数理解析研究所講究録
第 490 巻 1983 年 166-178

Cyclic Queues における Cycle time の分布計算

防衛大学校 鳥越 昇 (Torigoe Noboru)
防衛大学校 川島 武 (Kawashima Takeshi)

§1. はじめに

Cyclic Queues は、待ち行列ネットワーク理論の草創期から、研究されているモデルであるが、その Cycle time の分布については、あまり知られていない。

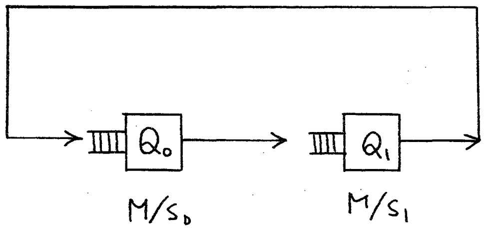
近年タイムシェアリング計算機のレスポンスタイムの分析のため、Cycle time を研究した報告が見られる。[1],[3],[6] しかし、いずれも Single Server モデルを対象としている。本報告は、これらの先駆者達の研究を、Many servers モデルに拡張し、Cycle time 分布の計算式を、平易な形で導出し、滞在時間に関する特性量を、若干の数値例で示したもので、ある。

先ず §2 でモデルと、解析に必要な基本的結果を述べ、§3 で Single Server モデルについて、知られている結果を紹介する。

そして§4で、Many Servers モデルの解析を行ない、§5でその結果を、Central Server モデルに適要し、若干の、数値例を示す。

§2 モデルと基本的な結果

図のような、Cyclic Queues を考える。



Q_0, Q_1 の各サーバーのサービスは、指数分布とし、規律は、FCFS とする。

〈記　号〉

N　：系内人数

s_0, s_1 : Q_0, Q_1 のサーバー数

μ_0, μ_1 : Q_0, Q_1 の各サーバーのサービス率

$$\rho = s_1\mu_1 / s_0\mu_0$$

$Q_0(t)$, $Q_1(t)$ ：時刻 t での Q_0, Q_1 の状態

$Q(t) = (Q_0(t), Q_1(t))$ ：時刻 t での系の状態

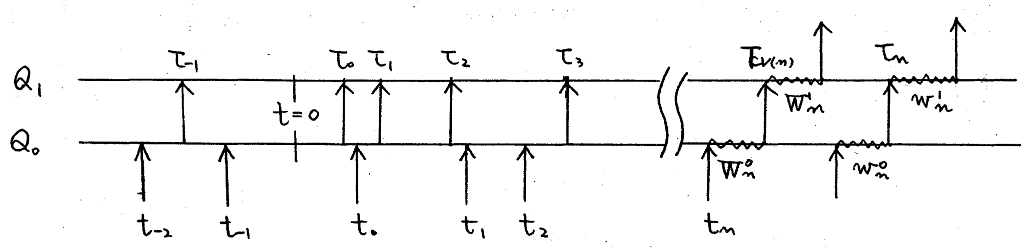
$\{t_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ $(\cdots < t_{-1} < 0 \leqq t_0 < t_1 < \cdots)$ ：Q_0 への到着時点列

$\{\tau_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ $(\cdots < \tau_{-1} < 0 \leqq \tau_0 < \tau_1 < \cdots)$ ：Q_1 への到着時点列

(W_n^0, W_n^1) : t_n に到着した客の Q_0, Q_1 での滞在時間

(w_n^0, w_n^1) : τ_n に到着した客の Q_0, Q_1 での滞在時間

$\tau_{\nu(n)}$：t_nで到着した客がQ_1へ到着する時刻



平衡分布

$$\mathbb{P}(Q(t)=(n_0,n_1)) = \frac{1}{G(N)} \prod_{i=0}^{1}\prod_{n=1}^{n_i} \frac{1}{\mu_i(n)} \stackrel{def}{=} P_N(n_0,n_1)$$

ここで $G(N)^{-1}$ は正規化定数　　$\mu_i(n) = \begin{cases} n\mu_i & (n<s_i) \\ s_i\mu_i & (n\geq s_i) \end{cases}$

