂D を固定する f の変分 f_t (i.e. $f_t: D \to R^3$: C^∞ 級, $f_t|\partial D = f|\partial D$, $f_0 = f$ 且 $F: (-\varepsilon, \varepsilon) \times \overline{D} \to R^3$, $F(t, x) = f_t(x)$: C^∞ 級) に対して $\frac{d}{dt} A_D^H(f_t)\big|_{t=0} = 0$ である。

さて、C^∞-immersion $f: M \to R^3$ の平均曲率が定数 H に等

しいとする。このとき，領域 $D \subset M$ が stable であるとは，D の境界を固定する f のすべての変分 f_t に対して $\frac{d^2}{dt^2} A_D^H(f_t)\Big|_{t=0} \geqq 0$ が成立することと定義する。

定理 5. $f: M \to R^3$ を向きづけられた連結な2次元多様体 M から R^3 への C^∞-immersion とし，その平均曲率が定数 H に等しいとする。もし，すべての領域 $D \subset M$ が stable であるならば，$H = 0$ であり且，$f(M) \subset R^3$ は平面である。

この定理の証明のあらすじは次の様になる。まず，M は単連結であると仮定してよい。即ち，$\pi: \tilde{M} \to M$ を universal covering manifold とするとき，M のすべての領域 D が stable であれば，つねに $\tilde{M}$ の領域 $\tilde{D}$ が stable になることが Smale の定理から示される。以後，M を単連結であるとする。すると，一意化定理によって，M はリーマン球面 S，単位開円板 B 又は，ガウス平面 C のいずれかに conformally equivalent である。さて，次の補題が成立する。

補題（第2変分公式）．変分ベクトルが $u\xi$，$u \in C^\infty(\bar{D})$，$u|\partial D = 0$，ξ は f に沿った単位法線ベクトル場，であ

る f の変分 $f_t : \bar{D} \to \mathbb{R}^3$ に対して，次が成立する。

$$\frac{d^2}{dt^2} A^H_D(f_t)\Big|_{t=0} = \int_D \{|\nabla_M u|^2 - |\mathrm{II}|^2 u^2\}\, dM.$$

但し，∇_M, dM は f から得られる induced metric に関する gradient と area element であり，II は第２基本形式である。

定理５の証明の続きを行う。 (i). M がリーマン球面に conformally equivalent である場合．M は特に単位球面に同相的であるから，定理の仮定から M はガウス曲率が一定な２次元球面 $S^2(a)$ に等長的である（H. Hopf の定理）。従って，$a = H^2$ となり，上の補題から，$M \cong S^2(H^2)$ の開半球面を含む領域はすべて "unstable" であることがわかる。 (ii) M が単位開円板 B，または，ガウス平面 $\mathbb{C}$ に conformally equivalent である場合．φ を B（または $\mathbb{C}$）から M の上への，複素１次元多様体と見做したときの，biholomorphic map とするとき，合成写像 $f\circ\varphi :$ B（又は，$\mathbb{C}$）$\to \mathbb{R}^3$ は C^∞-immersion である。このとき，$f\circ\varphi$ を改めて f と考えると，その induced metric ds^2 は $\lambda^2|dz|^2$, $\lambda>0$, と表示できる。すると，$M \simeq B$ であるとき，M 上のすべての領域 D が stable である

ならば、$\lambda=$一定 であることが示される。これは、induced metric ds^2 が完備であることに反する。最後に、$M \simeq \mathbb{C}$ である場合、M 上のすべての領域が stable であるならば、$\lambda^2|II|^2 \equiv 0$ であることが示される。従って、$II \equiv 0$ となり、f は totally geodesic である。このことは我々の主張が正しいことを示している。

Gulliver が導入した functional に関して、定理 1, 2, 3 の (1) において得られた R^3 内の曲面族の部分族で、その上のすべての領域が stable であることの証明などは、文献を見て戴くことにして、本稿を終えたいと思います。

References

[1] J.L. Barbosa and M.P. do Carmo, Stability of hypersurfaces with constant mean curvature, preprint.

[2] M.P. do Carmo and C.K. Peng, Stable complete minimal surfaces in R^3 are planes, Bull. A.M.S. 1(1979), 903-906.

[3] E. Heinz, Uber die Existenz einer Flache konstanter mittlerer Krummung bei vorgegebener Berandung, Math. Ann. 127(1954), 258-287.

[4] W.Y. Hsiang, Generalized rotational hypersurfaces of contant mean curvature in the Euclidean spaces I, J. Diff. Geom. 17(1982),337-356.

[5] W.Y. Hsiang and W.C. Yu, A generalization of a theorem of Delaunay, J. Diff. Geom. 16(1981), 161-177.

[6] R. Gulliver, Regularity of minimizing surfaces of prescribed mean curvature, Ann. of Math. 97(1973), 275-305.

[7] K. Kenmotsu, Surfaces of revolution with prescribed mean curvature, Tohoku Math. J. 32(1981), 787-794.

[8] H. Mori, Stable complete constant mean curvature surfaces in R^3 and H^3, to appear in Trans. A.M.S.

[9] H. Mori, A family of minimal surfaces in S^3, preprint.

[10] S. Bando and H. Urakawa, Generic properties of the eigen-value of the Laplacian for compact Riemannian manifolds, to appear in Tohoku Math. J.

[11] S.T. Yau, Seminar on differential geometry, Ann. Math. Studies No. 102, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1982.