数理解析研究所講究録
第490巻 1983年 48-61

Coxian到着に従う複数窓口待ち行列システムの拡散近似

東京工大大学院　大曽根　匡 (Tadashi Ohsone)
東京工大理学部　木村　俊一 (Toshikazu Kimura)

1. はじめに

待ち行列問題を解くにあたって、近似解法の重要性は非常に高いものであるが、発見的なものを除くと、体系的な近似解法はかなり限られてくる。拡散近似はそういった数少ない適用範囲の広い近似解法の一つである。拡散近似は、待ち行列システムの特性量、例えば、系内客数過程 $\{Q(t), t \geq 0\}$、を適当な拡散過程 $\{X(t), t \geq 0\}$ によって近似しようという発想に基づいている。このときに主として問題となるのは

1) 拡散パラメータをどのように設定するのが適当か？

2) どのような境界を用いるのが適当か？

3) 拡散過程 $X(t)$ をどのように離散化するか？

の三点である。

待ち行列問題に対する拡散近似の研究はここ15年位の間活発になされているが、これらを拡散過程に課せられる境界に

ついて分類すると大きく二つに分けられる。その一つは反射壁境界であり、もう一つは基本復帰境界である。この観点から従来の研究を整理すると下記のようになる。

1) 反射壁境界を用いた拡散近似

GI/G/1	Kobayashi [8]	(1974)
GI/G/1	Heyman [5]	(1975)
GI/G/m	Halachmi and Franta [4]	(1978)
GI/G/m	Sunaga, Kondo and Biswas [9]	(1978)
GI/G/m/N	Sunaga, Biswas and Nishida [10]	(1982)

2) 基本復帰境界を用いた拡散近似

M/G/1	Gelenbe [3]	(1975)
M^X/G/1	Chiamsiri and Moore [2]	(1977)
GI^X/G^Y/1	Chiamsiri and Leonard [1]	(1981)
M/G/m	Kimura [6]	(1981)
M^X/G/m	Kimura and Ohsone [7]	(1982)

1), 2)より、集団到着待ち行列システムを拡散近似によって扱うときには基本復帰境界が用いられていることがわかる。これが妥当であることは拡散過程の境界における見本関数を思い浮べることによっても容易に理解できる。しかし、その一方で、基本復帰境界を用いた拡散近似は本質的にはポアソン到着の待ち行列システムに限定される。本稿では、Coxian

到着に従う複数窓口待ち行列システムに対する基本復帰境界を用いた拡散近似について報告する。

2. Coxian分布の残余寿命分布

確率変数Tを図1のⒶを出てからⒷに到達するまでの時間として定義する。このときTはCoxian分布$\{\lambda_i, r_i\}_{i=1}^{n}$に従うと呼ばれる。ここで、$n$はフェイズの数で、フェイズ$i$ではパラメータ$\lambda_i$の指数分布に従った時間だけそこに留り、その後、確率r_iでフェイズ$i+1$に行き、確率$1-r_i$でⒷに進むものとする。また、$r_0=1$，$r_n=0$，$\lambda_i>0$と定義する。

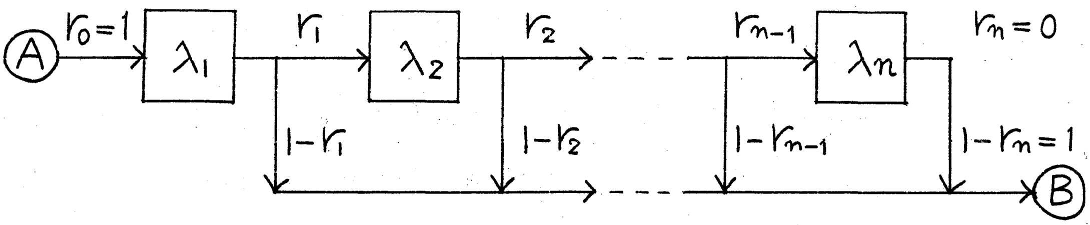


図1　Coxian分布$\{\lambda_i, r_i\}_{i=1}^{n}$

Coxian分布$\{\lambda_i, r_i\}_{i=1}^{n}$のラプラス変換は

$$E[e^{-sT}] = \sum_{i=1}^{n} u_i(1-r_i)\prod_{k=1}^{i}\frac{\lambda_k}{\lambda_k+s}, \quad \mathrm{Re}\, s \geq 0,$$

