数理解析研究所講究録
第 490 巻 1983 年 210-215

ほぼ独立な部分よりなるマルコフ連鎖の定常分布の数値計算について

東北大・経済　高橋　幸雄　(Yukio　Takahashi)

1. ほぼ独立な2つの部分より成るシステム

サブシステムAとBが互いに独立で、それぞれ無限小生成作用素 Q_A, Q_B をもつ時間連続なマルコフ連鎖に従っているとすれば、2つを合わせたシステムABは無限小生成作用素

(1) $$Q_{AB} = Q_A \oplus Q_B$$

をもつマルコフ連鎖に従う。ここで$\oplus$はクロネッカー和を表す。

もしサブシステムAとBが独立でなく、ごく僅かに相互干渉していて、全体としてひとつのマルコフ連鎖に従っているとすると、その無限小生成作用素は

(2) $$Q = Q_A \oplus Q_B + R$$

という形をしていると考えるのは自然であろう。むろん、相互干渉の形によってはこう表せるとは限らないが、(2)はひとつの有力な考え方である。

そこで問題となるのは、AとBがほぼ独立というのをどう定義するかである。

とりあえず、つぎの3つの考え方がありうるであろう。

イ． Q_AとQ_Bの定常確率ベクトル(存在するものとして)をα_A、α_Bとし、Qの定常確率ベクトルαが

(3) $$\alpha \fallingdotseq \alpha_A \otimes \alpha_B$$

となっているとき、AとBはほぼ独立であるという。ただし$\otimes$はクロネッカー積を表す。

これは、数値計算の立場からは都合のよい定義であるが、行列Rとの関係がはっきりせず、ほぼ独立であるかどうかチェックしにくいという欠点がある。

ロ． 相互干渉の部分を表す行列Rの要素が、すべて十分にゼロに近いときに、AとBはほぼ独立という。

この場合、(3)が成り立てばよいが、どの程度の近似度で成り立つか判定するのは難しい。αを反復法で計算するときに、初期値として$\alpha_A \otimes \alpha_B$が使えることを除くとあまりメリットはなく、現実のシステムへの適用範囲も必ずしも広くなさそうである。

ハ． Rの要素が数個を除いてゼロであるとき、AとBはほぼ独立という。

この定義は、実際に適用できる範囲もかなりあり、また数値計算上でも、この特徴を利用しやすい。

このように、これらの中ではハ．が一番適しているように思える。そこで、以後ハ.を"ほぼ独立"の定義と考えることにしよう。

当然のことながら、ハ.をほぼ独立と考えると、必ずしも(3)は成りたたない。定常確率ベクトルはいわゆる積形式からかなり離れたものとなる可能性がある。

2. ほぼ独立な２つの部分より成るシステムの定常確率ベクトルの数値計算

上の意味で、ほぼ独立なＡ，Ｂよりなるシステムの定常確率ベクトルを数値計算することを考えよう。 Q_A, Q_B, Q ともエルゴード的で定常分布が存在することは仮定しておく。

この場合にも、通常の Gauss-Seidel 法、Lumping 法、Neuts 法などが適用可能であるが、ここでは、(2)の形を利用した計算法を考える。

話を簡単にするために、Ｒが行ベクトル γ_A，γ_B によってつぎのような形に表されているものとしよう。

(4) $$R = R_A \times R_B = \begin{bmatrix} \gamma_A \\ \hline 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \gamma_B \\ \hline 0 \end{bmatrix}$$

こう書けないときでも、このような形の和で表すことができる。記号をいくつか準備する。

I, I_A, I_B…………単位行列

e, e_A, e_B…………すべての要素が1の列ベクトル

α, α_{AB}, α_A, α_B…Q, Q_{AB}, Q_A, Q_Bの定常確率ベクトル

V, V_{AB}, V_A, V_B……各行がα, α_{AB}, α_A, α_Bの正方行列

Δtを十分小さな正数とすると、スタートの式は

(5) $\alpha Q \Delta t = \alpha (Q_{AB} \Delta t + R \Delta t) = 0$

である。したがって

(6) $\alpha (Q_{AB} \Delta t - V_{AB} + R \Delta t) = -\alpha V_{AB} = -\alpha_{AB}$

