数理解析研究所講究録
第 490 巻 1983 年 62-74

ブロッキングを伴う直列型待ち行列システムの可逆性

工学院大　山崎源治 (Genji Yamazaki)
防衛大　川島　武 (Takeshi Kawashima)
筑波大　逆瀬川浩孝 (Hirotaka Sakasegawa)

1. はじめに

ブロッキングを伴う直列型待ち行列システムの「容量」(この定義は，2節で)は，待ち行列のクラシックな問題の1つとして Hunt (1956) に始まり，多くの研究者により議論されてきた ([1]〜[15])。

当初のアプローチをみると，2つの型に大別できる(*-1)。その1つは，簡単なモデルに対して平衡方程式をたて，それを解析的に解き，種々の特性を導くことである (Hunt [6], Makino [10])。 他方，このシステムは近年特に注目をあびてきている「機械自動加工ライン」のよいモデル化であるため，工程設計の立場から，より大規模なモデルの解析が強く要求されてきた。 必然的に，これは高次元の連立方程式の数値解法と結びつき，多くの研究者により取上げられてき

ている（Freeman [2], Fujii and Tanioka [3], Hiller and Boling [6], [7]など）(*-2)。この場合は，多くの数値計算の結果から，機械の配列の仕方と生産率（容量），各機械間のバッファ容量（待ち行列の有限待合室に対応）の配分の仕方と生産率の関係を明らかにし，それに基づいての最適機械配列，最適バッファ容量配分問題が議論の中心となっている。

この２つの型の研究を通して，容量に関する１つの特性が提唱された。すなわち，Makino (1964)[10] は，３人の指数サーバが直列に並び（順に，サーバ1, 2, 3と呼ぶ；平均は $\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}, \mu_3^{-1}$），中間待ちを許さないシステムの容量を計算し，その結果が μ_1, μ_3 の対称式となることから，このシステムで客を逆順に処理しても（客を，サーバ3→サーバ2→サーバ1の順で処理することを意味する）容量は不変であること—「容量の可逆性」（C－可逆性）—を示した。その後，この特性は，多くの数値計算の結果からかなり広いクラスのシステムでも成立することが確かめられ（ただし，単一サーバが直列に並んだシステム），'Conjecture' として残されてきた（たとえば，[3], [6]）。

Yamazaki and Sakasegawa (1975)[14] は，単一サーバが直列に並び，中間待ちが有限のシステムは，C－可逆性より強い特性—「D－可逆性」（この定義は，2節）—を持つことを

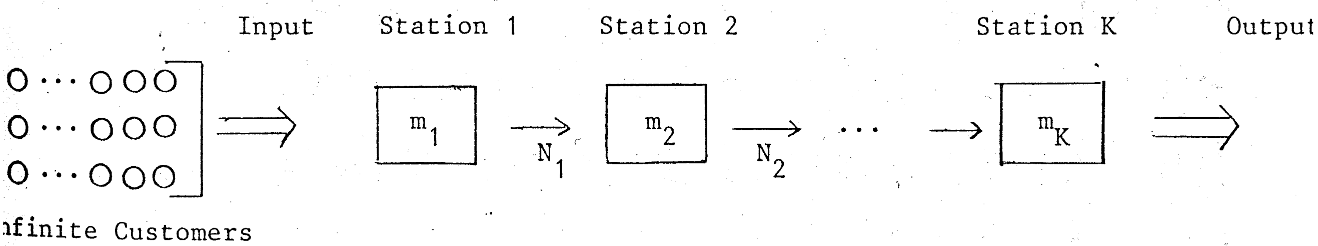
示し，その結果としてこのConjectureを証明した（Muth (1979)[1]の結果は，[14]と同じものである）。[14]の拡張として，Yamazaki, Sakasegawa and Kawashima (1976)[15]は，直列に並んだあるサービス・センター（以後，ステーションと呼ぶ）が複数サーバからなる場合，そこでの客のサービス時間が一定ならば同じ特性を持つことを証明し，その応用例を与えている。(*-3) その後，Dattatreya (1978)[1]は，ブロッキングを伴う直列型待ち行列システムで，各ステーションが複数サーバからなり，そこでの客のサービス時間が変動したとしても，D-可逆性であることを主張した。しかし，[1]での証明は，複数サーバからなるステーションを含む場合には誤りであり（事実，簡単な反例を作ることができる—3節—），彼の結果は，各ステーションが単一サーバからなるときのみ正しい。すなわち，[1]の結果は，[14]・[15]のそれに帰着する。