となるのは容易にわかる。ここで

$$u_i = \prod_{k=0}^{i-1} r_k \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

である。また

$$E[T]=\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i}{\lambda_i}$$

であることも容易にわかる。

Coxian分布$\{\lambda_i, r_i\}_{i=1}^{n}$の定常残余寿命分布について調べてみよう。

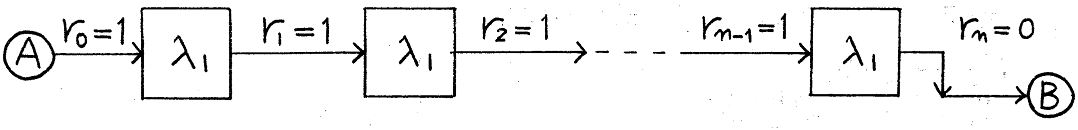
<u>定理</u>

確率変数TがCoxian分布$\{\lambda_i, r_i\}_{i=1}^{n}$に従うとき、その定常残余寿命$T_R$はCoxian分布$\{\lambda_i, R_i\}_{i=1}^{n}$に従う。ここで

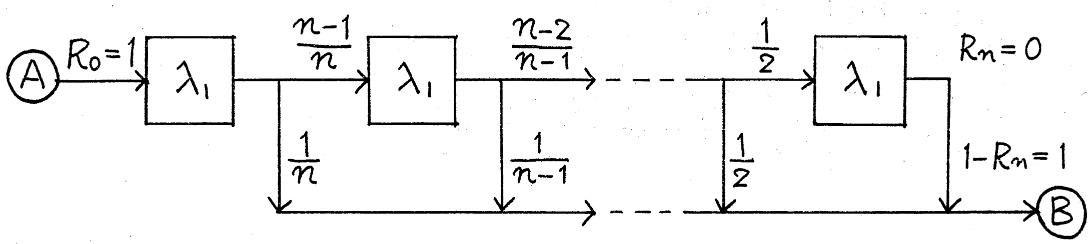
$$R_i=\frac{\sum_{k=i+1}^{n}(u_k/\lambda_k)}{\sum_{k=i}^{n}(u_k/\lambda_k)} \qquad (i=1,2,\cdots,n-1)$$

（証明は略）

［例］フェイズnのアーラン分布



その定常残余寿命分布



3. Coxian到着に従う複数窓口待ち行列システムの拡散近似

3-1 定式化

Coxian到着に従う複数窓口の待ち行列システムの拡散近似について考察することにしよう。ここで取り扱うことができる待ち行列システムは、集団到着あるいは有限待ち合い室をもつ待ち行列システムであるが、本稿では集団到着待ち行列システムを主として扱うことにする。まず、記号をいくつか用意する。

$1/\lambda$ ----客の集団の平均到着時間間隔
σ_a^2 ----到着時間間隔の分散
$C_a = \lambda\sigma_a$
G -----客の集団の大きさ
$g_i = P\{G = i\}$
$\gamma = E[G]$
$\sigma_g^2 = V[G]$
$C_g = \sigma_g/\gamma$
$1/\mu$ ----平均サービス時間
σ_s^2 ----サービス時間の分散
$C_s = \mu\sigma_s$
m -----窓口数
$Q(t)$--- 時刻tでの系内客数
Q ----- 定常状態における系内客数
$\pi_k = P\{Q = k\}$
$p(x, t)$--- $X(t)$の確率密度関数
$a(x)$ ----- $X(t)$の無限小分散
$b(x)$ ----- $X(t)$の無限小平均