$-(V_{AB} - Q_{AB} \Delta t)^{-1}$を右から掛けて

(7) $\alpha (I - R \Delta t (V_{AB} - Q_{AB} \Delta t)^{-1}) = \alpha_{AB} (V_{AB} - Q_{AB} \Delta t)^{-1}$

$= \alpha_{AB} = \alpha_A \otimes \alpha_B$

(4)の仮定から$R \Delta t (V_{AB} - Q_{AB} \Delta t)^{-1}$は、実質的には行ベクトルであり、この行ベクトルの値が得られれば、(7)からαの値はα_Aとα_B（これらを計算するのは簡単）から容易に求められる。

したがって、問題は

(8) $y(V_{AB} - Q_{AB} \Delta t) = (\gamma_A \otimes \gamma_B) \Delta t$

をみたす行ベクトルyを求めることになる。ところで

$y V_{AB} = (ye) \alpha_{AB}$

であるが、(8)の右側からeを掛ければ

$ye = y(V_{AB} - Q_{AB} \Delta t) e = (\gamma_A \otimes \gamma_B) e \Delta t = 0$

よって$yV_{AB} = 0$であり、(8)はつぎのようになる。

$$(9) \qquad -yQ_{AB}\Delta t = (\gamma_A \otimes \gamma_B)\Delta t$$

これをさらに変形すると

$$-y(Q_A\Delta t \otimes I_B + I_A \otimes Q_B\Delta t) = (\gamma_A \otimes \gamma_B)\Delta t$$

$$y((I_A - Q_A\Delta t) \otimes I_B - I_A \otimes (I_B + Q_B\Delta t))$$
$$= (\gamma_A \otimes \gamma_B)\Delta t$$

$$y(I - (I_A - Q_A\Delta t)^{-1} \otimes (I_B + Q_B\Delta t))$$
$$= (\gamma_A (I_A - Q_A\Delta t)^{-1} \otimes \gamma_B)\Delta t$$

よって

$$(10) \qquad y = \sum_{n=0}^{\infty} (\gamma_A (I - Q_A\Delta t)^{-n-1} \otimes \gamma_B (I_B + Q_B\Delta t)^n)\Delta t$$

この級数は比較的早く収束する。$\gamma_A (I-Q_A\Delta t)^{-n-1}$ は逆行列をかけるので大変そうだが、$(I-Q_A\Delta t)$ をいわゆるＬＵ分解しておけば、計算の手間は $I-Q_A\Delta t$ を掛けるのとほとんど変らない。

3. 簡単な計算例による検討

２つの M/M/1 モデルで、系内人数がともに０の場合以外は両者は独立に動くが、系内人数がともに０のときは、Ａ，Ｂどちらへの到着もサブシステムＡへの到着とみなされるという簡単な場合を考え、Gauss-Seidel 法、Neuts 法、Lumping 法と前節の方法の4つの方法で定常確率ベクトルを求めてみた。

Gauss-Seidel 法と Neuts 法はあまり効率がよくなかっ

た。Lumping 法と前節の方法は計算時間は似たようなものであったが、プログラムは前節の方法の方が簡単であった。ただし、Rの形が複雑になっても、Lumping 法では計算の手間があまり増えないが、前節の方法では複雑さ(非零の行数)に比例して増える。この点が問題であろう。

ここで試したモデルの結果をみても、1節の1の意味での独立さは全くといってよいほど期待できない。サブシステムAだけ、またはBだけの周辺分布も α_A や α_B とはかなり違ったものになることがある。

4．3つのサブシステムへの拡張

1節ハ．による”ほぼ独立”の定義は、3つのサブシステムから成るような場合には再考の余地がある。たとえば、AとBとの相互干渉を表す行列を R_{AB} とすると、もしそれがサブシステムCと無関係（独立）であれば、システムの無限小生成作用素には

$$Q = Q_A \oplus Q_B \oplus Q_C + R_{AB} \otimes I_C$$

という形で入ってくる。R_{AB} の非零要素の数が少なくても、$R_{AB} \otimes I_C$ はそれをCの状態数倍しただけの非零要素をもってしまう。この問題をどう考えたらよいかは今後の検討課題である。