結果として，ブロッキングを伴う直列型待ち行列システムで，各ステーションが複数サーバからなり，そこでの客のサービス時間が変動する場合，上述の特性（CあるいはD-可逆性）が成立するか否かの問題は，手つかずのまま残されてきた。本稿の目的は，この問題に対して1つの答えを与えることである。最初に，D-可逆性が成立するシステムの

特性，および複数サーバからなるステーションを含むシステムでは，2-ステーション・システムでさえも，一般的にはD-可逆性が成立しないことを明らかにする(3節)。 次に，C-可逆性は，2-ステーションの場合は各ステーションが複数サーバからなるときでも成立するが，ステーション数が3になると最早成立しないことを明らかにする(4節)。 なお，2節では，本稿で扱うモデルおよび使用する用語を説明し，脚注は終りにまとめる。

2. モデルと用語

本稿では，次の直列型待ち行列システムを扱う。 K個のステーションが直列に並び(ステーション1，ステーション2，…，ステーションK)，ステーションkと$k+1$の間では，N_k人までの客が待つことができる。 ステーションkのサーバ数は



m_k: the number of servers at station k (k=1,2,···,K)

N_k: the number of waiting positions between stations k and k+1 (k=1,2,···,K-1)

Fig.1. Tandem Queueing System with Blocking

m_kで，ステーション1の前には常に十分多くの客が待っている（Fig. 1）。おのおのの客は，ステーション1→ステーション2→…→ステーションKの順にサービスを受け，系を去る。そして，ある客のサービスがステーションkで終了したとき，ステーションkと$k+1$の間ですでにN_k人の客が待っているなら，その客は前へ進めずステーションkのサーバをブロックする（その客が前へ進むことができるまで）。各ステーションでのサービス規律は，特にことわらない限り，先着順とする。ステーションkでの各客のサービス時間は，互いに独立で同一分布に従う確率変数で，各ステーション間のサービス時間もまた独立であるとする。

上述のシステムが与えられたとき（そのシステムを，Original Systemと呼び，OSと略す），そのシステムでおのおのの客を全く逆順に処理する―すなわち，ステーションKの前に常に十分多くの客が待っているとし，各客がステーションK→ステーションK−1→…→ステーション1の順でサービスを受け，系を去る―場合を逆順システム（Reversed System；RSと略す）と呼ぶ。

上述の待ち行列システムの「容量」を，最後のステーションからの客の退去率（もちろん，平衡状態での）として定義したとき，そのシステムの「C−可逆性を次のように定義

する。

C−可逆性（[1]）：OSとそのRSの容量が一致するなら，そのOSは「C−可逆的」である，という.

直列型待ち行列システムのC−可逆性より強い特性「D−可逆性」を次のように定義する.

D−可逆性（[1]）：OSとそのRSが，時刻0で共に空の状態から客のサービスを開始したとき，それらのシステムからのn番目の客の退去時点の分布が，すべてのnについて一致するとき，そのOSは「D−可逆的」である，という。

もちろん，あるOSがD−可逆的であるなら，C−可逆的であるが，その逆は成立しない.

3. D−可逆性

我々の先の論文[14]・[15]で得た直列型待ち行列システムのD−可逆性に関する結果は，次のように要約できる。

定理：

$m_k=1$ なら，ステーションkでの客のサービス時間は任意の分布に従う確率変数，$m_k \geq 2$ ならそれは一定，のK−ステーション・システムは，D−可逆的である．

*この結果は，1人の客の各ステーションでのサービス時間の独立性は必要としない（[1]）．

このD−可逆性を持つシステムの特徴は，客のサービス時間の変動が，単一サーバからなるステーションのみで許されること−システム内で客の追いこしが決して生じないこと−，であることと考えられる。事実，客の追いこしが生じるシステムでは，$K=2$の場合でさえ，最早この特性を持たないことが，次の例で明らかになる。

例：

$K=2$, $m_1=2$, $m_2=1$, $N_1=0$ の直列型システムを考える。S_1, S_2を順にステーション1, 2での客のサービス時間とし，それらの分布は，$Prob.(S_1=1) = Prob.(S_2=2) = 1/2$, $S_2=2$（一定）である。このOSとそのRSが時刻0で共に空の状態から客のサービスを開始したときの，それぞれのシステムからの2番目の客の退去時点（順に，D_2, D_2' とする）の

分布は，簡単な計算で次のようになることを確かめることができる。

$\mathrm{Prob.}(D_2=5)=3/4$， $\mathrm{Prob.}(D_2=6)=1/4$，

$\mathrm{Prob.}(D_2'=5)=\mathrm{Prob.}(D_2'=6)=1/2$.