到着時点列に関して定常な分布

$$\mathbb{P}_0(Q(t_n+0)=(q_0+1,q_1)) \stackrel{d}{=} \mathbb{P}(Q(t_n+0)=(q_0+1,q_1)\mid t_0=0) = P_{N-1}(q_0,q_1)$$

$$\mathbb{P}_1(Q(\tau_n-0)=(q_0+1,q_1)) \stackrel{d}{=} \mathbb{P}(Q(\tau_n-0)=(q_0+1,q_1)\mid \tau_0=0) = P_{N-1}(q_0,q_1)$$

Cycle time の定義

任意の客が、Q_0に到着した時、他の客の並び方の確率分布が、$P_{N-1}(q_0,q_1)$ であるという条件の下での滞在時間分布。

すなわち $\mathbb{P}_0$ の下での W_n^0 と W_n^1 の同時分布

§3 Single Server の場合

〈CHOW. W. M の結果[3]〉

$$\mathbb{P}_0(W_n^0 \leqq x,\ W_n^1 \leqq y)$$

$$= \sum_{g_0+g_1=N-1} P_{N-1}(g_0, g_1) \int_0^x d\Pr\{W_n^0 \leqq u \mid g_0\} \sum_{g_1'} \Pr\{Q_1(\tau_{\nu(n)}-0)=g_1' \mid W_n^0,\ g_0\} \int_0^y d\Pr\{W_n^1 \leqq v \mid g_1'\} \quad (1)$$

ここで、$\Pr\{W_n^0 \leqq u \mid g_0\}$，$\Pr\{W_n^1 \leqq v \mid g_1'\}$の計算は、容易である。

又 $\quad \Pr\{Q_1(\tau_{\nu(n)}-0)=g_1' \mid W_n^0,\ g_0\} \quad (2)$

は、次のようにして計算する。

一般に到着率μ_0，サービス率μ_1のM/M/1の時刻tでの状態をX(t)とすると、有限時間推移確率は、

$$\Pr\{X(t)=j \mid X(0)=i\}$$

$$= \sum_{\Delta(j-i)} e^{-(\mu_0+\mu_1)t} \frac{\mu_0^n \mu_1^m t^{n+m}}{n!\,m!} - \sum_{\Delta(-j-i-2)} e^{-(\mu_0+\mu_1)t} \frac{\mu_0^{n+j+1} \mu_1^{m-j-1} t^{n+m}}{n!\,m!} \quad (3)$$

($\Delta(j-i)$は $n, m \geqq 0$, で $n-m \leqq j-i$ なる n, m の集合)

と表す事ができる。[5]

ところで $Q_1(t)$ は、M/M/1(N)とみなす事ができる。

又 (2) において $\tau_{\nu(n)} - t_n = W_n^0$ である事と、系内数Nが一定である事から (3) において、適当に記号を変えると

$$\Pr\{Q_1(\tau_{\nu(n)}-0)=g_1' \mid W_n^0=u,\ Q_1(t_n-0)=g_0\}$$

$$= e^{-\mu_1 u}\frac{(\mu_1 u)^{N-q_1'-1}}{(N-q_1'-1)!} - \sum_{k=N}^{\infty} e^{-\mu_1 u}\frac{(\mu_1 u)^{k-q_1'-1}}{k!}\,\frac{(N-q_0-q_1'-\mu_1 u)\,(N-q_0)!}{(\mu_1 u)^{q_1'+1}\,(N-q_0-q_1')!} \tag{4}$$

この事から (1) 式は

$$\mathbb{P}_0(W_n^0 + W_n^1 \leqq t)$$

$$= \sum_{q_0+q_1=N-1} \int_0^t \int_0^{t-u} P_{N-1}(q_0, q_1) \sum_{q_1'} P_r\{Q_1(\tau_{\nu(n)}-0) = q_1' \mid W_n^0\ q_0\}\, dP_r\{W_n^1 \leqq v \mid q_1'\}\, dP_r\{W_n^0 \leqq u \mid q_1\} \tag{5}$$

これは当然 n に無関係で、整理すると密度関数は

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\mu_1^N}{\mu_1^N - \mu_0^N}\,\mu_0 e^{-\mu_0 t}\dfrac{(\mu_0 t)^{N-1}}{(N-1)!} + \dfrac{\mu_0^N}{\mu_0^N - \mu_1^N}\,\mu_1 e^{-\mu_1 t}\dfrac{(\mu_1 t)^{N-1}}{(N-1)!} & (\rho \neq 1) \\ \mu_0 e^{-\mu_0 t}\dfrac{(\mu_0 t)^N}{N!} & (\rho = 1) \end{cases} \tag{6}$$