客の到着時間間隔はCoxian分布$\{\lambda_i, r_i\}_{i=1}^{n}$に従うことを仮定しているので次式が成り立つ。

$$\frac{1}{\lambda}=\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i}{\lambda_i}$$

$Q(t)$を近似する過程として次のような拡散過程$X(t)$を考える。領域$(0,\infty)$においては通常の拡散過程としてふるまい、境界$x=0$に達すると保持時間Hだけ境界に留った後、ある確率密度関数$f_0(x)$で$x\in(0,\infty)$に跳躍し、その後は再帰的にふるまう過程を考える。ここでは、この境界での保持時間Hを到着時間間隔の定常残余寿命で近似する。このとき、到着時間間隔はCoxian分布$\{\lambda_i, r_i\}_{i=1}^{n}$に従うことを仮定しているから、前節の定理より、その定常残余寿命もまた同じフェイズ数のCoxian分布$\{\lambda_i, R_i\}_{i=1}^{n}$に従う。これより、HがCoxian分布$\{\lambda_i, R_i\}_{i=1}^{n}$に従った境界を考えればよいことがわかる。このような拡散過程$X(t)$の確率密度関数$p(x,t)$は次の拡散方程式を満足する。

$$\frac{\partial}{\partial t}p=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{a(x)p\}-\frac{\partial}{\partial x}\{b(x)p\}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(1-R_i)P_i(t)f_0(x) \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}P_1(t)=-\lambda_1P_1(t)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\{a(x)p\}-b(x)p\Big|_{x=0} \qquad (2)$$

$$\frac{d}{dt}P_i(t)=-\lambda_iP_i(t)+\lambda_{i-1}R_{i-1}P_{i-1}(t) \qquad (i=2,3,\cdots,n) \qquad (3)$$

ここで、$P_i(t)$は$X(t)$が保持時間のフェイズiにいる確率を表わす（図2参照）。

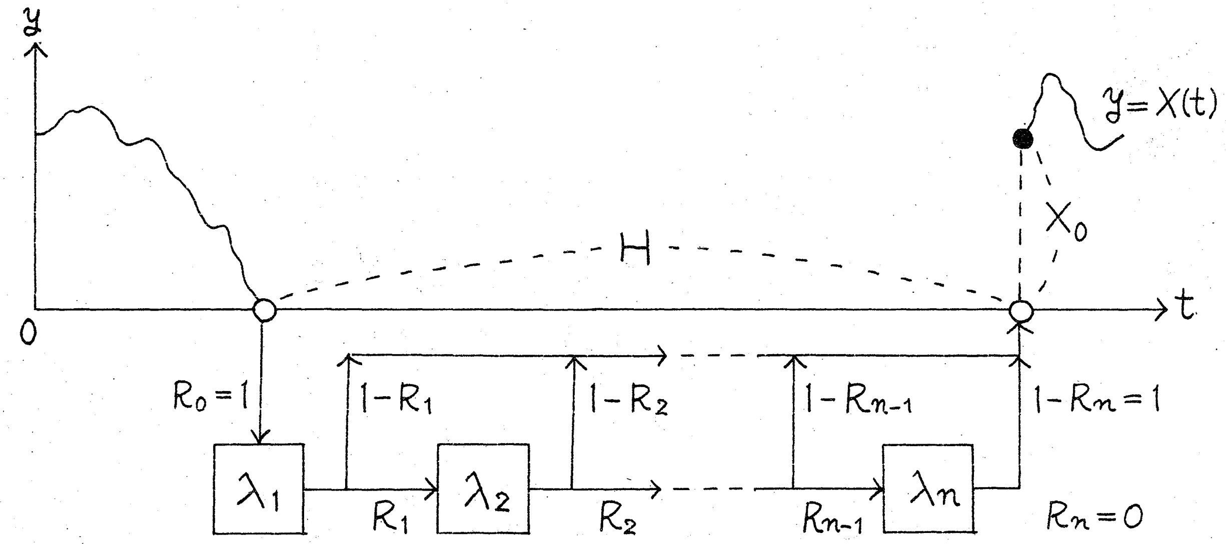


図２　拡散過程X(t)の見本関数

以下では過程が定常状態にある場合を考える。エルゴード条件として $\rho = \lambda\gamma / m\mu < 1$ を仮定する。このとき(1)～(3)は次のように書ける。