明らかに，このOSはD−可逆的ではない。

4. C−可逆性

前節では，客の追いこしが生じるシステムでは，$K=2$ のときでさえD−可逆的ではないことを示したが，本節では，それより弱い特性−C−可逆性−がそのようなシステムで成立するか否か，を考えてみる。

最初に，$K=2$，m_1，m_2，N_1 が任意の場合について考えてみる。このOSで，B，Q，I を順に，任意時点（平衡状態）での，ステーション1でブロックされているサーバの数，ステーション間で待っている客の数，ステーション2の空いているサーバの数，とする。また，B'，Q'，I' を順に，そのRSでの任意時点で，ブロックされいるサーバの数（ステーション2），ステーション間で待っている客の数，空いているサーバの数（ステーション1），としよう。

このとき，次の結果を得る。

定　理：

(i)　このシステムは，C－可逆的である。

(ii)　(B, Q, I)の同時分布と(I', M_1-Q', B')のそれは，一致する。

この定理は，OSとRSを同じサンプルで観測したとき，BとI'，QとM₁－Q'，IとB'の動きがそれぞれ対応することから得ることができる（その証明の詳細は，[16]）。[16]の証明法から，上の結果を次のように拡張できる。

(i)：各ステーションでのサービス規律は，先着順でなくてもよい。すなわち，ある客のサービスが終了し，その客が系を去ったとき，その第2のステーションで次にサービスを受ける客を，ステーション間で待っている客および第1ステーションをブロックしている客（もちろん，それらが存在するとき）のなかからならどのように選んでもよい。

(ii)：1つのステーションでの複数サーバの能力（あるいは，各サーバでのサービス時間の分布）が異なっていても，どのサーバを優先的に使うかの規律が，OSとRSで対応づけば，この定理は成立する－例えば，常に能力の高

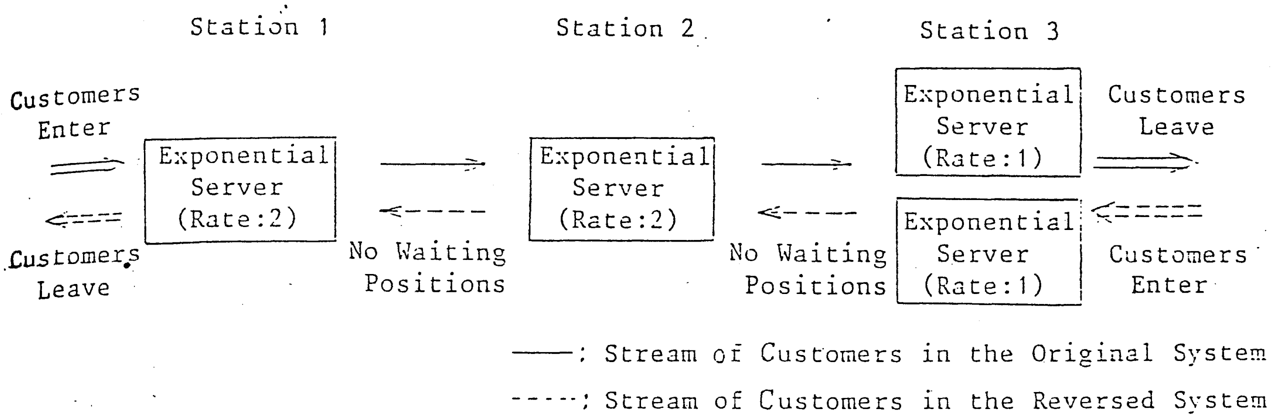


Fig. 2　Three-Station Blocking System Not to Be C-Reversible

りサーバを使う，という規律のもとで—．

客の追いこしが生じる場合でも，$K=2$ のときは C−可逆性を持つことが明らかになったが，$K\geq 3$ の場合は，最早この特性が成立しないことが次の例で明らかになる。