〈BOXMA. O.J., DONK. P の結果 [1]〉

$Q(\tau_n-0)$ の分布が $P_{N-1}(q_0, q_1)$ の条件の下で滞在時間分布は

$$\mathbb{P}_1(w_n^0 \leqq x\ \ w_n^1 \leqq y) = \sum_{q_0+q_1=N-1} P_{N-1}(q_0, q_1) \int_0^x \int_0^y dP_r\{w_n^0 \leqq u,\ w_n^1 \leqq v \mid (q_0, q_1)\} \tag{7}$$

右辺第2項は

$$P_r\{w_n^0 \leqq u,\ w_n^1 \leqq v \mid (q_0, q_1)\} = P_r\{w_n^0 \leqq u \mid q_0\}\, P_r\{w_n^1 \leqq v \mid q_1\} \tag{8}$$

更に (8) の右辺第1項は $Q(t)$ の可逆性より

$$P_r\{w_n^0 \leqq u \mid Q_0(\tau_n-0) = q_0+1\} = P_r\{W_n^0 \leqq u \mid Q(t_n+0) = q_0+1\} \tag{9}$$

(7) の分布は n に無関係に計算できて、その密度関数は、次のようになり、$(x+y)=t$ とすれば [3] の結果と一致する。

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\rho}{1-\rho^N}\,\mu_0 e^{-\mu_0 x}\mu_1 e^{-\mu_1 y}\dfrac{\{\mu_1(x+y)\}^{N-1}}{(N-1)!} & (\rho\neq 1)\\[2ex] \mu_0 e^{-\mu_0(x+y)}\dfrac{\{\mu_0(x+y)\}^N}{N!} & (\rho=1)\end{cases}\tag{10}$$

ところで $V(n)$ の定義から $\{\overline{W}_n^0\leqq x, \overline{W}_n^1\leqq y\}=\{W_{V(n)}^0\leqq x, W_{V(n)}^1\leqq y\}$ であるが、滞在時間のエルゴード性から

$$\mathbb{P}_0(\overline{W}_n^0\leqq x, \overline{W}_n^1\leqq y)=\mathbb{P}_0(W_{V(n)}^0\leqq x, W_{V(n)}^1\leqq y)=\mathbb{P}_1(W_n^0\leqq x, W_n^1\leqq y)\tag{11}$$

なる関係が一般に成立する。[4]

§4 Many Servers の場合

$Q(t)$ の推移強度関数を

$$\pi(a,b)\overset{d}{=}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbb{P}\{Q(t+\Delta t)=b\mid Q(t)=a\}}{\Delta t}$$

とすると

$$P_N(q_0+1,q_1)\pi((q_0+1,q_1),(q_0,q_1+1))=P_N(q_0,q_1+1)\pi((q_0,q_1+1),(q_0+1,q_1))$$

が直接計算して確められる。

すなわち $Q(t)$ は可逆性を有し、$Q(t)$ の可逆性から

$$A=\{t_i=a_i,\ \tau_{i-1}=b_i,\ Q_0(t_i-0)=n_i,\ Q_0(\tau_{i-1}+0)=m_i,\ (i=1,2,\cdots)\}$$

$$B=\{\tau_{-i}=-a_i,\ t_{-i}=-b_i,\ Q_0(\tau_{-i}+0)=n_i,\ Q_0(t_{-i}-0)=m_i,\ (i=1,2,\cdots)\}$$

とすると

$$P_r\{A\mid Q_0(t_0-0)=q_0\}=P_r\{B\mid Q_0(\tau_0+0)=q_0\}\tag{12}$$

ここで $N(m_i)=\min\{m_i+1,\ s_0\}$ とすると、指数分布の無記憶性から、

$$\mathbb{P}_0(t_0\text{に到着した客が}T_{i-1}\text{で退去} \mid A,\ Q_0(t_0-0)=q_0)$$

$$= \frac{1}{N(m_i)}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{1}{N(m_j)} \tag{13}$$