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\{a(x)p\} - \frac{d}{dx}\{b(x)p\} + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(1-R_i)P_i f_0(x) = 0 \qquad (4)$$

$$-\lambda_1 P_1 + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\{a(x)p\} - b(x)p\Big|_{x=0} = 0 \qquad (5)$$

$$-\lambda_i P_i + \lambda_{i-1} R_{i-1} P_{i-1} = 0 \qquad (i=2,3,\cdots,n) \qquad (6)$$

(6)より、$U_i \triangleq \prod_{k=0}^{i-1} R_k$ とおくと

$$P_i = \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} R_{i-1} P_{i-1} = \frac{U_i}{\lambda_i}\lambda_1 P_1 \qquad (i=2,3,\cdots,n)$$

となるので、Xが境界にいる確率 π_0 は、

$$\pi_0 = \sum_{i=1}^{n} P_i = \lambda_1 P_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{U_i}{\lambda_i} = \lambda_1 P_1 / \xi$$

となる。ここで

$$1/\xi = (C_a^2 + 1)/2\lambda \quad 。$$

従って

$$\lambda_1 P_1 = \xi \pi_0$$

が得られ、また

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (1 - R_i) P_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i R_i P_i = \lambda_1 P_1 = \xi \pi_0$$

より、(4)，(5)は結局次のように表わすことができる。

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \{a(x)p\} - \frac{d}{dx} \{b(x)p\} + \xi \pi_0 f_0(x) = 0 \tag{7}$$

$$-\xi \pi_0 + \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \{a(x)p\} - b(x)p \Big|_{x=0} = 0 \tag{8}$$

3－2 解法

(7)，(8)を解くにあたって $f_0(x)$，$a(x)$，$b(x)$をどのように設定するかがまず問題となる。$f_0(x)$については、集団到着待ち行列システムに対して

$$f_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \, \delta(x - i) \tag{9}$$

と設定することは自然である。また一方

$$f_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \, \delta(x - i + \tfrac{1}{2}) \tag{10}$$

と設定する方法も考えた。この考えは、離散化する際に、π_k すなわち $P\{Q=k\}$ の近似として $P\{k-1<X\leqq k\}$ を用いるので、系内に k 人いると見なされる区間 $(k-1,k]$ の中間地点の $k-\frac{1}{2}$ に拡散過程が復帰すると考えるのも自然であろうという発想である。数値的に調べてみると、これが予想よりも近似の精度を良くしていることがわかった。

拡散パラメータ $a(x)$, $b(x)$ は Kimura [6] や Kimura and Ohsone [7] が提案したように区分的に一定値を取らせるように与える。すなわち、集団待ち行列システムに対しては

$$b(x)=\lambda\gamma-\min(\lceil x\rceil,m)\mu$$

$$a(x)=\lambda(\sigma_g^2+\gamma^2C_a^2)+\min(\lceil x\rceil,m)\mu C_s^2$$

とする。ここで $\lceil x\rceil$ は x より小さくない最小の整数を表わす。この定義を用いると、(7)はある1階の常微分方程式系に帰着され、その区分的な一般解 $p_k(x)$ は容易に求めることができる。これを正規化条件、境界条件、平滑化条件などを用いて $p(x)$ を容易に陽な形で導くことができる（[6]，[7]参照）。すなわち、集団到着待ち行列システムについては、(7)を積分し条件(8)を考慮すると、$k-1<x<k$ に対して

$$\frac{1}{2}a_k\frac{d}{dx}p_k(x)-b_kp_k(x)=\xi\pi_0\bar{g}_k\qquad(k=1,2,\cdots)\tag{11}$$