例：

$K=3$, $m_1=m_2=1$, $m_3=2$, $N_1=N_2=0$ なる OS とその RS を考える（Fig. 2）。ステーション 1,2,3 での客のサービス時間は，順にレイト 2,2,1 の指数分布に従う。この OS と RS の容量は，平衡方程式を解くことにより得ることができ，その結果は，

［OS の容量］$= 86/145 \simeq 0.5931$,

［RS の容量］$= 22/37 \simeq 0.5946$,

となり，明らかにこのシステムはC－可逆的ではない。

脚注

(＊-1)：[1]－[15]のなかで，２つの型に入らない論文は[4]と[12]である。[12]は，２人のサーバが直列に並び，中間待ちを許さない場合，任意の到着過程を想定したとき，到着率がその容量より小さければそのシステムは安定となることを証明している。[4]は，K(任意)－ステーション・システム(ただし，$m_k=1$；$k=1,2,\cdots,K$)への[12]の拡張である。

(＊-2)：タクト式生産ラインの容量に関する研究も幾つかなされているが，本稿で扱うモデルと若干異なるため省略する。

(＊-3)：「このような特性を研究するメリットは」とよく聞かれる。実際問題では，加工順序(機械の配列)はおのずと決っていて，ジョブを逆に流すシステムは非現実的なので，理論的興味にすぎない，という疑問である。しかしながら，この程度の特性でも明らかになれば，工程設計などでもかなり利用できる。第一に，順序はどう決めてもよいが，決めるとその順で処理する場合の最適順序問題および最適バッファ配分問題では，その検討すべき配列を半減できる。詳細は省略するが，この特性の見方を変えると，生産工程でどの工程を先に改善するか，などの問題についても，１つのよい目安を与える，などである。

References

1. Dattatreya, E. S., "Tandem Queueing Systems with Blocking," Operations Res. Center Report #78-1, University of California. Berkeley, (1978).

2. Freeman, D. R., "A General Line Balancing Model," Proceedings XIX Conference AIIE, (1968), p. 230.

3. Fujii, S., Tanioka, T. and Narutaki, R., "On the Balance Equations for Tandem Queues," (in Japanese), Reported at Japan Operations Res. Meeting, Spring (1974).

4. Hildebrand, D. K., "Stability of Finite Queue, Tandem Server Systems," J. App Prob., Vol.4(1967), p. 571.

5. ____, "On the Capacity of Tandem Server, Finite Queue, Service Systems," Operations Res., Vol.16(1968), p. 72.

6. Hillier, F. S. and Boling, R. W., "The Effect of Some Design Factors on the Efficiency of Production Lines with Variable Operation Times," J. Indust. Engineering, Vol.17(1966), p. 651.

7. ____ and ____, "Finite Queues in Series with Exponential or Erlang service Times - A Numerical Approach," Operations Res., Vol.15(1967), p. 286.

8. Hunt, G. C., "Sequential Arrays of Waiting Lines," Operations Res., Vol. 4 (1956), p. 674.

9. Knott, A. D., "The Inefficiency of a Series of Work Stations - A Simple Formula," International J. Production Res., Vol. 8(1970), p. 109.

10. Makino, T., "On the Mean Passage Time Concerning Some Queueing Problems of the Tandem Type," J. Operations Res. Soc. Japan, Vol. 7(1964), p. 17.

11. Muth, E. J., "The Reversibility Property of Production Lines," Management Science, Vol. 25(1979), p. 152.

12. Suzuki, T., "Ergodicity of a Tandem Queue with Blocking," J. Operations Res. Soc. Japan, Vol. 7(1964), p. 68.

13. Tumura, Y. and Ishikawa, A., "Numerical Calculation of the Tandem Queueing System," TRU Mathematics, Vol. 14(1978), p. 57.

14. Yamazaki, G. and Sakasegawa, H., "Properties of Duality in Tandem Queueing Systems," Annals of the Institute of Statist. Math., Vol. 27(1975), p. 201.

15. ______, ______ and Kawashima, T., "Production Rate Estimated with Flow-Shop Reversibility," (in Japanese), Transactions of the Japan Soc. of Mechanical Engineers, Vol. 43(1976), p. 1985.
Translated into English, Bulletin of the Japan Soc. of Mechanical Engineers, Vol. 21(1978), p.167.

16. ______, Kawashima, T. and Sakasegawa, H., "Reversibility of Tandem Blocking Queueing Systems," Institute of Socio-Economic Planning Discussion Paper Series No. 175, University of Tsukuba (1982).