又、$\{B,\ Q_0(T_0+0)=q_0\}$ の条件の下で、T_0 で退去した客が、t_i で到着した確率を考えると、$m_i<s_0$ の時、t_i+0 でサービス中の m_i+1 人のうちの中に注目している客が含まれている事から、確率は、$1/(m_i+1)$ である。

又 $m_i \geqq s_0$ の時、この客は、m_i+1-s_0 人目のサービス終了と同時にサービスを、受け始める。この時サービスを受けている s_0 人のうちの1人がこの客である事と、指数分布の無記憶性から、確率は、$1/s_0$ となり、この場合も(13)と同じ結果になる。すなわち、

$$\mathbb{P}_1(W_n^0 \leqq x,\ W_n^1 \leqq y)$$

$$= \sum_{q_0+q_1=N-1} \mathbb{P}_0(W_n^0 \leqq x \mid Q_0(t_0-0)=q_0)\ \mathbb{P}_1(W_n^1 \leqq y \mid Q_1(T_0-0)=q_1)\ P_{N-1}(q_0\, q_1)$$

これより滞在時間分布のLSTは

$$E[\exp(-\theta_0 W_n^0 - \theta_1 W_n^1)]$$

$$= \sum_{q_0+q_1=N-1}\left(\frac{1}{1+\frac{\theta_0}{s_0\mu_0}}\right)^{I_0}\left(\frac{1}{1+\frac{\theta_0}{\mu_0}}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{\theta_1}{s_1\mu_1}}\right)^{I_1}\left(\frac{1}{1+\frac{\theta_1}{\mu_1}}\right) P_{N-1}(q_0\, q_1) \tag{14}$$

$$(\mathrm{Re}\ \theta_0,\ \theta_1 \geqq 0)$$

$$I_0=\max(q_0+1-s_0,\ 0) \quad I_1=\max(q_1+1-s_1,\ 0)$$

W_n^0, W_n^1 の条件付独立性と(14)から、各モーメントは次のようになる。

$$E[W_n^j] = \sum_{q_0+q_1=N-1} \frac{1}{\mu_j}\left(\frac{I_j}{s_j}+1\right) P_{N-1}(q_0, q_1) \qquad (j=0,1) \tag{15}$$

$$E[(W_n^j)^2] = \sum_{q_0+q_1=N-1} \frac{1}{\mu_j^2}\left\{\left(\frac{I_j}{s_j}+1\right)^2 + \frac{I_j}{s_j^2}+1\right\} P_{N-1}(q_0, q_1) \qquad (j=0,1) \tag{16}$$

$$E[W_n^0 W_n^1] = \sum_{q_0+q_1=N-1} \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{I_0}{s_0}+1\right)\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{I_1}{s_1}+1\right) P_{N-1}(q_0, q_1) \tag{17}$$

又 Cycle time に関しては

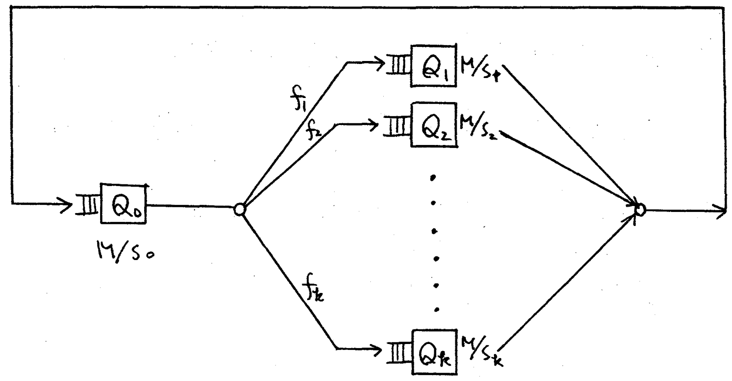
$$E[W_n^0+W_n^1] = E[W_n^0] + E[W_n^1] \tag{18}$$

$$E[(W_n^0+W_n^1)^2] = E[(W_n^0)^2] + E[(W_n^1)^2] + 2E[W_n^0 W_n^1] \tag{19}$$

しかし $E[W_n^0]$, $E[W_n^1]$ は平衡分布と Little の公式からも計算できる量である。(数値例 付図)