が得られる。ここで、$a_k\triangleq a(k)$, $b_k\triangleq b(k)$, $\bar{g}_k=1-\sum_{i=1}^{k-1}g_i$

とする。(11)を

正規化条件：$\pi_0 + \int_0^\infty p(x)\,dx = 1$

境界条件　：$\lim_{x\downarrow 0} p(x) = 0$，$\lim_{x\uparrow\infty} p(x) = 0$

平滑化条件：$\lim_{x\uparrow k} p_k(x) = \lim_{x\downarrow k} p_{k+1}(x)$　　$(k=1,2,\cdots)$

のもとで解くと、例えば全ての$k(\geqq 1)$に対し$b_k \neq 0$のときは

$$p_k(x) = \pi_0\left[\left(q_k + \frac{\xi}{b_k}\bar{g}_k\right)\exp\{2b_k(x-k)/a_k\} - \frac{\xi}{b_k}\bar{g}_k\right]$$

が得られる。ここで、量$\{q_k,\ k=1,2,\cdots,m-1\}$は、再帰式：

$$q_k = \left(q_{k-1} + \frac{\xi}{b_k}\bar{g}_k\right)\exp(2b_k/a_k) - \frac{\xi}{b_k}\bar{g}_k\ ,\quad k \geqq 1$$
$$q_0 = 0$$

で与えられる。また

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{a_k}{2b_k} - \frac{a_{k+1}}{2b_{k+1}}\right)q_k - \sum_{k=1}^{m}\frac{\bar{g}_k}{b_k} + \frac{1}{b_m}\left\{r - m - \sum_{k=1}^{m-1}(k-m)g_k\right\}\right]^{-1}$$

である。

Qに関する種々の特性量を求めるには、求められた$p(x)$を離散化する必要がある。本稿では、定常確率π_kを

$$\pi_k = \int_{k-1}^{k} p(x)\,dx \qquad (k=1,2,\cdots)$$

によって近似する。すなわち

$$\pi_k = \begin{cases} \pi_0 \left\{ \dfrac{a_k}{2b_k} (g_k - g_{k-1}) - \dfrac{\xi}{b_k} \bar{g}_k \right\}, & \text{if } b_k \neq 0 \\ \pi_0 \left(g_k - \dfrac{\xi}{a_k} \bar{g}_k \right), & \text{if } b_k = 0 \end{cases} \tag{12}$$

となる。これを用いて平均系内客数Lや平均列内客数L_qなどの近似式を得ることができる。例えば

$$\begin{aligned} L_q = -\pi_0 \Big[& \frac{a_m}{2b_m} \{1 - \exp(2b_m/a_m)\}^{-1} g_m - \frac{\xi a_m}{2b_m^2} \{ \gamma - m \\ & - \sum_{k=1}^{m-1} (k-m) g_k \} + \frac{\xi}{2b_m} \{ \sigma_g^2 + (\gamma - m)(\gamma - m + 1) \\ & - \sum_{k=1}^{m-1} (k-m)(k-m+1) g_k \} \Big] \end{aligned} \tag{13}$$

4. 数値結果

上記の拡散近似の近似式の精度を調べるために、単一到着のシステムの平均列内客数L_qについて厳密解と比較したのが表1及び2である。表中の「E1」は基本復帰境界で復帰地点が1の近似式、「E0.5」は基本復帰境界で復帰地点が0.5の近似式、「R」は反射壁境界を用いた近似式（[9]）である。表より、mの値が小さいところではE0.5の近似式の精度がE1の近似式よりもかなり良いことがわかる。