§5 Central Server モデル

下図のような、Central Server モデルに、前節の結果を、適要する。



このモデルでは、Q_0を退去したお客は、確率 f_i $(i=1,2,\cdots k)$ でQ_iへ行く。Q_iはS_iのサーバーを持ち、各サーバーは、サービス率μ_iの指数サービスを行なうものとする。
すなわち、このモデルは、前節のモデルを、自然に拡張したものと、みなす事ができる。

このモデルも又、可逆である事を示そう。
時刻tでの状態を $Q(t)=(Q_0(t),\cdots\cdots,Q_k(t))$ で表わし、推移強度関数を

$$\pi_{ij}(q_0\cdots q_i\cdots q_j\cdots q_k)$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P\left(Q(t+\Delta t)=(q_0\cdots q_i\cdots q_j+1,\cdots q_k)\,\middle|\,Q(t)=(q_0\cdots q_i+1\cdots q_j\cdots q_k)\right)}{\Delta t}$$

とすると

$$P_N(q_0+1\cdots q_j\cdots q_k)\,\pi_{0j}(q_0\cdots q_j\cdots q_k)$$
$$=\frac{1}{G(N)}\prod_{i=0}^{k}\prod_{n=1}^{q_i+\delta_{0i}}\frac{f_i}{\mu_i(n)}\,f_j\,\mu_0(q_0+1)$$
$$=\frac{1}{G(N)}\prod_{i=0}^{k}\prod_{n=1}^{q_i+\delta_{ji}}\frac{f_i}{\mu_i(n)}\,\mu_j(q_j+1)=P_N(q_0\cdots q_j+1\cdots q_k)\,\pi_{j0}(q_0\cdots q_j\cdots q_k)$$

（ δはクロネッカーのデルタ ）

この事から、このモデルにおいて、お客が$Q_0\to Q_i$を巡回する場合のCycle timeは、§4で求めたもののf_iの重みをつけた値となり、系全体としては、全てのiについて和をとれば、良い事になる。

すなわち、Q_0へn番目に到着したお客の、Q_0での滞在時間をW_n^0, Q_0以外での滞在時間をW_n^1とすると、L.S.T.は、

$$E[\exp(-\theta_0 W_n^0 - \theta_1 W_n^1)]$$

$$= \sum_{\Sigma q_i = N-1} \sum_{i=1}^{k} f_i \left(\frac{1}{1+\frac{\theta_0}{s_0 \mu_0}} \right)^{I_0} \left(\frac{1}{1+\frac{\theta_0}{\mu_0}} \right) \left(\frac{1}{1+\frac{\theta_1}{s_i \mu_i}} \right)^{I_i} \left(\frac{1}{1+\frac{\theta_1}{\mu_i}} \right) P_{N-1}(q_0 \cdots q_k)$$

$$(\mathrm{Re}\ \theta_0, \theta_1 \geq 0) \qquad (20)$$

$$I_j = \max(q_j + 1 - s_j,\ 0)$$

又§4同様に、各モーメントは次のようになる。

$$E[W_n^0] = \sum_{\Sigma q_i = N-1} \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{I_0}{s_0} + 1 \right) P_{N-1}(q_0 \cdots q_k) \qquad (21)$$

$$E[W_n^1] = \sum_{\Sigma q_i = N-1} \sum_{i=1}^{k} f_i \frac{1}{\mu_i} \left(\frac{I_i}{s_i} + 1 \right) P_{N-1}(q_0 \cdots q_k) \qquad (22)$$

$$E[(W_n^0)^2] = \sum_{\Sigma q_i = N-1} \frac{1}{\mu_0^2} \left\{ \left(\frac{I_0}{s_0} + 1 \right)^2 + \frac{I_0}{s_0^2} + 1 \right\} P_{N-1}(q_0 \cdots q_k) \qquad (23)$$

$$E[(W_n^1)^2] = \sum_{\Sigma q_i = N-1} \sum_{i=1}^{k} f_i \frac{1}{\mu_i^2} \left\{ \left(\frac{I_i}{s_i} + 1 \right)^2 + \frac{I_i}{s_i^2} + 1 \right\} P_{N-1}(q_0 \cdots q_k) \qquad (24)$$

$$E[W_n^0 W_n^1] = \sum_{\Sigma q_i = N-1} \sum_{i=1}^{k} f_i \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{I_0}{s_0} + 1 \right) \frac{1}{\mu_i} \left(\frac{I_i}{s_i} + 1 \right) P_{N-1}(q_0 \cdots q_k) \qquad (25)$$