表1　$E_2/E_2/2$　システムに対する平均列内客数

		L_q			absolute error		
ρ	exact	E1	E0.5	R	E1	E0.5	R
0.1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.2	0.00	0.01	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00
0.3	0.01	0.03	0.02	0.01	0.02	0.01	0.00
0.4	0.05	0.08	0.05	0.04	0.03	0.00	- 0.01
0.5	0.12	0.17	0.12	0.10	0.05	0.00	- 0.02
0.6	0.27	0.33	0.27	0.23	0.06	0.00	- 0.04
0.7	0.58	0.66	0.58	0.52	0.08	0.00	- 0.06
0.8	1.30	1.41	1.30	1.22	0.09	0.00	- 0.08
0.9	3.69	3.82	3.68	3.58	0.13	- 0.01	- 0.11
0.95	8.63	8.77	8.63		0.14	0.00	
0.98	23.59	23.74	23.59		0.15	0.00	

表2　$E_2/E_2/5$　システムに対する平均列内客数

		L_q			absolute error		
ρ	exact	E1	E0.5	R	E1	E0.5	R
0.1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.4	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	- 0.01
0.5	0.04	0.03	0.03	0.02	- 0.01	- 0.01	- 0.02
0.6	0.12	0.10	0.10	0.08	- 0.02	- 0.02	- 0.04
0.7	0.35	0.31	0.31	0.26	- 0.04	- 0.04	- 0.09
0.8	0.97	0.92	0.92	0.83	- 0.05	- 0.05	- 0.14
0.9	3.24	3.17	3.17	3.02	- 0.07	- 0.07	- 0.22
0.95	8.12	8.04	8.04		- 0.08	- 0.08	
0.98	23.04	22.96	22.96		- 0.08	- 0.08	

5. おわりに

本稿では、主として複数窓口の集団到着待ち行列システムについて考えたが、この拡散近似は有限待ち合い室をもつ待ち行列システムに対しても容易に応用できる。従って、拡散近似はかなり広い範囲の待ち行列システムに対して適用できるようになったといえよう。

References

[1] Chiamsiri, S. and Leonard, M.S., "A Diffusion Approximation for Bulk Queues," Management Sci., Vol. 27, 1181-1199 (1981).

[2] Chiamsiri, S. and Moore, S.C., "Accuracy Comparisons between Two Diffusion Approximations for $M^X/G/1$ Queues — Instantaneous Return vs. Reflecting Boundary," presented at the ORSA/TIMS Meeting, Atlanta, November, 1977.

[3] Gelenbe, E., "On Approximate Computer System Models," J. Assoc. Comput. Mach., Vol. 22, 261-269 (1975).

[4] Halachmi, B. and Franta, W.R., "A Diffusion Approximation to the Multi-Server Queue," Management Sci., Vol. 24, 522-529 (1978).

[5] Heyman, D.P., "A Diffusion Model Approximation for the GI/G/1 Queue in Heavy Traffic," Bell System Tech. J., Vol. 54, 1637-1646 (1975).

[6] Kimura, T., "Diffusion Approximation for an M/G/m Queue," Research Report on Information Sciences, No. B-95, Tokyo

Institute of Technology, 1981 (to appear in Operations Res., Vol. 31 (1983)).

[7] Kimura, T. and Ohsone, T., "Diffusion Approximation for an $M^X/G/m$ Queue," Research Report on Information Sciences, No. B-111, Tokyo Institute of Technology, 1982 (to appear in Management Sci.).

[8] Kobayashi, H., "Application of the Diffusion Approximation to Queueing Networks. I: Equilibrium Queue Distributions," J. Assoc. Comput. Mach., Vol. 21, 316-328 (1974).

[9] Sunaga, T., Kondo, E. and Biswas, S.K., "An Approximation Method Using Continuous Models for Queueing Problems," J. Opns. Res. Soc. Japan, Vol. 21, 29-42 (1978).

[10] Sunaga, T., Biswas, S.K. and Nishida, N., "An Approximation Method Using Continuous Models for Queueing Problems II (Multi-Server Finite Queue)," J. Opns. Res. Soc. Japan, Vol. 25, 113-127 (1982).