又 Cycle time に関しても§4同様に容易に計算できる。

$$E[W_n^0 + W_n^1] = E[W_n^0] + E[W_n^1] \qquad (26)$$

$$E[(W_n^0 + W_n^1)^2] = E[(W^0)^2] + E[(W_n^1)^2] + 2E[W_n^0 W_n^1] \qquad (27)$$

(数値例 付図)

§6 おわりに

2段の Cyclic Queue と、それに類似した Central Server モデルを比較すると、相違が見られる。特に共分散のグラフ

で著しい。今回は、これらについて検討する事はできなかったが、今後の課題とする。

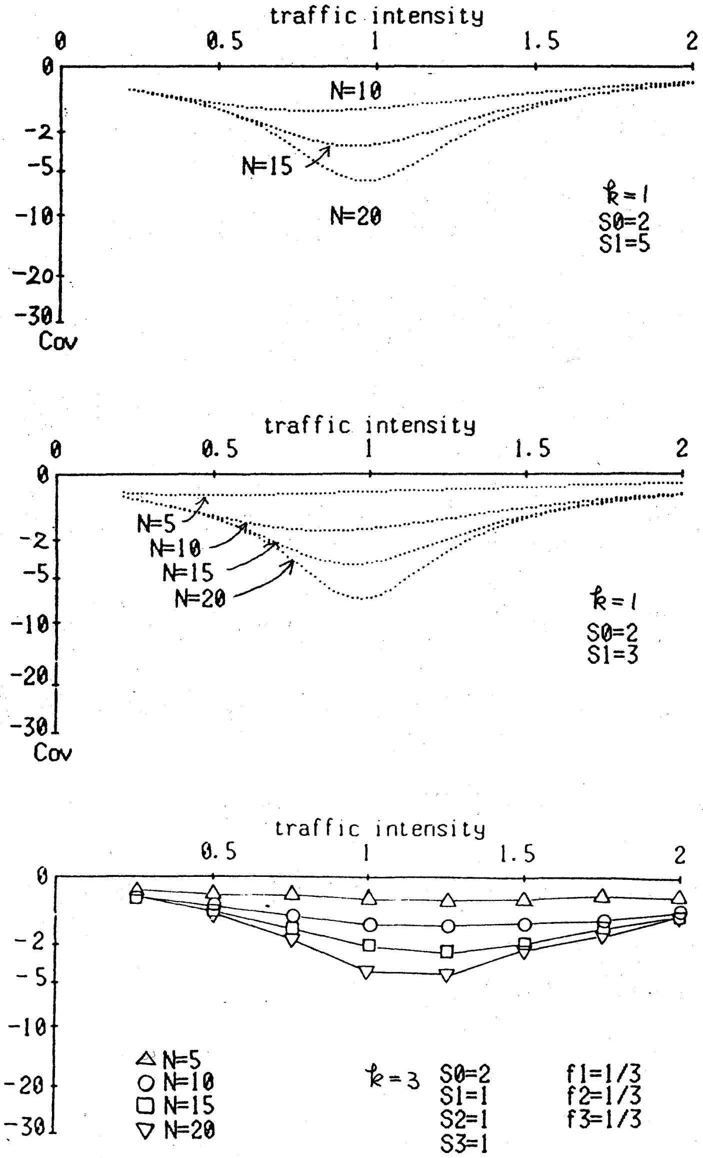
〈数値例〉

トラフィック密度

$$\rho = \frac{k\Sigma_{i=1}^{k} f_i \mu_i s_i}{s_0 \mu_0}$$

$(\mu_0 = 1 : \mathrm{fix})$

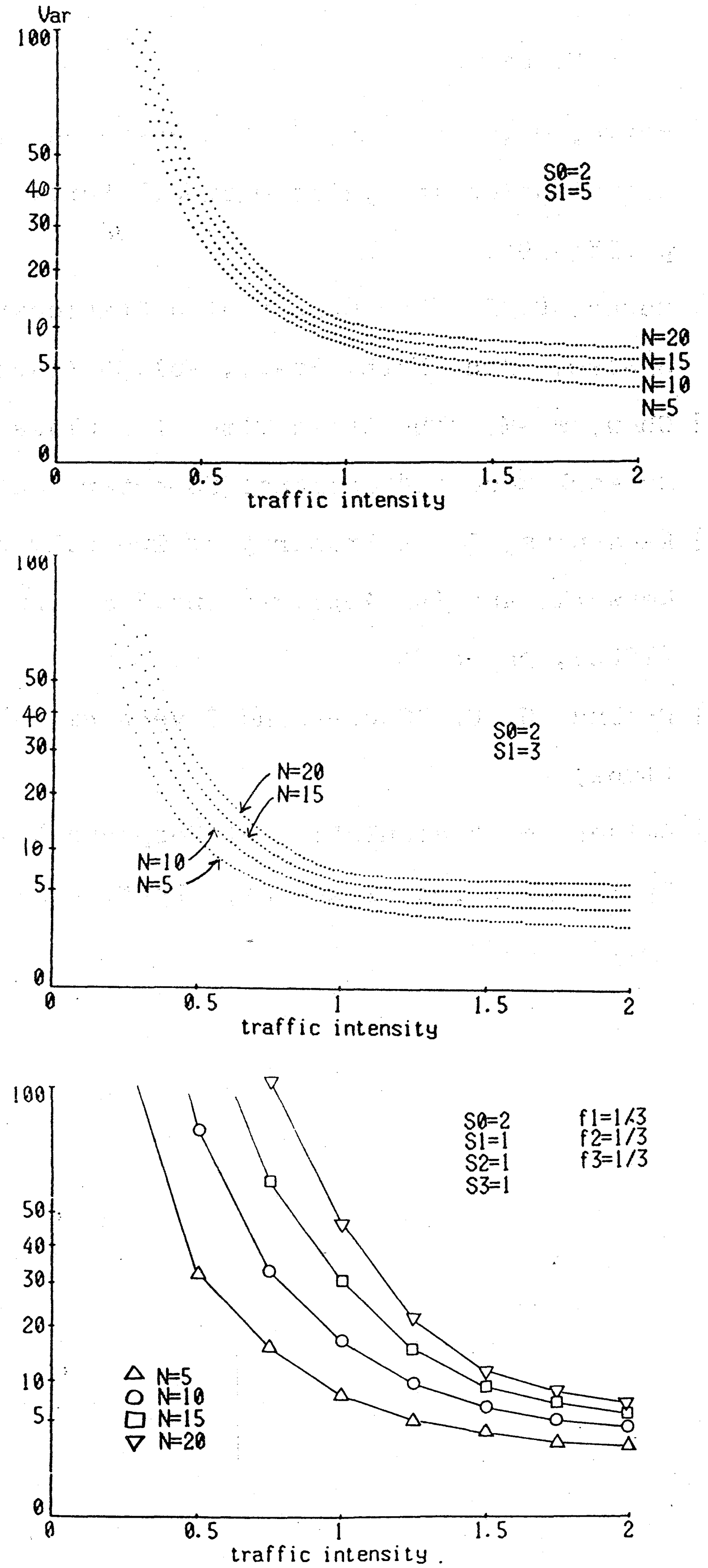
$(\mu_1 = \cdots = \mu_k)$



付図 1　$\mathrm{Cov}(W_n^0, W_n^1)$

付図 2

$Var(w_n^0 + w_n^1)$



REFERENCES

[1] Boxma, O., J., Donk, P. "On Responce-time and Cyclic-time Distribution in Cyclic Queues," Perf. Eval., Vol.2 (1982), pp.181-194.

[2] Burke, P. J. "The Output of a Stationary M/M/s Queueing System," Ann. Math. Stat., Vol.39 (1968), pp.1144-1152.

[3] Chow, W.-M. "The Cycle Time of a Class of Closed Queueing Network Models," National Computer Conf., 1978, pp.489-494.

[4] Kawashima, T. "A Property of Two Palm Measures in Queueing Networks and Its Applications," J. Opn. Res. J., Vol.21 (1982), pp.16-28.

[5] Prabhu, N. U. "Queues and Inventories," John Wiley, New York (1962).

[6] Reiser, M. "Calculation of Responce-time Distribution in Cyclic Exponential Queues," Perf. Eval.,Vol. 1 (1981), pp.131-133.